17/11/2023

giovedì 16 novembre 2023 17:42

ES. LEZ. SCORSA:

1) $\ln(1-x)+\ln(-2x)=2$

C.E.: $\begin{cases} 1-x>0 \\ -2x>0 \end{cases}$ ossia $\begin{cases} x<1 \\ x<0 \end{cases}$ $\rightarrow x<0$

$$\ln[(1-x)(-2x)]=2$$

$$\Updownarrow$$

$$e^2=(1-x)(-2x)$$

$$e^2=-2x+2x^2 \quad ; \qquad 2x^2-2x-e^2=0$$

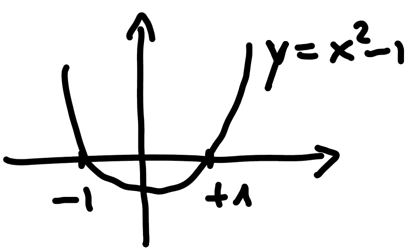
$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 2\cdot(-e^2)}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{4+8e^2}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{4(1+2e^2)}}{4}=$$

$$=\frac{2\pm 2\sqrt{1+2e^2}}{4}=\frac{\cancel{2}(1\pm\sqrt{1+2e^2})}{\cancel{4}_{2}}=\frac{1\pm\sqrt{1+2e^2}}{2}$$

OSSIA $\underbrace{x=\frac{1+\sqrt{1+2e^2}}{2}}_{\text{NON ACC. (É > 0)}}$, $\boxed{x=\frac{1-\sqrt{1+2e^2}}{2}}$

2) $\ln(\ln(x^2-1))<0$

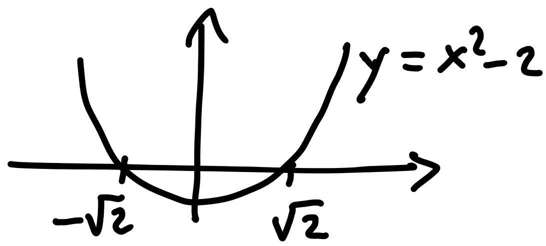
C.E: $\begin{cases} x^2-1>0 \\ \ln(x^2-1)>0 \end{cases}$



$x^2-1>0$ per $x<-1$ or $x>+1$

★ $\ln(x^2-1)>0$; $\ln(x^2-1) > \ln 1$

$\rightarrow x^2-1 > 1$; $x^2-2>0$



HA SOL. $x<-\sqrt{2}$ o $x>\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ C.E : $\begin{cases} ♡ \\ ★ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<-1 \ \vee \ x>1 \\ x<-\sqrt{2} \ \vee \ x>\sqrt{2} \end{cases}$

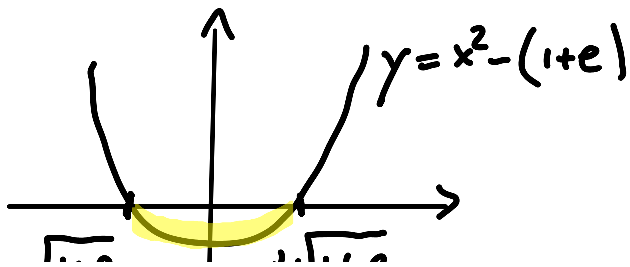
OSSIA C.E : $x<-\sqrt{2} \quad \vee \quad x>\sqrt{2}$.

