ESERCIZI LEZ. SCORSA:

1) PERMUTAZIONI DI $\{1,2,3,4,5\}$

$\rightarrow P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

2) TARGHE DELLE AUTO

$\hookrightarrow$ DISPOSIZ. CON RIPETIZIONI

- PRIME 2 LETTERE: $D^{\text{ripetiz.}}_{26,2} = 26^2$
- I 3 NUMERI: $D^{\text{ripetiz.}}_{10,3} = 10^3$
- ULTIME 2 LETTERE: $D^{\text{ripetiz.}}_{26,2} = 26^2$

$\Rightarrow$ TOTALE: $26^2 \cdot 10^3 \cdot 26^2$ TARGHE.

---

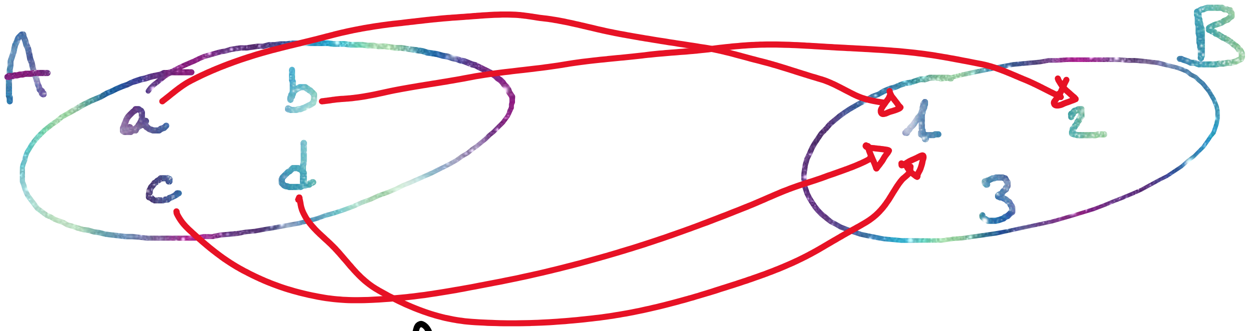
§ 2. EQUAZIONI E DISEQ. FONDAMENTALI

FUNZIONI: UNA FUNZIONE A LIVELLO INTUITIVO È COME UN APPARECCHIO INPUT-OUTPUT: PRENDE UN ELEMENTO IN INGRESSO E GLI ASSOCIA UN UNICO IN USCITA

ES: IL TERMOMETRO ASSOCIA AD OGNI ISTANTE DI TEMPO UNA TEMPERATURA IN UN

LUOGO FISSATO (NON ESISTONO ISTANTI DI TEMPO "SENZA TEMPERATURA")

ES: $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{1, 2, 3\}$



SE CHIAMIAMO f QUESTA FUNZIONE, SCRIVEREMO

$$f : A \longrightarrow B$$

(SI LEGGE "f VA DA A A B")

$f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$, $f(d) = 1$

ES: $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$n \longmapsto 3n$$

[AD ESEMPIO $g(0) = 3 \cdot 0 = 0$ $g(17) = 51$

$g(1) = 3$ ETC....]

DEF: UNA FUNZIONE TRA 2 INSIEMI A, B É UNA LEGGE CHE ASSOCIA AD OGNI ELEMENTO $x \in A$ UN UNICO ELEMENTO $f(x) \in B$.

i) L'INSIEME A É DETTO DOMINIO (DI f)

i) L'INSIEME A É DETTO DOMINIO (DI f)
ii) L'INSIEME B É DETTO CODOMINIO (DI f)

ES: $h: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$
$\quad p \longmapsto p$

$\left[h(+25) = 25, \quad h\left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{7}{3}, \quad \text{ETC.} \dots \right]$

h É CHIAMATA FUNZIONE IDENTITÁ (O F. IDENTICA), TALVOLTA DENOTATA id.

RICORDA: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

NUMERI NATURALI. DI SOLITO GLI ELEMENTI DI $\mathbb{N}$ SONO INDICATI CON n.

