23/11/2023

mercoledì 22 novembre 2023 10:51

§ 3. ANALISI MATEMATICA.

INTERVALLI E INTORNI:

DEF: UN INTERVALLO É UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ DI FORMA:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ → INT. APERTO

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ → INT. CHIUSO

DEF: DATO UN PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$, UN SUO INTORNO É UN INTERVALLO APERTO CHE LO CONTIENE, OSSIA DEL TIPO

$$(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$$

ES: $x_0 = 1$, $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ É SUO INTORNO.

DEF: UN INTORNO CIRCOLARE DI $x_0 \in \mathbb{R}$ É

$$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$$

ES: • $x_0 = 1$, $(0,2)$ É INT. CIRC. DI 1.

$I_1(1) = (0,2)$.

- $I_{\frac{1}{2}}(3) = \left(3-\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

NOTA: (INTERVALLI LIMITATI O ILLIMITATI). SE $I=(a,b)$ É UN INTERVALLO E a,b SONO ENTRAMBI NUMERI FINITI, I SI DICE ESSERE LIMITATO. SE INVECE $a=-\infty$ O $b=+\infty$, I É DETTO ILLIMITATO.

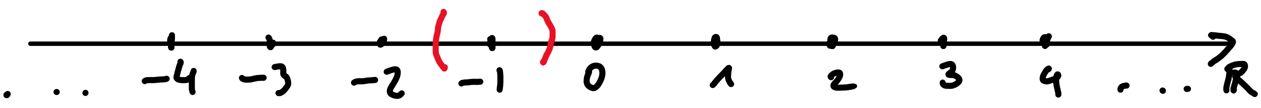
Es: $(1,3]$ É LIMITATO, $(-\infty, 5]$ NO.

DEF: UN PUNTO $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ SI DICE "ISOLATO" SE $\exists I_r(x_0)$ CHE NON CONTIENE NESSUN PUNTO DI A (TRANNE x_0 STESSO).

INVECE $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ É DETTO "DI ACCUMULAZIONE" SE NON É ISOLATO, QUINDI $\forall I_r(x_0)$ $\exists x \in I_r(x_0) \cap A$ (OLTRE x_0 STESSO).

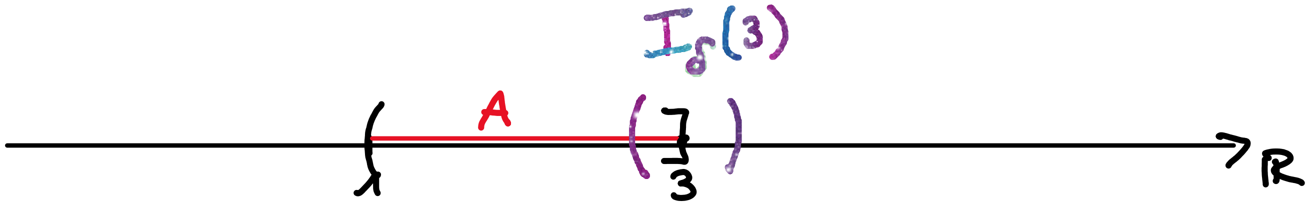
Es: 1) $A = \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$

$I_{\frac{1}{2}}(-1) = \left(-1-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



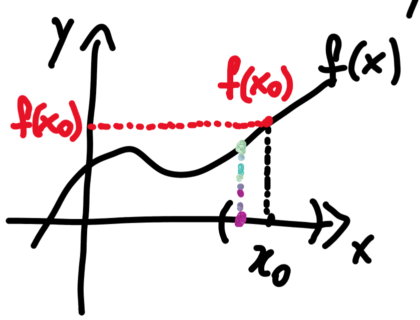
$\Rightarrow -1$ É UN P.TO ISOLATO.

2) $A = (1, 3] \subseteq \mathbb{R}$ $\quad$ $x_0 = 3$ É P.TO DI ACC. PER A?



$\Rightarrow$ 3 NON É ISOLATO $\Rightarrow$ É DI ACCUMULAZ.

LIMITI.



CERCHIAMO DI CAPIRE SE INTORNI DI x_0 VENGONO MANDATI IN INTORNI DI $f(x_0)$

Es: $y = \dfrac{2x^2 - 6x}{x - 3}$ $\qquad$ $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

COSA SUCCEDE SE CALCOLO $f(x)$ CON x "VICINI" A 3?