RISOLVIAMO LA DISEQ. INIZIALE :

$\ln(\ln(x^2-1))<0$; $\ln(\ln(x^2-1))<\ln 1$

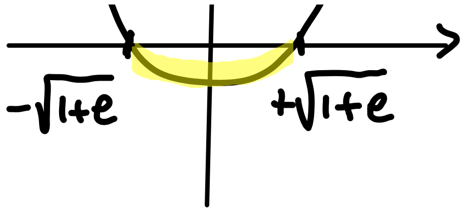
$\rightarrow \ln(x^2-1) < 1$; $\ln(x^2-1) < \ln e$

$\rightarrow x^2-1<e$; $x^2-(1+e)<0$



QUINDI $x^2-(1+e)<0$ QUANDO

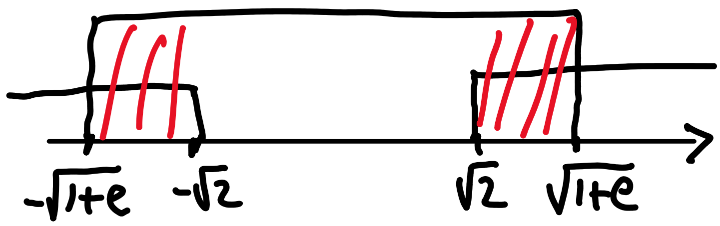
$-\sqrt{1+e} < x < \sqrt{1+e}$



$$-\sqrt{1+e} < x < \sqrt{1+e}$$

CONTROLLIAMO LE C.E: FACCIAMO UN SISTEMA TRA LA SOL. TROVATA E LE C.E:

$$\begin{cases} -\sqrt{1+e} < x < \sqrt{1+e} \\ x < -\sqrt{2} \quad \vee \quad x > \sqrt{2} \end{cases}$$



$\rightarrow$ SOL. : $-\sqrt{1+e} < x < -\sqrt{2} \quad \vee \quad \sqrt{2} < x < \sqrt{1+e}$.

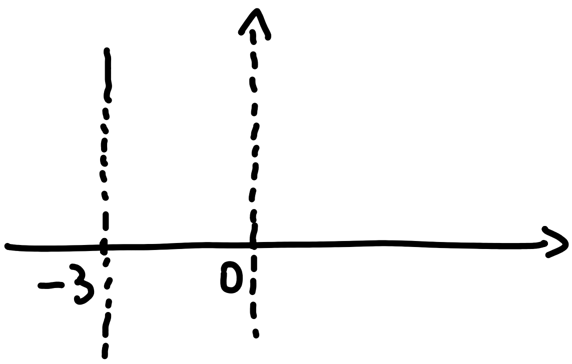
3) DOMINIO DELLE FUNZIONI:

$y = x^3 - 4x \xrightarrow[\text{POLINOM.}]{} D = \mathbb{R}$

$y = \dfrac{x-1}{x^2+3x} \xrightarrow[\text{FRATTA}]{}$ C.E: $x^2+3x \neq 0$ OSSIA

$x \neq 0, \quad x \neq -3$

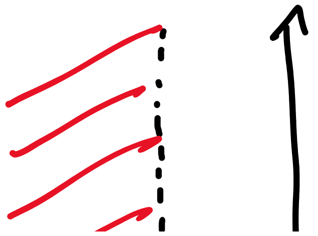
$D = \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$

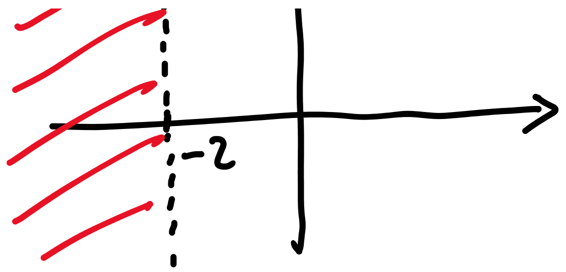


$y = \log(x+2) \xrightarrow[\text{LOGARITM.}]{}$ C.E: $x+2 > 0$

OSSIA $x > -2$

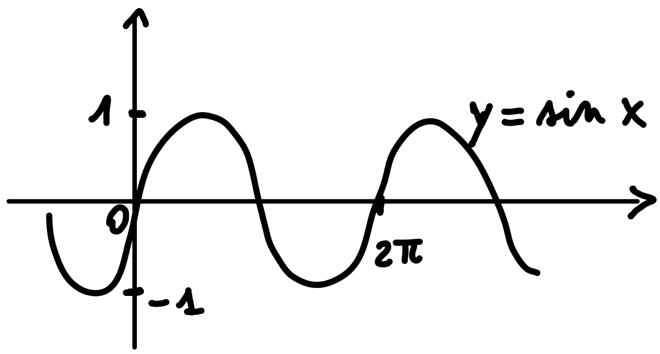
$D = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$

