24/11/2023

giovedì 23 novembre 2023 16:50

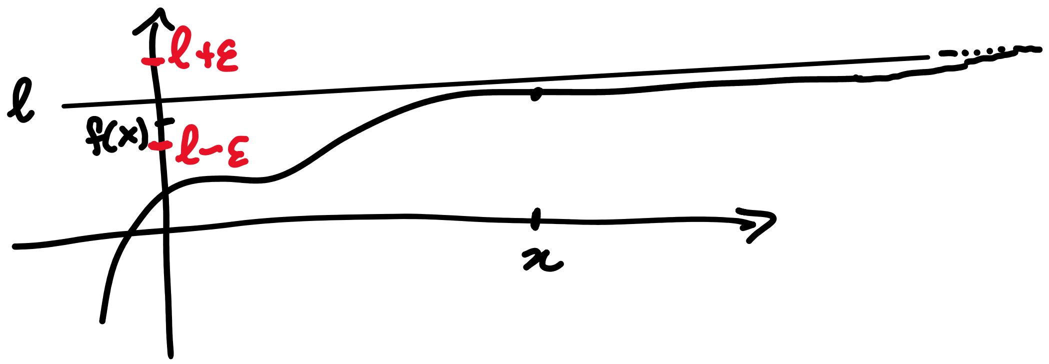
(IERI: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$)

OGGI: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

DEF: SI DICE CHE $f(x)$ TENDE AL NUMERO REALE $\ell \in \mathbb{R}$ PER x CHE TENDE A $+\infty$, E SI SCRIVE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$,

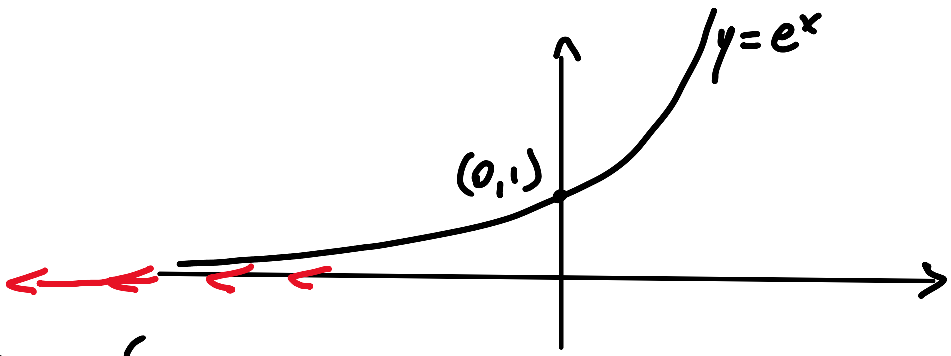
SE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M > 0$ TALE CHE

$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x > M$



DEF: SE CAPITA CHE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (O IL CASO CON $x \to -\infty$), DIREMO CHE LA RETTA $y = \ell$ É ASINTOTO ORIZZONTALE PER $f(x)$.

Es: $f(x) = e^x$



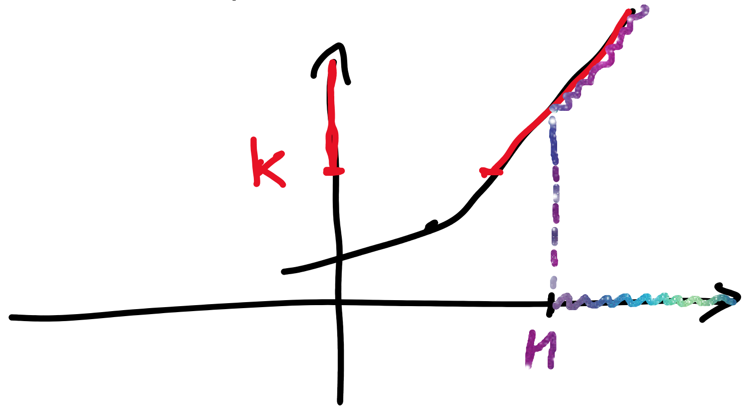
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

LA RETTA $y=0$ É ASINTOTO ORIZZONTALE.

DEF: SI DICE CHE $f(x)$ TENDE A $+\infty$ PER x CHE TENDE A $+\infty$, E SI SCRIVE

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

SE $\forall K>0 \ \exists M>0$ t.c. $f(x)>K$ $\forall x>M$



<u>TEOREMI SUI LIMITI</u>.