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	3	3,0001	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	5,8	5,98	5,998	5,9998	N.D.	6,0002	6,002	6,02	6,2

POSSIAMO DIRE CHE, SE CONSIDERIAMO UN QUALUNQUE INTORNO CIRCOLARE DI $f(3) = 6$ DI AMPIEZZA $\varepsilon > 0$ $(I_\varepsilon(6))$ ESISTE SEMPRE UN INTORNO DI 3 I CUI PUNTI $x \neq 3$ HANNO IMMAGINE CONTENUTA IN $I_\varepsilon(6)$

SCRIVEREMO IN QUESTO CASO $\displaystyle\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

DEF: SI DICE CHE LA FUNZIONE $f(x)$ HA PER LIMITE

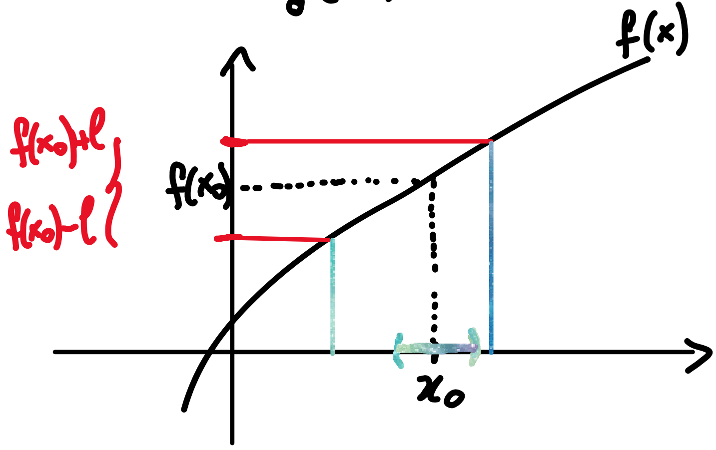
IL NUMERO $\ell \in \mathbb{R}$ PER x CHE TENDE A x_0,
E SI SCRIVE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

SE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_\delta(x_0)$ TALE CHE $\underbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}$
$\forall x \in I_\delta(x_0)$

$-\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

$f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) = I_\varepsilon(\ell)$



PER VERIFICARE IL LIMITE, USIAMO LA DEFINIZIONE.
AD ES. VERIFICHIAMO $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$

$|(2x-1) - 3| < \varepsilon$; $|2x - 1 - 3| < \varepsilon$;

$|2x - 4| < \varepsilon$; $-\varepsilon < 2x - 4 < \varepsilon$;

$4 - \varepsilon < 2x < 4 + \varepsilon$; $2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2}$

OSSIA $x \in I_{\frac{\varepsilon}{2}}(2)$.

DEF: SIA $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE E SIA $x_0 \in [a, b]$. ALLORA <u>f É "CONTINUA" IN x_0</u> SE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

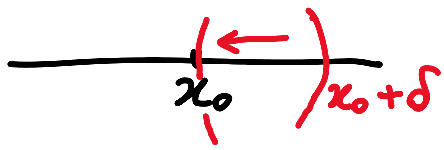
SE f É CONTINUA IN TUTTI I PUNTI DEL

SUO DOMINIO, DIREMO CHE **f È CONTINUA**.

UNA LISTA DI FUNZIONI CONTINUE È LA SEGUENTE:

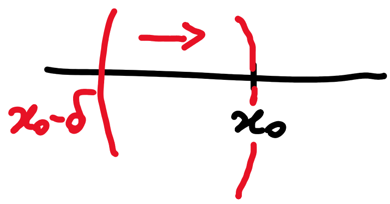
- F. COSTANTI $(y = c, \quad c \in \mathbb{R})$
- F. POLINOMIALI
- F. RADICE QUADRATA (ANCHE DI ALTRI INDICI PIÙ IN GENERALE)
- F. ESPONENZIALI
- F. LOGARITMICHE
- F. GONIOMETRICHE

LIMITE DESTRO/SINISTRO:



IL **LIMITE DESTRO** DI $f(x)$ SI DENOTA CON $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ED È UGUALE A $l \in \mathbb{R}$ SE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ T.C. $|f(x) - l| < \varepsilon$, $\forall x \in \underbrace{(x_0, x_0+\delta)}$

INTORNO DESTRO DI x_0

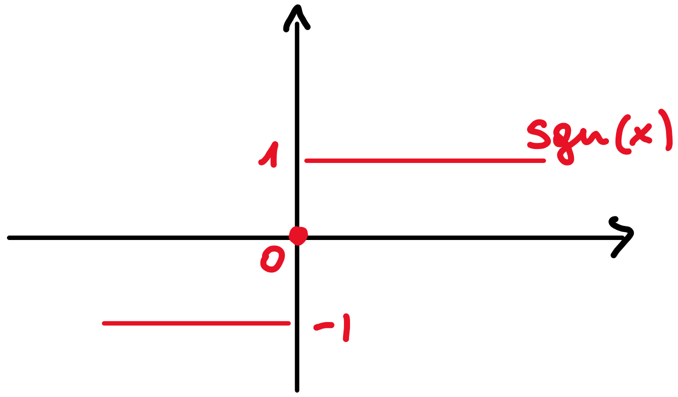


IL LIMITE SINISTRO DI $f(x)$ SI DENOTA CON $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ED È UGUALE A $l \in \mathbb{R}$ SE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ T.C. $|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in \underbrace{(x_0-\delta, x_0)}$

INTORNO SINISTRO DI x_0.