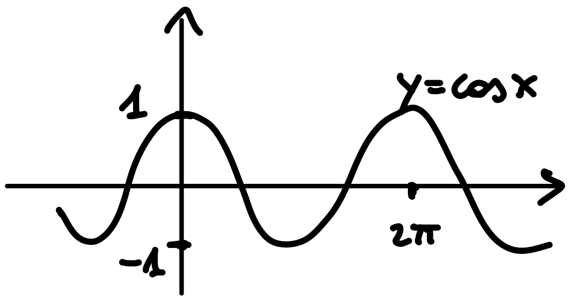




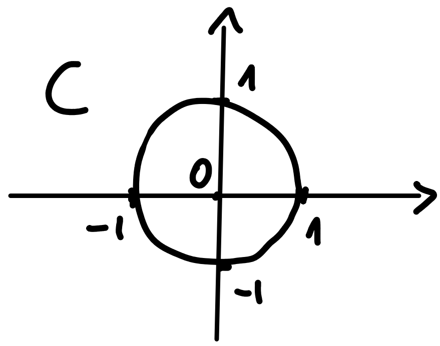
TRIGONOMETRIA: È LO STUDIO DI TRIANGOLI E LA LORO RISOLUZIONE (DETERMINAZIONE DI LUNGHEZZE DEI SUOI LATI E ANGOLI)

IN PARTICOLARE 2 FUNZIONI, ASSOCIATE AGLI ANGOLI PERCORSI LUNGO $C := \{ \text{crf } x^2+y^2=1$ DI CENTRO $(0,0)$ E RAGGIO $1 \}$ SONO IMPORTANTI IN TEORIA DEI SEGNALI E FENOMENI FISICI.



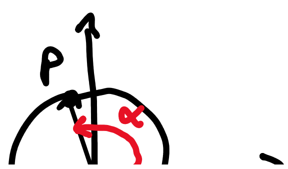


PREMESSA: (ANGOLI IN GRADI VS IN RADIANTI)

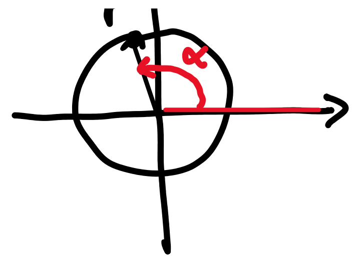


CONSIDERIAMO LA CRF C SCRITTA SOPRA. OGNI PUNTO P SU C $(P \in C)$ IDENTIFICA UN ANGOLO α A PARTIRE DALL'ASSE x POSITIVO IN SENSO ANTIORARIO

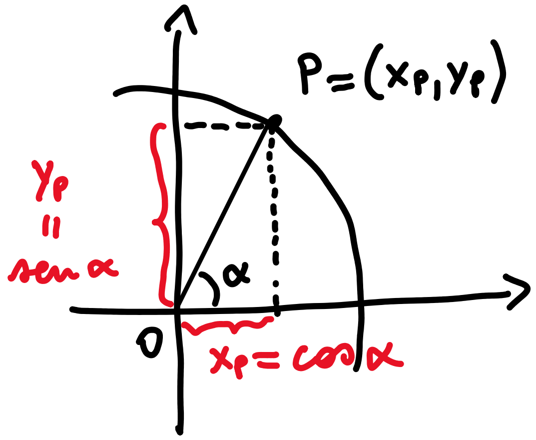
I PUNTI $P \in C$ SODDISFANO L'EQ DI C, OVVERO SE

