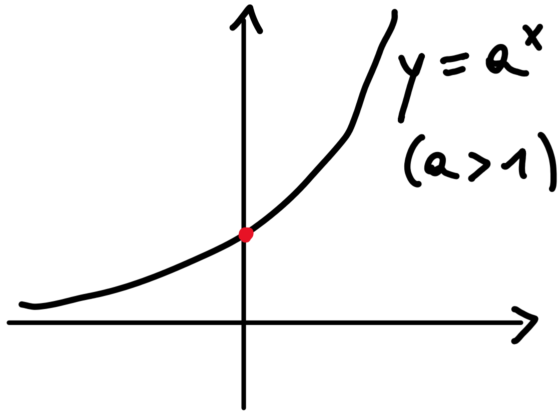
16/11/2023

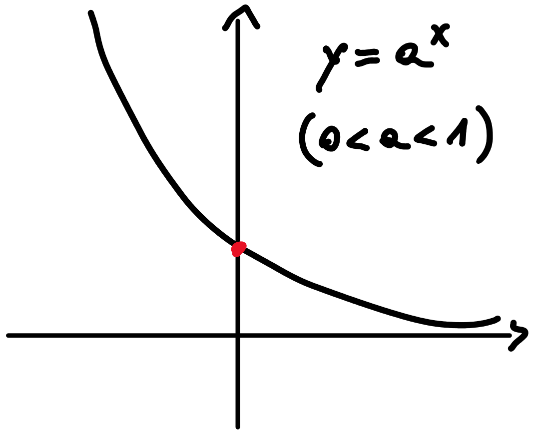
domenica 12 novembre 2023 14:39

(FINE LEZ. SCORSA) ABBIAMO DETTO CHE IL GRAFICO DI $y = a^x$ SI DISTINGUE IN DUE CASI

CASO $a > 1$



CASO $0<a<1$



HANNO 2 COSE IN COMUNE:

i) SONO TUTTI SOPRA L'ASSE X

ii) PASSANO PER $(0,1)$.

ESERCIZIO: DISEGNARE IL GRAFICO DI

1) $y = 2^{x+1}$

2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

LOGARITMI: PROBLEMA: COME RISOLVERE

$$2^{x+3} = 5$$

$$3^{2-x} \leq 2$$

DEF: SI DEFINISCE LOGARITMO IN BASE a DI b IL NUMERO $\log_a b$, CHE É

DI b IL NUMERO $\log_a b$, CHE É L'ESPONENTE DA DARE ALLA BASE a PER OTTENERE L'ARGOMENTO b.

$$x = \log_a b \iff \boxed{a^x = b}$$

Es: • $\log_2 8 = 3 \iff 2^3 = 8$

• $\log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \iff 3^{-1} = \frac{1}{3}$

ESERCIZI: $\log_2 \sqrt[3]{2}$, $\log_7\left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right)$, $\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(4\sqrt{2})$, $\log_3\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{9}\right)^5$

$$\log_2 \sqrt[3]{2} = x \iff 2^x = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\log_7\left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right) = x \iff 7^x = \frac{1}{\sqrt[3]{49}} = \frac{1}{7^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \left(\frac{1}{7}\right)^{2/3} = 7^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(4\sqrt{2}) = \text{PIPPO} \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{PIPPO}} = 4\sqrt{2}$$

$$2^{-\text{PIPPO}} = 2^{2+\frac{1}{2}}$$

OSSIA $-\text{PIPPO} = 2 + \frac{1}{2}$

$$\log_3\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{9}\right)^5 = z \iff 3^z = \left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{9}\right)^5 = \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{\ldots}\right)^5$$

$$\log_3\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{9}\right)^5 = z \iff 3^z = \left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{9}\right)^5 = \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{3^2}\right)^5$$

$$= 3^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\right)5} \implies z = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\right)\cdot 5$$

OSSERVAZIONI: i) $a > 0$ SEMPRE

ii) $\boxed{b > 0 \quad \text{SEMPRE}}$

PROPRIETÁ DEI LOGARITMI:

i) $\log_a b + \log_a c = \log_a b\cdot c$

ii) $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$ ←

iii) $n\cdot\log_a b = \log_a b^n$

NOTA: $\log$ VUOL DIRE $\log_{10}$

$\ln$ (SI LEGGE "LOG. NATURALE") VUOL DIRE $\log_e$ DOVE $e \approx 2{,}71$

Es: 1) $\log_6 9 + \log_6 48 + \log_6 3 = \log_6(9\cdot 48) + \log_6 3$

$= \log_6(9\cdot 48\cdot 3) =$?