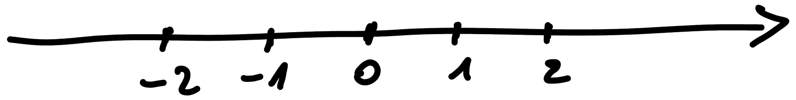
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

NUMERI INTERI, DI SOLITO GLI ELEMENTI DI $\mathbb{Z}$ SONO INDICATI CON n, a, b

$\mathbb{Q} = \{\text{NUMERI RAZIONALI}\} = \{p = \frac{a}{b} \text{ CON } a, b \in \mathbb{Z}\}$

I SUOI ELEMENTI SONO DI SOLITO INDICATI CON p, q, x

$\mathbb{R}$:



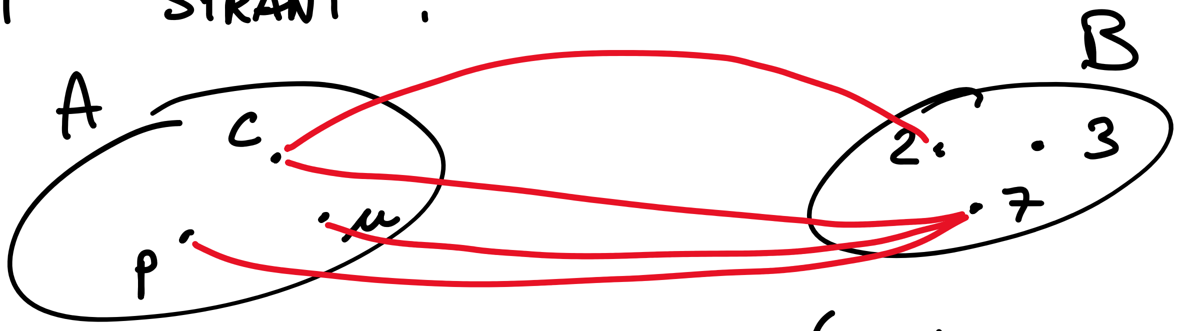
NUMERI REALI. I SUOI ELEMENTI SONO SPESSO INDICATI CON x.

1

SPESSO INDICATI CON x.

ESEMPI "STRANI":

1)



NON È UNA FUNZIONE (ALL'ELEM. $c \in A$ SONO ASSOCIATI 2 VALORI)

2) $$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \pm\sqrt{x}$$

NON È UNA FUNZIONE (VEDI ES. 1)

3) $$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto \frac{n}{3}$$

NON HA SENSO! (AD ESEMPIO L'IMMAGINE DI 2 NON STA IN $\mathbb{N}$)

4)

NON È UNA FUNZIONE PERCHÉ $♡ \in D$ NON HA NESSUNA IMMAGINE!

//

LE PRINCIPALI FUNZIONI CHE VEDREMO SONO:

- POLINOMIALI: $$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

• POLINOMIALI : $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$\left(f(x) = x^2 + 2, \quad f(x) = x + 3 - x^3, \quad \text{ETC.} \dots \right)$$

• PARTICOLARI POLINOMI : LE CONICHE (POLINOMI DI GRADO 2)

• ESPONENZIALI (BASE > 0) : $f(x) = 2^{x+3}$,

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}, \dots$$

• LOGARITMICHE : $h(x) = \log_2(x+2)$

$$z(x) = \log(x^2 - 1)$$

$$u(x) = \ln(3 - x), \dots$$

• IRRAZIONALI : $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$, $h(x) = \sqrt{3 + x^2}$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \dots$$

• GONIOMETRICHE : $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$

$$f(x) = \operatorname{tg} x,$$

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{3}, \dots$$

• COMBINAZIONI DI QUESTE FUNZIONI.