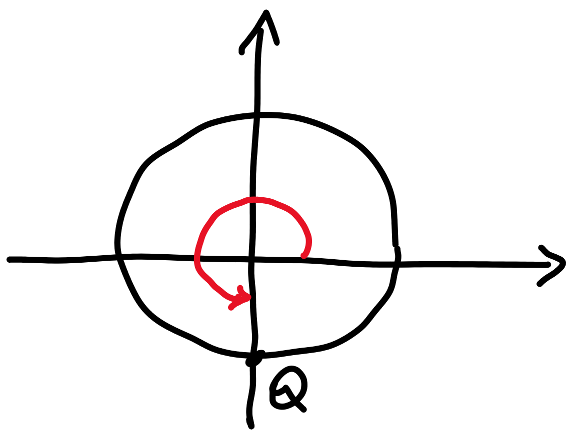


L'EQ DI C_1 OVVERO SE
P HA COORDINATE $P=(x_P, y_P)$
ALLORA $x_P^2 + y_P^2 = 1$



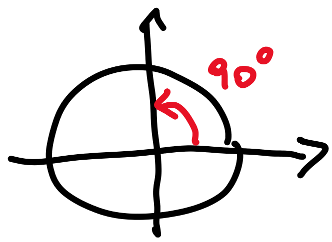
DEFINIAMO α L'ANGOLO IDENTIFICATO DA P,
E CHIAMIAMO $\cos\alpha = x_P$, $\operatorname{sen}\alpha = y_P$





DOMANDE: i) QUANTO VALE α RELATIVO A Q?
$\rightarrow 270°$
ii) $\cos(270°) = ?$ $\rightarrow$ $\cos(270°) = 0$
$\operatorname{sen}(270°) = ?$ $\rightarrow$ $\operatorname{sen}(270°) = -1$
INFATTI $Q = (0,-1)$

PER UNA CRF QUALSIASI, LA SUA LUNGHEZZA VALE $2\pi R$. NEL NOSTRO CASO $R=1$, QUINDI LA LUNGHEZZA DI C É 2π.
QUINDI DIREMO CHE L'ANGOLO α MISURA TOT RADIANTI, PARI ALLA LUNGHEZZA DEL PEZZO DI CRF SOTTESO DA α.



$\alpha = 90°$ SOTTENDE $\frac{1}{4}$ DI CRF,
OSSIA $\alpha_{rad} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$

$\alpha = 360°$ SOTTENDE TUTTA LA CRF, OSSIA
$\alpha_{rad} = 2\pi$

A LIVELLO PRATICO, PER PASSARE DA MISURA IN GRADI A RADIANTI SI FA UNA PROPORZIONE:

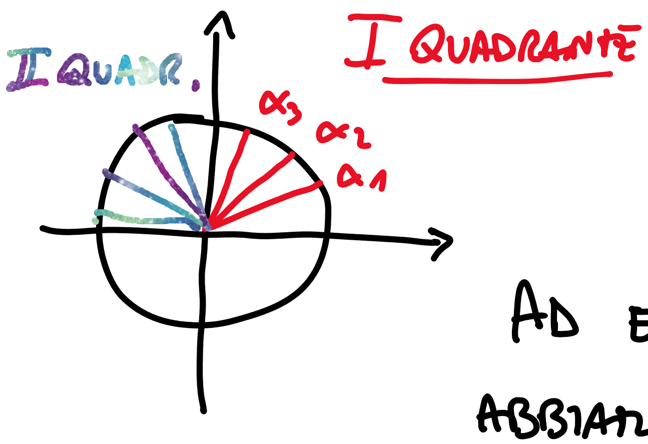
$$\alpha_{GRADI} : \alpha_{RAD} = 360° : 2\pi$$

ES: $\alpha_{GRADI} = 30°$ $\qquad \alpha_{rad} = ?$

$$30° : \alpha_{rad} = 360° : 2\pi$$

$$\alpha_{rad} = \frac{30° \cdot 2\pi}{360°} = \frac{\pi}{6}$$

ES: CONVERTIRE: $60°, 45°, 135°, 270°, 180°,$
$\pi, \frac{2}{3}\pi$;



COME CAMBIANO SEN α E COS α AL VARIARE DI α?