(HINT: $9\cdot 48\cdot 3 = 9\cdot 8\cdot 6\cdot 3 = 6^4$)

2) $2\log 5 + 3\log 2 - \log 20 = \log 5^2 + \log 2^3 - \log 20$

2) $2\log 5 + 3\log 2 - \log 20 = \log 5^2 + \log 2^3 - \log 20$

$= \log(5^2 \cdot 2^3) - \log 20 = \log\left(\frac{5^2 \cdot 2^3}{20}\right) = \log 10 = ?$

ESERCIZIO: $2\log 5 - 3\log 25 + \frac{1}{2}\log 625$.

//

EQ. LOGARITMICHE: L'INCOGNITA COMPARE ALMENO UNA VOLTA NELL'ARGOMENTO DI UN LOG.

$\log_2 \sqrt{8} - x^2 = 0$ — <u>NON</u> LOGARITMICA

$3 + \log_5(x-2) = 8$ — LOGARITMICA

DATO CHE L'ARGOMENTO DEV'ESSERE POSITIVO, PER PRIMA COSA SI IMPONGONO LE C.E., POI SI RICONDUCONO AMBO I MEMBRI A LOG. CON STESSA BASE, INFINE SI CONFRONTANO GLI ARGOMENTI.

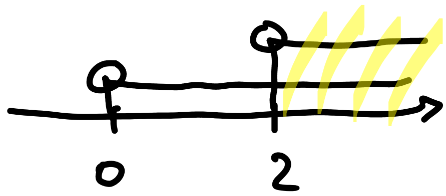
ES: STABILIRE LE C.E. PER LE SEGUENTI

1) $\log x + \log(x-2) = 1$

$$C.E.: \begin{cases} x > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \rightarrow x > 2$$

SISTEMI DI DISEQ.: CERCHIAMO LE SOL. DI CIASCUNA DISEQ. SINGOLARMENTE, POI VEDIAMO DOVE SI INTERSECANO

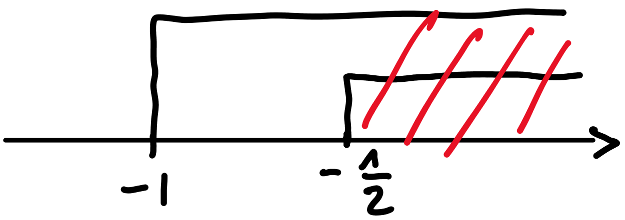
POI VEDIAMO DOVE SI INTERSECANO GRAFICAMENTE :



NÈL NOSTRO CASO DUNQUE C.E: $x > 2$

2) $\log_2(2x+1) - \log(x+1) = 2$

C.E: $\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x > -1 \\ x > -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases}$



$\rightarrow$ C.E: $x > -\frac{1}{2}$.

3) $\log x - \log(4-x^2) = \log(3-x) - \log(x+2)$

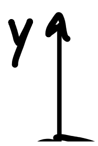
C.E: $\begin{cases} x > 0 \\ 4-x^2 > 0 \\ 3-x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \star \\ x < 3 \\ x > -2 \end{cases} \rightarrow \square$

$\star$: $4-x^2 > 0$ $\rightarrow$ (METODO GRAFICO)

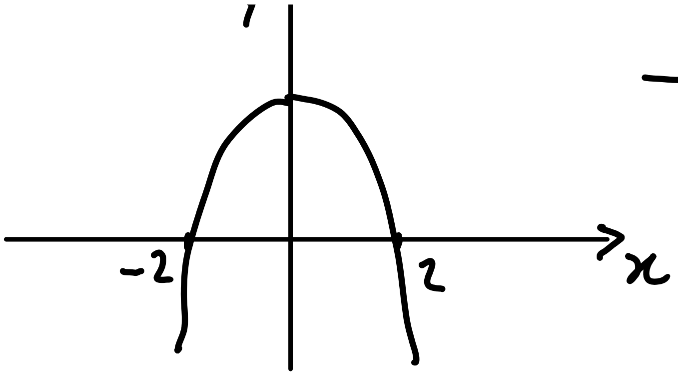
DISEGNAMO LA PARABOLA $y = 4-x^2$ E VEDIAMO QUANDO IL GRAFICO É POSITIVO