$\boxed{\text{TEOREMA 1}}$ (UNICITÀ DEL LIMITE) SE $f(x)$ TENDE A ℓ PER $x \to x_0$, TALE LIMITE É UNICO. OSSIA $\nexists \tilde{\ell}$ TALE CHE $\tilde{\ell} \neq \ell$ E $\lim_{x \to x_0} f(x) = \tilde{\ell}$

$\boxed{\text{TEOREMA 2:}}$ (PERMANENZA DEL SEGNO) SE $f(x)$ TENDE, PER $x \to x_0$, AD UN NUMERO $\ell \neq 0$, ALLORA $\exists I$ INTORNO DI x_0 IN CUI $f(x)$ ED ℓ HANNO (MANTENGONO) LO STESSO SEGNO.

<u>DIM</u>: PER IPOTESI $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ CON $\ell \neq 0$.

2 CASI:

i) $\ell > 0$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ T.C. $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ $\forall x \in I_\delta(x_0)$, OSSIA $\forall x$ T.C. $|x - x_0| < \delta$

$|f(x) - \ell| < \varepsilon$ É EQ. A DIRE CHE

$$-\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon \quad \to \quad \underline{\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon}$$

IN PARTICOLARE POSSO SCEGLIERE $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$

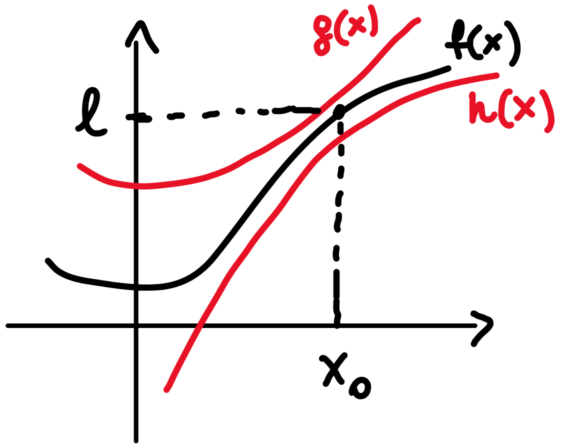
$$\to \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$
$$\ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \frac{\ell}{2}$$
$$\boxed{\frac{\ell}{2} < f(x)} < \frac{3}{2}\ell \quad \to \quad f(x) > \frac{\ell}{2} > 0$$

OSSIA ANCHE $f(x) > 0$ (COME ℓ).

ii) $\ell < 0$: ESERCIZIO.

$\square$

TEOREMA 3: (DEI 2 CARABINIERI O DEL CONFRONTO)



SIANO $f(x), g(x), h(x)$ 3 FUNZIONI E x_0 UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER IL LORO DOMINIO (QUINDI POSSIAMO CALCOLARE IL LIMITE PER $x \to x_0$ DI TUTTE E TRE LE FUNZIONI). SE VALE CHE

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

PER OGNI $x \in D$ (DOMINIO DELLE 3 FUNZIONI),

E SE $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

UGUALI

ALLORA SEGUE CHE $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

DIM: $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l \longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0$ T.C.

$|h(x) - l| < \varepsilon$ SE $|x - x_0| < \delta_1$

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l \longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0$ T.C.

$|g(x) - l| < \varepsilon$ SE $|x - x_0| < \delta_2$

SE PRENDO δ PIÚ PICCOLO SIA DI δ_1 CHE DI δ_2

SUCCEDE CHE CONTEMPORANEAMENTE

$$\underbrace{|h(x)-\ell|<\varepsilon}\quad \text{E} \quad \underbrace{|g(x)-\ell|<\varepsilon}$$

SE $|x-x_0|<\delta$

$$\ell-\varepsilon<h(x)<\ell+\varepsilon \qquad\qquad \ell-\varepsilon<g(x)<\ell+\varepsilon$$

VOGLIO OTTENERE CHE $\ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$.