AD ESEMPIO, SE $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
ABBIAMO $\operatorname{sen}\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$

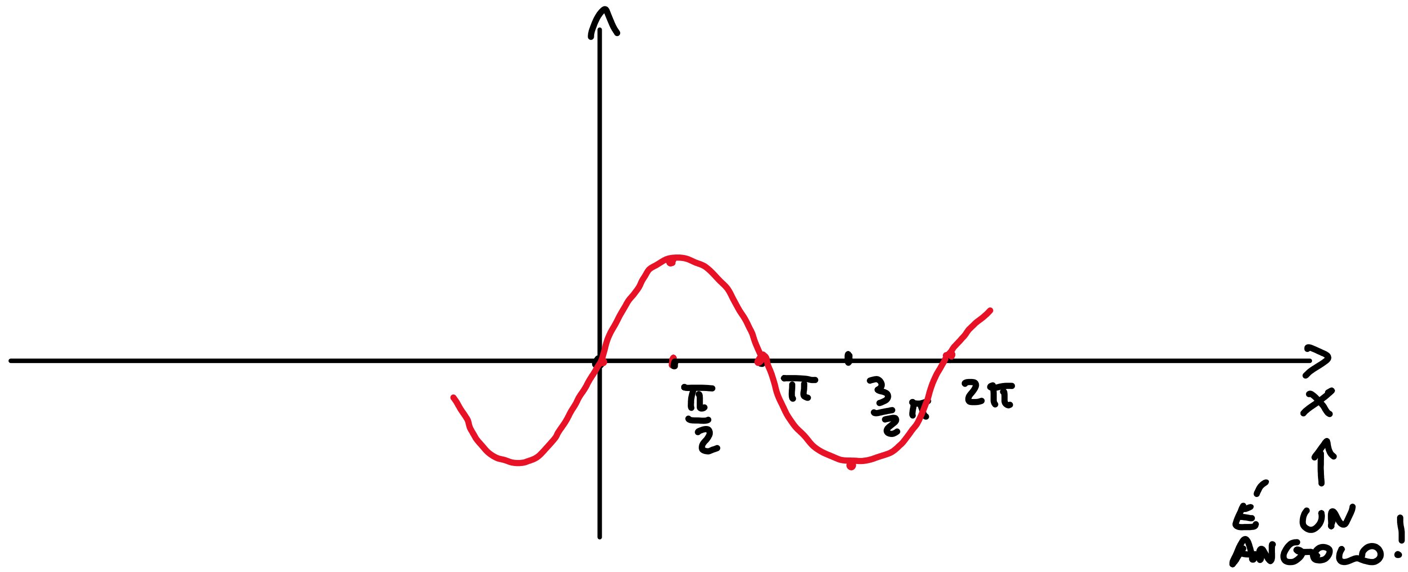
INVECE, SE $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ABBIAMO $\sin\alpha > 0$ MA $\cos\alpha < 0$.

<u>Oss</u>: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ SI HA $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$
$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