$a = -1$ $\rightarrow$ CONCAVITÀ VERSO BASSO

INTERS. CON ASSE x : $x = 2$, $x = -2$



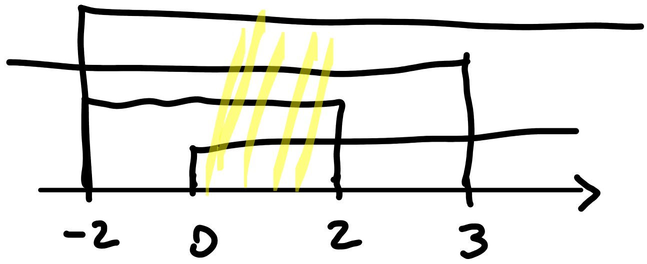
$\rightarrow$ $4-x^2 > 0$ HA



→ $4-x^2>0$ HA

SOL. $-2<x<2$

□ → $\begin{cases} x>0 \\ -2<x<2 \\ x<3 \\ x>-2 \end{cases}$



OSSIA C.E: $0<x<2$

ESEMPI: 1) $\log x + \log(x-2) = 1$. C.E: $x>2$

$$\log[x(x-2)] = 1$$

(DALLA DEF...)

$10^1 = x(x-2)$;

$10 = x^2-2x$;

$x^2-2x-10=0$;

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{44}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 11}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{11}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}(1 \pm \sqrt{11})}{\cancel{2}} = 1 \pm \sqrt{11}$$

$$\log[x(x-2)] = \log 10$$

(STO DICENDO CHE

$1 = \log_{10} 10$.

PIÚ IN GENERALE,

$1 = \log_e e$)

$$[x(x-2)] = 10$$

⋮

$$= \frac{\cancel{2}(1 \pm \sqrt{11})}{\cancel{2}} = 1 \pm \sqrt{11}$$

$x = 1 + \sqrt{11}$ É ACCETTABILE
(PERCHÉ $1+\sqrt{11} > 2$)

$x = 1 - \sqrt{11}$ NON É ACC.
(PERCHÉ $1-\sqrt{11} < 2$)

⋮
ETC. _
⋮

2) $2\log_2 x - \log_2(2x-4) = 0$

C.E: $\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 2 \end{cases} \longrightarrow$ C.E. $x > 2$

$\log_2 x^2 - \log_2(2x-4) = 0$;

$\log_2\left(\frac{x^2}{2x-4}\right) = 0 \iff 2^0 = \frac{x^2}{2x-4}$;

(USANDO LA DEF.)

$1 = \frac{x^2}{2x-4}$;

$1 - \frac{x^2}{2x-4} = 0$;

$\frac{1\cdot(2x-4) - x^2}{2x-4} = 0$;

$\frac{2x-4-x^2}{2x-4} = 0$;

$2x - 4 - x^2 = 0$;

$x^2 - 2x + 4 = 0$;

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2}$

$\longrightarrow$ IMPOSSIBILE.

ESERCIZIO : RISOLVERE $\ln(1-x) + \ln(-2x) = 2$.

ESERCIZIO: RISOLVERE $\ln(1-x)+\ln(-2x)=2$.

DISEQ. LOGARITMICHE: ANALOGAMENTE AL CASO ESPONENZIALE, PRIMA GIUNGIAMO AD UNA DISEQ. DOVE AMBO I MEMBRI COMPAIONO LOG. CON LA STESSA BASE, POI (CHIAMANDO a TALE BASE)

- SE $a>1$ $\longrightarrow$ IL VERSO DELLA DISEQ. TRA GLI ARGOMENTI RESTA INVARIATO;
- SE $0<a<1$ $\longrightarrow$ IL VERSO DELLA DISEQ. TRA GLI ARGOMENTI VIENE INVERTITO.