NOTA : SPESSO INVECE DI $f(x)$ SCRIVEREMO

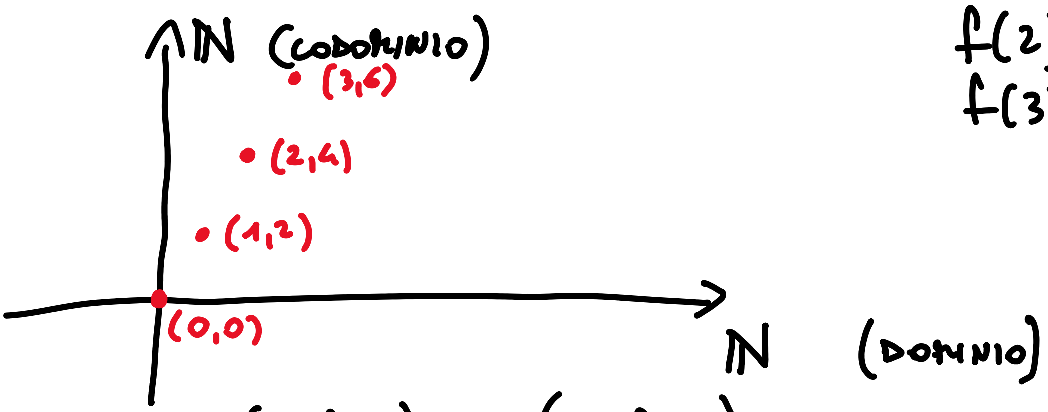
y.

<u>GRAFICO</u>: DATA UNA FUNZIONE f, IL SUO GRAFICO É L'INSIEME DEI PUNTI $(x, f(x)) = (x, y)$, OSSIA IL "DISEGNO" DI TUTTI I VALORI CHE ASSUME f, PUNTO PER PUNTO.

ES: $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$n \longmapsto 2n$

$f(0) = 0$
$f(1) = 2$
$f(2) = 4$
$f(3) = 6$
$\vdots$

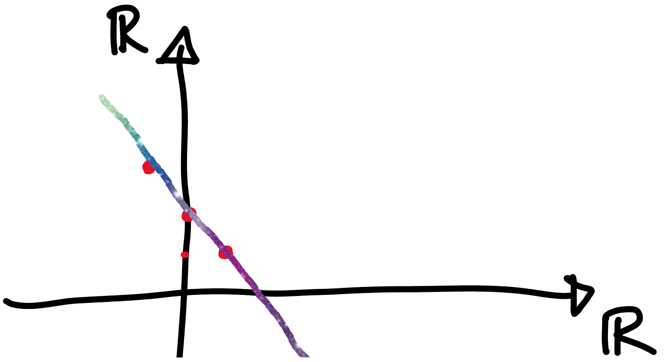


$(0, f(0))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$, ...
$\parallel$
$(0,0)$, $(1,2)$, $(2,4)$, ...

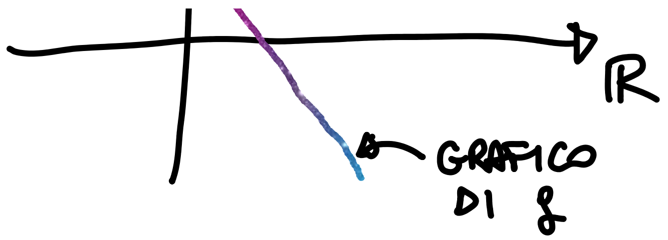
ES: $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2 - x$