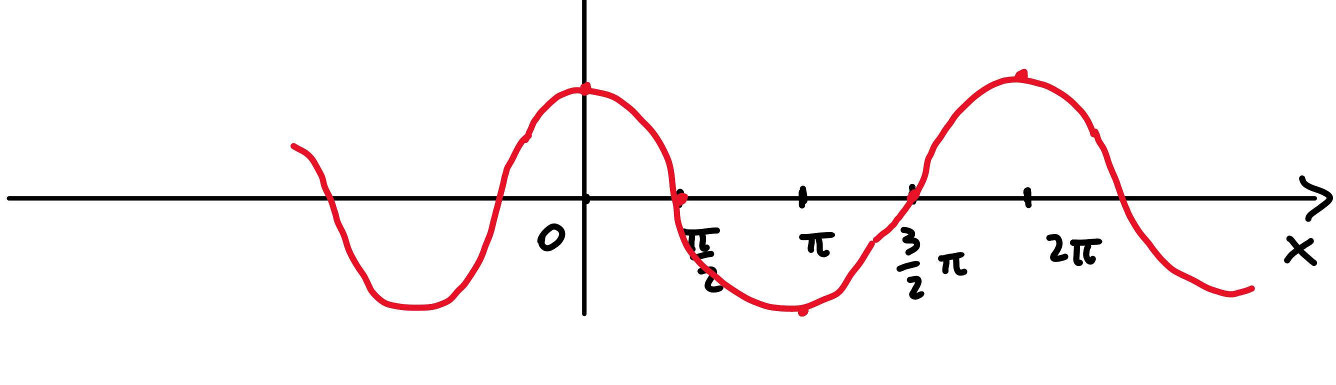
SI VEDE ANCHE DALL'ESPRESSIONE DI C

$$x^2+y^2=1 . \xrightarrow[y=\sin\alpha]{x=\cos\alpha} \boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

VEDIAMO ORA $y = \sin x$: IL GRAFICO É



$y = \cos x$; IL SUO GRAFICO É :

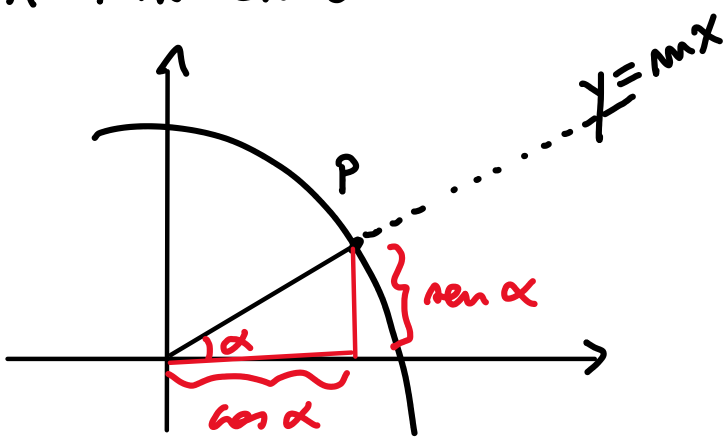


CARATTERISTICHE: i) ENTRAMBE $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ SONO FUNZIONI PERIODICHE, OSSIA IL LORO GRAFICO É LA RIPETIZIONE (INFINITA) DI UN GRAFICO IN UN INTERVALLO DI AMPIEZZA 2π. QUESTO É DOVUTO AL FATTO CHE DOPO 2π HO PERCORSO IN C UN GIRO COMPLETO E RITROVO GLI STESSI PUNTI.

ii) ENTRAMBE STANNO TRA -1, 1 (COME VISTO SOPRA), MENTRE IL LORO DOMINIO É $\mathbb{R}$.

POSSIAMO COSÍ DEFINIRE LA "TANGENTE" DI α

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$



$$m = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$$

DATO CHE $tg\,\alpha$ É DEF. COME UNA FRAZIONE, NON É ACCETTABILE NESSUN ANGOLO α t.c. $\cos\alpha = 0$

$\rightarrow$ LA FUNZIONE $y = tg\,x$ HA DOMINIO DATO DA $D = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\}$

