10/11/2023

giovedì 9 novembre 2023 16:32

ES. LEZ. SCORSA:

3) $$\frac{1}{x-2^{-1}} > 2^{-2} - \frac{1}{1-2^{-1}x}$$

C.E: $x \neq \frac{1}{2}$

$x \neq 2$

$$\frac{1}{x-2^{-1}} - 2^{-2} + \frac{1}{1-2^{-1}x} > 0$$

$$\frac{1}{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}x} > 0$$

$$\frac{1}{\frac{2x-1}{2}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{2-x}{2}} > 0$$

CAPISCI PERCHÉ?

$$\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{4} + \frac{2}{2-x} > 0$$

$$\frac{2\cdot 4(2-x) - 1(2x-1)(2-x) + 2\cdot 4(2x-1)}{4(2x-1)(2-x)} > 0$$

$$\frac{16-8x-(4x-2x^2-2+x)+16x-8}{4(2x-1)(2-x)} > 0$$

$$\frac{16-8x-4x+2x^2+2-x+16x-8}{4(2x-1)(2-x)} > 0$$

$$\frac{2x^2+3x+10}{4(2x-1)(2-x)} > 0$$

$$\frac{2x^2+3x+10}{4(2x-1)(2-x)} > 0$$

N: $2x^2+3x+10 > 0$

D: $4(2x-1)(2-x) > 0$

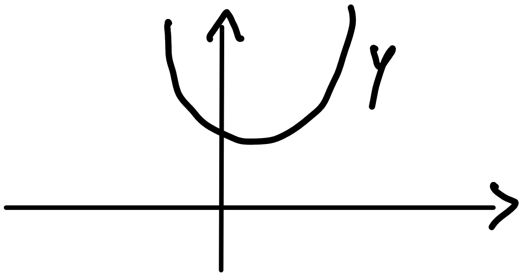
INIZIO DAL NUM: $2x^2+3x+10 > 0$

VOGLIO DISEGNARE $y = 2x^2+3x+10$

- CONCAVITÀ VERSO L'ALTO $(a = 2)$
- INTERS. ASSE X:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-80}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{-71}}{4} \rightarrow \text{IMPOSS.}$$

$\Rightarrow$ IL GRAFICO DI $y = 2x^2+3x+10$ È



$\Rightarrow$ $2x^2+3x+10 > 0$ QUANDO IL GRAFICO DI $y = 2x^2+3x+10$ STA SOPRA L'ASSE X, OSSIA $\forall x \in \mathbb{R}$.

PASSIAMO AL DENOM.: $4(2x-1)(2-x) > 0$

$\hookrightarrow$ STUDIO DEL SEGNO:

F_1: $4 > 0 \rightarrow$ SEMPRE

F_2: $2x-1 > 0 \rightarrow 2x > 1 \rightarrow x > \frac{1}{2}$

F_3: $2-x > 0 \rightarrow -x > -2 \rightarrow x < 2$

	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$x > 2$	
	$+$	$+$	$+$	(F_1)
	$-$	$+$	$+$	(F_2)
	$+$	$+$	$-$	(F_3)
	$-$	$+$	$\rightarrow$	

OSSIA DENOM. > 0 QUANDO $\frac{1}{2} < x < 2$.

RIASSUMENDO: $N > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$D > 0 \quad \frac{1}{2} < x < 2$

LO STUDIO DEL SEGNO DEL RAPPORTO $\frac{N}{D}$:

	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$x > 2$	
	$+$	$+$	$+$	(N)
	$-$	$+$	$-$	(D)
	$-$	$+$	$-$	

$\rightarrow$ SOL.: $\frac{1}{2} < x < 2$.

POTENZE E FUNZIONI ESPONENZIALI.

CHIARAMENTE UN'EQ. (DISEQ.) SI DICE **ESPONENZIALE** SE L'INCOGNITA COMPARE COME ESPONENTE DI ALMENO UNA POTENZA:

$$2^3 - x = x^2 \qquad\qquad 4^{x+1} - 5 = 0$$

NON ESPONENZIALE — ESPONENZIALE

RIPASSO SULLE PROPRIETÁ DELLE POTENZE:

1) $a^m \cdot a^l = a^{m+l}$

2) $a^m : a^l = \frac{a^m}{a^l} = a^{m-l}$

3) $(a^m)^l = a^{m \cdot l}$

4) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

5) $a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m = (a:b)^m$

ES: $\left[(7^4)^3 \cdot 7^5\right] : \left[7^7 \cdot 7^2\right] =$

$= \left[7^{12} \cdot 7^5\right] : \left[7^9\right] = \left[7^{17}\right] : 7^9 = \boxed{7^8}$