SAPPIAMO CHE $h(x)\le f(x)\le g(x)$, ALLORA

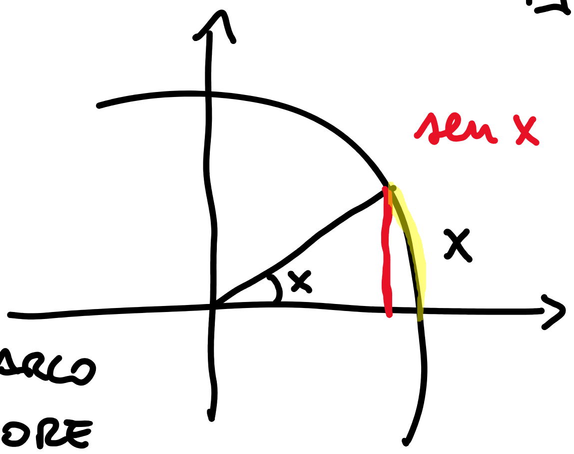
$$\boxed{\ell-\varepsilon<h(x)\le f(x)\le g(x)<\ell+\varepsilon}$$

OSSIA $\ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$ SE $|x-x_0|<\delta$.

QUINDI $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

$\square$

Es: $\lim_{x\to 0} \sin x = ?$



DICO CHE $\sin x \le x$

INFATTI LA LUNGHEZZA DELL'ARCO GIALLO (PARI A x) É MAGGIORE DEL SEGMENTO ROSSO (PARI A SEN x).

SE CI RESTRINGIAMO A $[0,\frac{\pi}{2}) \subseteq \mathbb{R}$, VALE ANCHE CHE $\sin x \ge 0$. QUINDI $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2})$ HO CHE

$$0\le \sin x\le x$$

$h(x)$ $\uparrow$ $\qquad\qquad$ $f(x)$ $\uparrow$

$$\lim_{x \to 0^+} \sin x = ? \qquad \lim_{x \to 0^+} 0 = 0$$

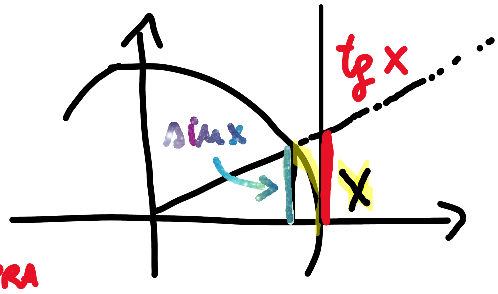
$$\lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$\Longrightarrow$ PER IL TEO. DEL CONFRONTO, ANCHE

$$\lim_{x \to 0^+} \sin x = 0 .$$

//

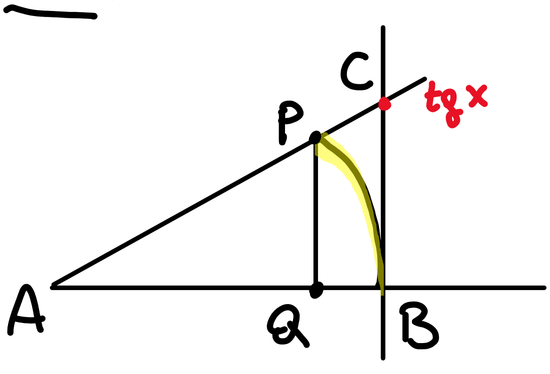
LIMITI NOTEVOLI.



1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$

VISTO SOPRA

DIM: DICO CHE $\underbrace{\sin x < x}_{\text{VISTO SOPRA}} < \operatorname{tg} x$ (✪)



$$\overset{\triangle}{ABC} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2}$$

$$\overset{\triangle}{APQ} = \frac{\cos x \cdot \sin x}{2}$$

$$\overset{\frown}{ABP} = \frac{1 \cdot x}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\overset{\frown}{ABP} < \overset{\triangle}{ABC} \Longrightarrow \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Longrightarrow x < \operatorname{tg} x$$

(✪) DIVIDO TUTTO PER $\sin x$ (PRENDENDO

$x \to 0^+$ COSICCHÉ $\sin x \neq 0$)

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

MA $\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1 = \lim_{x \to 0^+} 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ PER IL THM. DEI 2 CARABINIERI.

ESERCIZIO: DIM. CHE $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2} =$ [SFRUTTIAMO LA FORMULA $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$]

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1-1+2\sin^2 x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} 2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} 2\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = \boxed{2}$$