DATO DA $D = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\}$

$\cos x = 0$ SE $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$

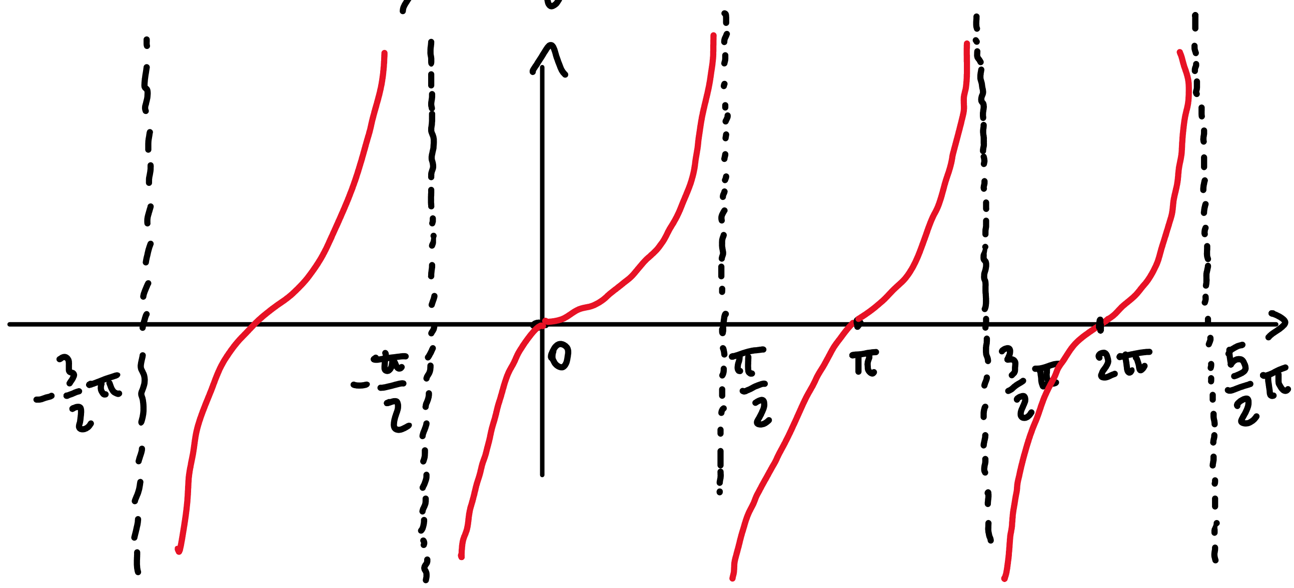
MA DEVO ANCHE RICORDARE TUTTE LE VOLTE CHE INCONTRO TALI PUNTI AVENDO PERCORSO C PIÚ DI UNA VOLTA. CIÓ SI SCRIVE

$$x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

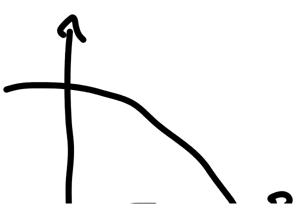
CHE VUOL DIRE "TOLGO $\frac{\pi}{2}$ E TUTTE LE VOLTE CHE AGGIUNGO k GIRI TORNANDO A $\frac{\pi}{2}$ ".

$$x \neq \frac{3}{2}\pi + 2\pi k \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

IL GRAFICO DI $y = tg\, x$ É ALLORA

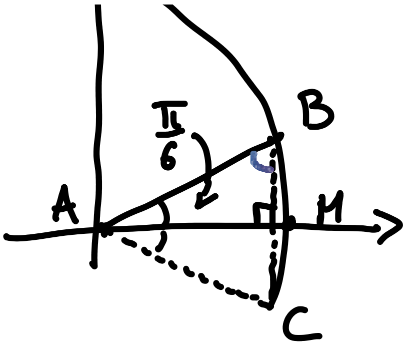


SENO E COSENO DI ANGOLI PARTICOLARI;