ESEMPI: 1) $\log(x-1)+\log(x+3)<\log(2-x)$

C.E: $\begin{cases} x-1>0 \\ x+3>0 \\ 2-x>0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ ESERCIZIO

$$\log(x-1)(x+3)<\log(2-x)$$

$\hookrightarrow$ $(x-1)(x+3)<(2-x)$ $\longrightarrow$ ESERCIZIO

$\left[1<x<\frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right]$

2) $\log_2 x^3 \leq 2\log_2 x$

C.E: $\begin{cases} x^3>0 \\ x>0 \end{cases}$

OSSIA $x>0$

$$\log_2 x^3 \leq \log_2 x^2$$

$x^3 \leq x^2 \longrightarrow$ ESERCIZIO

ESERCIZI: 1) $\log_4 \frac{x+2}{x-2} \leq 1$

2) $\ln(\ln(x^2-1)) < 0$

3) $e^{2\ln x} \geqslant 3$

4) $\log_x (2-x) \leq 1$

/ / /

<u>DOMINIO</u> DI UNA FUNZIONE. É INTESO COME IL PIÚ GRANDE INSIEME SU CUI ESSA É DEFINITA. NEL NOSTRO CORSO, CI RIFERIREMO A FUNZIONI SU $\mathbb{R}$ E DOVREMO RIMUOVERE TUTTI I VALORI DI EVENTUALI C.E. DOVUTE ALLA LORO ESPRESSIONE.

Es: 1) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ FUNZIONE FRATTA,

POICHÉ C.E. $x+2 \neq 0$, OSSIA $x \neq -2$, IL DOMINIO DI f É

$$\text{dom}(f) = D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

2) $y = x^2 + 3x$ FUNZIONE POLINOMIALE, QUINDI NON CI SONO C.E. PARTICOLARI, PERCIÓ $D = \mathbb{R}$

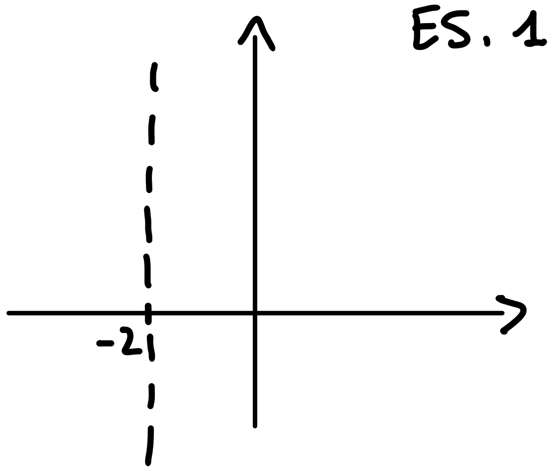
$\lceil \forall x \in \mathbb{R} \rfloor$

3) $y = \log_2(3x^2 - 1)$ FUNZIONE LOGARITMICA, HA C.E.: $3x^2 - 1 > 0$ OSSIA $x < -\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\vee$ $x > \sqrt{\frac{1}{3}}$, QUINDI

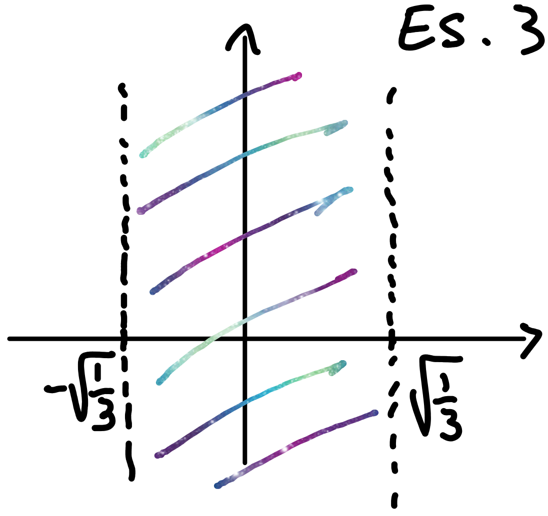
$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x < -\sqrt{\tfrac{1}{3}} \ \vee \ x > \sqrt{\tfrac{1}{3}} \right\}$$

NELLA PRATICA, DATO CHE ABBIAMO L'OBIETTIVO DI DISEGNARE IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE QUALSIASI, SI DISEGNA IL PIANO CARTESIANO RIMUOVENDO LE PARTI IN CUI SI È FUORI DAL DOMINIO.