Es: $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Es: $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

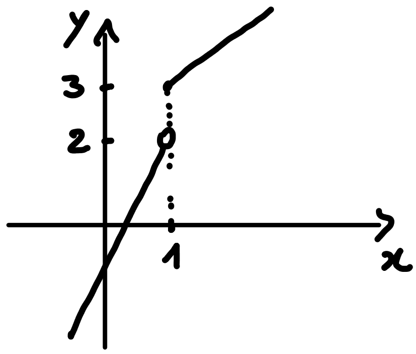


$$\lim_{x \to 0^+} \mathrm{sgn}(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \mathrm{sgn}(x) = -1$$

$$f(0) = 0$$

Es: $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{se } x < 1 \\ 2x+1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

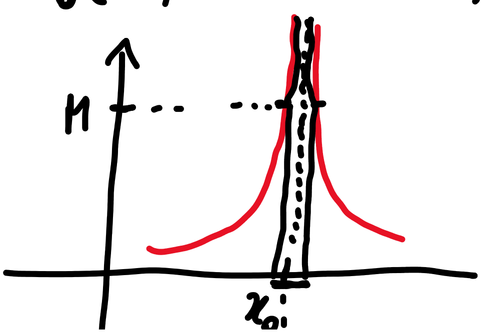
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$

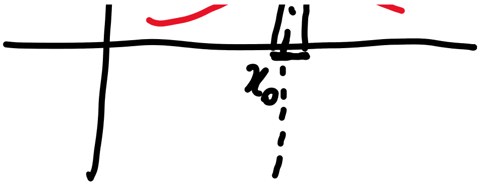
$\neq$

NOTA: DIREMO CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff$ ENTRAMBI

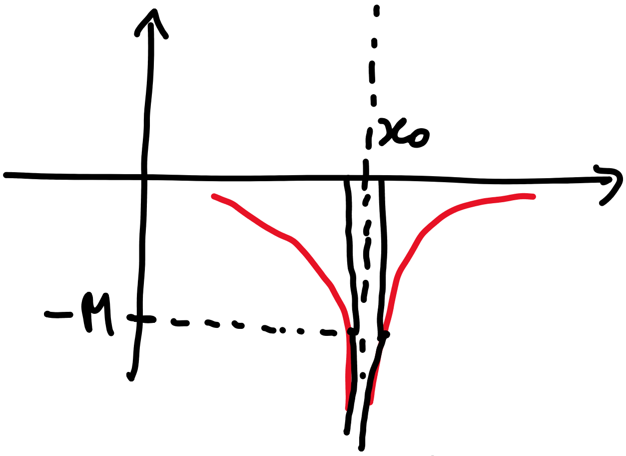
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell .$$

DEF: SIA f UNA FUNZIONE NON DEFINITA IN x_0. SI DICE CHE $f(x)$ TENDE A $+\infty$ PER $x \to x_0$ E SI SCRIVE $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ SE $\forall M > 0$ $\exists I_\delta(x_0)$ T.C. $f(x) > M \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$.





DEF: SIA f UNA FUNZIONE NON DEFINITA IN x_0.
SI DICE CHE $f(x)$ TENDE A $-\infty$ PER $x \to x_0$
E SI SCRIVE $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ SE $\forall M > 0$
$\exists I_\delta(x_0)$ T. C. $f(x) < -M \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$.

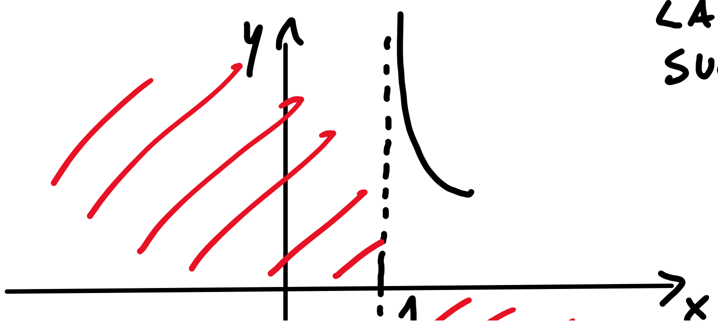


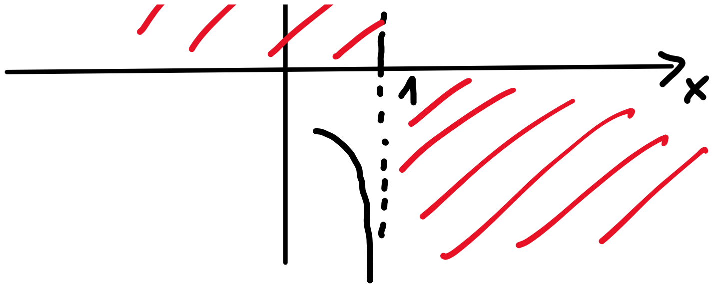
DIREMO, SE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, CHE LA RETTA $x = x_0$ É UN <u>ASINTOTO VERTICALE</u> PER $f(x)$.

Es: 1) $y = \dfrac{1}{x-1}$ $\qquad$ D: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$

LA RETTA $x = 1$ É UN SUO ASINTOTO VERTICALE





ALTRI 2 ESEMPI DI ASINTOTI VERTICALI SONO:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tg(x) = \infty$$