$\overset{\triangle}{ABC}$ É TRIANGOLO EQUILATERO

$\overline{AB} = D = 1$



$\overline{AB} = r = 1.$

$M = (1,0)$

DOMANDA: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = ?$

$\cos\frac{\pi}{6} = ?$

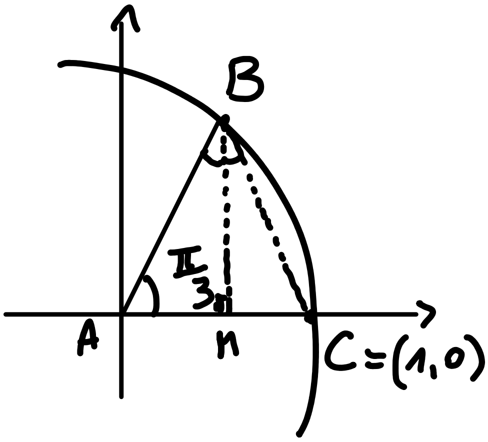
$\overline{BM} = \frac{1}{2}$, MA $\overline{BM} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{1^2 - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

THM PITAGORA

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

STO DICENDO CHE $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$



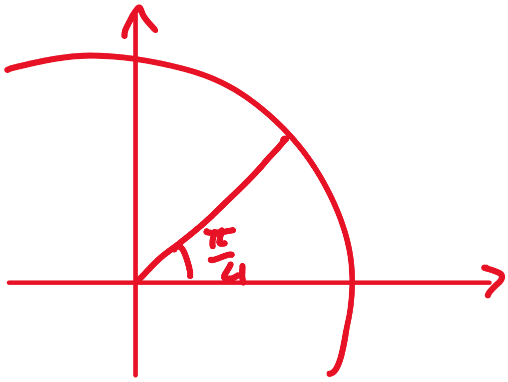
$\overset{\triangle}{ABC}$ É NUOVAM. EQUILATERO.

$\overline{AB} = r = 1 \rightarrow \overline{AM} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ESERCIZIO:

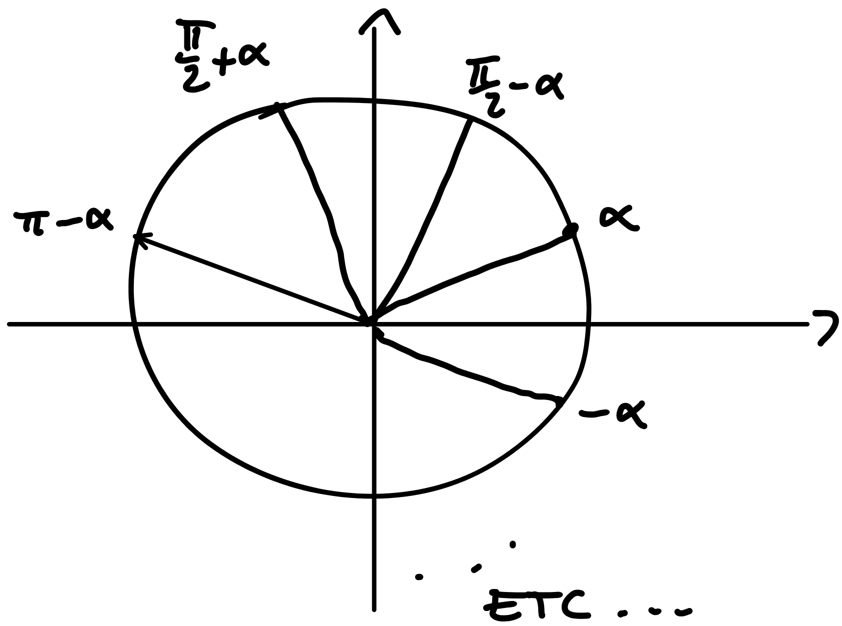


DIMOSTRARE CHE

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

GLI ANGOLI $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ SONO GLI UNICI

CON ESPRESSIONE ANALITICA DI SEN, COS "COMODA". DA ESSI POSSIAMO RICAVARE TANTI ALTRI ANGOLI, DETTI ASSOCIATI, CON CONSIDERAZIONI GEOMETRICHE



ES: CALCOLARE SENO E COSENO DEGLI ANGOLI $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{\pi}{6}$.