$g(0) = 2 - 0 = 2$
$g(1) = 2 - 1 = 1$
$g(-1) = 2 - (-1) = 3$
$\vdots$

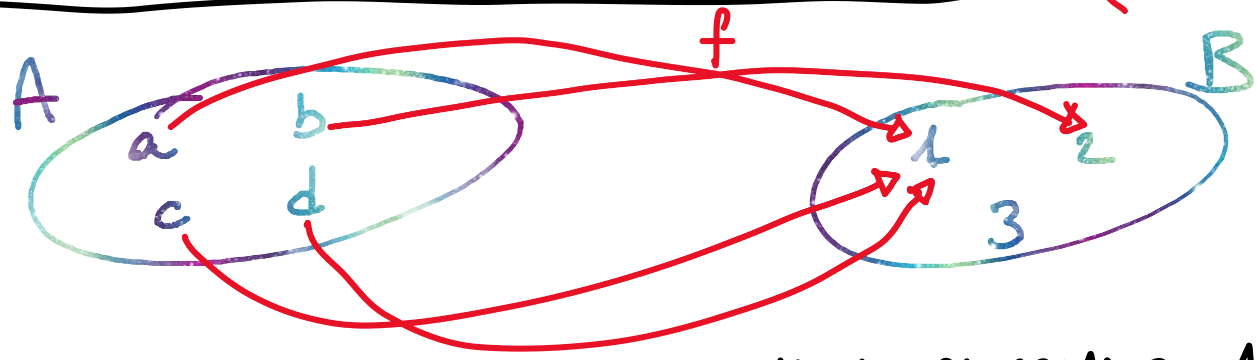


OSSIA STANNO NEL GRAFICO I PUNTI
$(0, 2)$, $(1, 1)$,



PUNTI $(0,2)$, $(1,1)$, $(-1,3)$

IL PROBLEMA DELLA FUNZIONE INVERSA. (☆)



$f(a)=1$, $f(c)=1$
$f(b)=2$, $f(d)=1$

NON RIUSCIAMO A "TORNARE INDIETRO"

STIAMO CERCANDO $g: B \longrightarrow A$ CHE RIPORTI GLI ELEMENTI AL LORO PUNTO DI PARTENZA.

DEF: DATE DUE FUNZIONI $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow A$, SI DEFINISCONO LE FUNZIONI COMPOSTE:

$$g \circ f : A \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto g(f(x))$$

$$f \circ g : B \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(g(x))$$

ES: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$, $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+2$

ES: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+2$

$$(g \circ f): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(f(x)) = g(3x) = 3x+2$$

$$(f \circ g): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(g(x)) = f(x+2) = 3(x+2)$$

ES: $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \frac{1}{2}$

$$\underline{(u \circ h)(x)} = u(h(x)) = u\left(x - \tfrac{1}{2}\right) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2} = \underline{x}$$

$$\underline{(h \circ u)(x)} = h(u(x)) = h\left(x + \tfrac{1}{2}\right) = \left(x + \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2} = \underline{x}$$

$\Rightarrow$ $u \circ h = id$ (FUNZIONE IDENTITÁ)
$h \circ u = id$ (" ")

DEF: SE 2 FUNZIONI f, g SONO TALI CHE
$$f \circ g = id \quad , \quad g \circ f = id$$
ALLORA g (o f) É DETTA FUNZIONE INVERSA DI f (DI g) E SCRIVEREMO $g = f^{-1}$ (RISP. $f = g^{-1}$)

IV

QUANDO POSSO DIRE CHE UNA FUNZIONE AMMETTE UN'INVERSA? NELL'ESEMPIO (☆)

AMMETTE UN' INVERSA ? NELL' ESEMPIO (★) LA FUNZIONE f SICURAMENTE NON LO ERA.

DEF: SIA $f : A \longrightarrow B$ UNA FUNZIONE.
f SI DICE SURIETTIVA SE

$$\forall x \in B \, , \; \exists t \in A \; : \; f(t) = x$$

(TUTTI GLI ELEMENTI DEL CODOMINIO SONO RAGGIUNTI DA ALMENO UN ELEMENTO DEL DOMINIO)

DEF: SIA $f : A \longrightarrow B$ UNA FUNZIONE.
f SI DICE INIETTIVA SE

$\forall s, t \in A$ DIVERSI $\Longrightarrow f(s) \neq f(t)$

ESERCIZIO: QUESTA PROPOSIZIONE PUÓ ESSERE SCRITTA COME $p \Longrightarrow q$, VEDERE LA TAVOLA DI VERITÁ DI

1) $(p \Rightarrow q) \Longrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$

2) $((\neg q) \Rightarrow (\neg p)) \Longrightarrow (p \Rightarrow q)$

DEF: SE f É SURIETTIVA + INIETTIVA SI DICE ESSERE BIIETTIVA

ES: 1) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \longmapsto n$ É INIETTIVA MA NON SURIETTIVA

2) $f = id : A \longrightarrow A$ É BIIETTIVA

2) $f = id : A \longrightarrow A$ É BIIETTIVA

3) ESERCIZIO: DIRE SE É INIETTIVA / SURIETTIVA / NESSUNA DELLE 2

LA FUNZIONE $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{cases} f(n) = 0 & \text{SE } n \text{ É PARI} \\ f(n) = \frac{n+1}{2} & \text{SE } n \text{ É DISPARI} \end{cases}$$