SI POSSONO USARE COME ESPONENTI PIÚ IN GENERALE NUMERI IN $\mathbb{Q}$ (RAZIONALI):

i) SE L'ESPONENTE É UNA FRAZIONE $\frac{a}{b} \Longrightarrow$

- ELEVO ALLA a
- FACCIO LA RADICE b-ESIMA

ES: $2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4}$; $\sqrt[7]{5^2} = 5^{\frac{2}{7}}$

ii) SE L'ESPONENTE É NEGATIVO $-n \Longrightarrow$

- FACCIO IL RECIPROCO DELLA BASE E LA ELEVO ALLA n

$$\left[\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{7}\right)^{2} = \frac{9}{49} \quad , \quad 2^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]$$

NOTA: CONSIDEREREMO <u>SEMPRE</u> POTENZE AVENTI BASE > 0 !

$$\cancel{(-2)^{\frac{1}{2}}}$$

ES: SCRIVIAMO IN UN'UNICA POTENZA L'ESPRESS:

$$\left[3^{-2x+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2 \cdot \frac{x}{7}}\right]^3 =$$

$$= \left[3^{-2x+1} \cdot 3^{+\frac{2x}{7}}\right]^3 = \left[3^{-2x+1+\frac{2x}{7}}\right]^3 =$$

$$= 3^{3\cdot\left(-2x+1+\frac{2x}{7}\right)} = 3^{-6x+3+\frac{6x}{7}} = 3^{3-\frac{36}{7}x}$$

EQ. ESPONENZIALI: SI RISOLVONO PORTANDO AMBO I MEMBRI AD ESSERE POTENZE CON STESSA BASE, POI SI EGUAGLIANO GLI ESPONENTI.

ES: 1) $3^x = 3^4 \implies x = 4$

2) $2^{2x} - 8 = 0$; $2^{2x} = 2^3 \implies 2x = 3$

OSSIA LA SOL. E' $x = \frac{3}{2}$

3) $\frac{9}{3^x} = 81$

4) $\frac{3^x}{3^{x+1}} = \sqrt{3}$

5) $25 \cdot 5^{2x-1} = \frac{1}{5} \cdot 5^{1-x}$

6) $4^x \sqrt{2^x} = 8^{x-1}$

7) $\frac{\sqrt[3]{2^{x-1}}}{\sqrt{4^{x+1}}} = \sqrt{8}$

8) $e^x \cdot e^{-2x+3} = \sqrt{\frac{1}{e}}$

SVOLGIMENTO:

3) $\frac{3^2}{3^x} = 3^4$; $3^{2-x} = 3^4$;

$\rightarrow$ $2 - x = 4$ OSSIA $x = -2$

4) $\frac{3^x}{3^{x+1}} = 3^{\frac{1}{2}}$; $3^{x-x-1} = 3^{\frac{1}{2}}$; $\cancel{x}-\cancel{x}-1 = \frac{1}{2}$

OSSIA $-1 = \frac{1}{2}$ IMPOSS.

5) $5^2 \cdot 5^{2x-1} = 5^{-1} \cdot 5^{1-x}$; $5^{2+2x-1} = 5^{-1+1-x}$;

$\rightarrow$ $2 + 2x - 1 = \cancel{-1}+\cancel{1} - x$ OSSIA $x = -\frac{1}{3}$

6) $2^{2x} \cdot 2^{\frac{x}{2}} = 2^{3(x-1)}$; $2^{2x+\frac{x}{2}} = 2^{3x-3}$

$\rightarrow$ $2x + \frac{x}{2} = 3x - 3$; $2x + \frac{x}{2} - 3x = -3$;

$\frac{4x + x - 6x}{2} = -3$; $-\frac{1}{2}x = -3$ $\rightarrow$ $x = 6$

7) $\frac{2^{\frac{x-1}{3}}}{2^{\frac{\cancel{2}(x+1)}{\cancel{2}}}} = 2^{\frac{3}{2}}$; $2^{\frac{x-1}{3} - (x+1)} = 2^{\frac{3}{2}}$ $\rightarrow$

$\frac{x-1}{3} - x - 1 = \frac{3}{2}$; $\frac{2(x-1) - 6x - 6}{6} = \frac{9}{6}$;

$$\frac{x-1}{3} - x - 1 = \frac{3}{2} \; ; \quad \frac{2(x-1) - 6x - 6}{6} = \frac{9}{6} \; ;$$

$$2x - 2 - 6x - 6 = 9 \; ; \quad -4x = 17 \; ; \quad x = -\frac{17}{4}$$

VERIFICATELO !

8) $\lceil e \approx 2{,}71$ É CHIAMATA COSTANTE DI NEPERO. $\rfloor$

$$e^{x+(-2x+3)} = e^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow x - 2x + 3 = -\frac{1}{2} \; ;$$

$$-x = -\frac{1}{2} - 3 \; ; \quad x = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

9) $e^{x^2+5x-6} = 1 \longrightarrow e^{x^2+5x-6} = e^0 \longrightarrow$

$x^2 + 5x - 6 = 0$ $\longrightarrow$ ESERCIZIO: TROVARNE LE SOLUZIONI.