ES. 1



ES. 3



ESERCIZI: DET. IL DOMINIO (E RAPPRESENTARLO GRAFICAMENTE) PER LE SEGUENTI FUNZIONI

1) $y = x^3 - 4x$

2) $y = \dfrac{x-1}{x^2+3x}$

3) $y = \dfrac{x+2}{x^2-2x-8}$

4) $y = \sqrt{x}$

3) $y = \dfrac{[illegible]}{x^2-2x-8}$ 4) $y = \sqrt{x}$

5) $y = \log(x+2)$ 6) $y = \ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

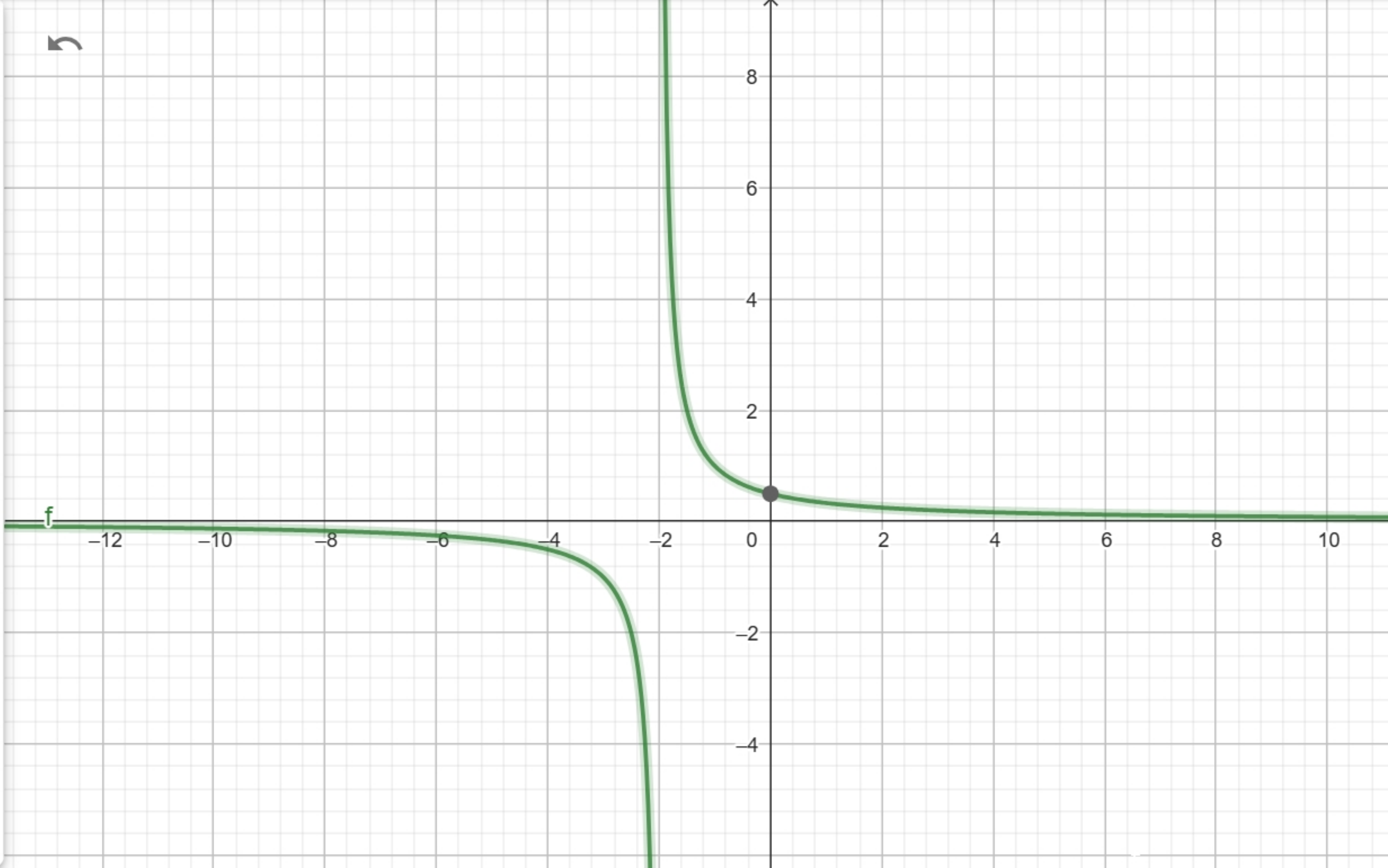
7) $y = 3^{\frac{x-2}{x+2}}$ 8) $y = (1-2x)\,e^{-2x}$

INOLTRE, CERCARE E RAPPRESENTARE IL GRAFICO DI $y = \log_a x$ NEI 2 CASI $a>1$ E $0<a<1$.

$f\ :\ y = \dfrac{1}{x+2}$

Inserimento...

[redacted]



$f : y = \log_2(3x^2 - 1)$

$eq1 : x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$eq2 : x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Inserimento...

[redacted]