DISEQ. ESP.: ANCHE QUI CI RICONDUCIAMO AD AVERE AMBO I MEMBRI UNA POTENZA CON STESSA BASE a, POI:

i) SE $a > 1$ ALLORA PASSO ALLA DISUG. TRA GLI ESPONENTI CON STESSO VERSO;

ii) SE $0 < a < 1$ ALLORA PASSO ALLA DISUG. TRA GLI ESPONENTI CAMBIANDO VERSO.

$2^x > 2^3 \longrightarrow$ APPLICO (i)

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^3 \longrightarrow$ APPLICO (ii)

Es: 1) $2^x - 4^{\frac{1}{x}} \geq 0$ C.E: $x \neq 0$

$2^x \geq 4^{\frac{1}{x}}$

$2^x \geq 2^{\frac{2}{x}} \xrightarrow[(a=2)]{(i)} x \geq \frac{2}{x}$

(ESERCIZIO: RISOLVERE $x \geq \frac{2}{x}$)

2) $2^x \cdot \sqrt{2^{2x}} < 8$; $2^x \cdot 2^{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}} < 2^3$;

$2^{x+x} < 2^3 \xrightarrow{(i)} 2x < 3$; $x < \frac{3}{2}$

3) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - \frac{16}{9} > 0$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} > \left(\frac{4}{3}\right)^2$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} > \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \xrightarrow[(a=\frac{3}{4}<1)]{(ii)} 2x < -2$

OSSIA $x < -1$.

4) $e^{x^2-4x} \geq \frac{1}{e^3}$; $e^{x^2-4x} \geq e^{-3} \xrightarrow[(a=e>1)]{(i)}$

$x^2 - 4x \geq -3$ ESERCIZIO: FINIRLO.

ESERCIZI: 1) INVENTA: a) UN'EQ. ESPONENZIALE IMPOSSIBILE

b) UN'EQ. ESPONENZIALE CON SOL. $S=\{0\}$

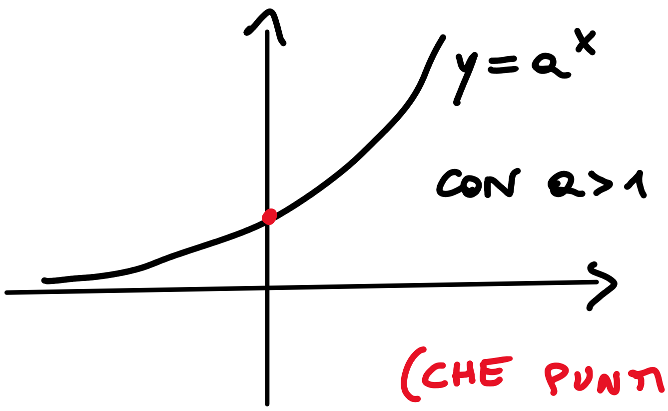
c) UN'EQ. ESPONENZIALE CON SOL. $S=\{0,1\}$

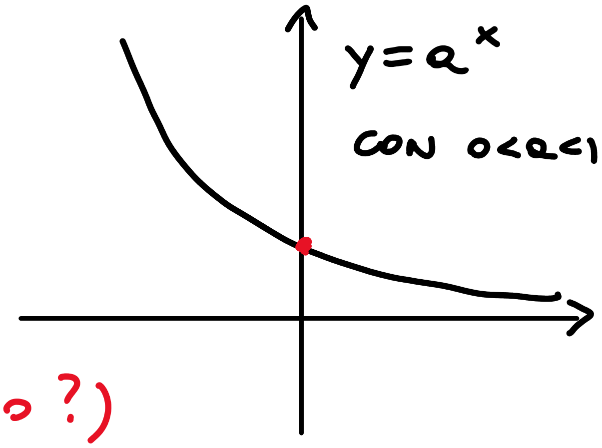
2) RISOLVI $x^3 \cdot 2^x - 8x^3 - 4x \cdot 2^x + 32x = 0$
(BONUS)

NOTA: LE FUNZIONI ESPONENZIALI, OSSIA DEL TIPO $y=a^x$ HANNO DUE CARATTERISTICHE IMPORTANTI:

1) SONO SEMPRE POSITIVE (OSSIA IL LORO GRAFICO É TUTTO SOPRA L'ASSE x)

2) IL GRAFICO DEL CASO $a>1$ É CRESCENTE, QUELLO DEL CASO $0<a<1$ E' DECRESCENTE.





(CHE PUNTI SONO?)