ESERCIZIO LEZ. SCORSA: TAVOLA DI VERITÁ DI $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V
F	V	F	V
V	F	V	V
F	F	V	V

RICORDA CHE $q \Rightarrow p$ HA STESSA TAVOLA DI $(\neg q) \vee p$

NOTA: IN CASI COME QUESTO, DOVE UNA PROPOSIZIONE É SEMPRE VERA, ESSA É CHIAMATA TAUTOLOGIA.

AVVISO: NO LEZIONE MER 15/11.

§ 1. STATISTICA E PROBABILITÁ.

DEF: DATO UN NUMERO $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ SI DEFINISCE FATTORIALE IL PRODOTTO

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

ES: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$0! = 1$ (PER CONVENZIONE)

DEF: DATI DUE NUMERI $n, k \in \mathbb{N}$, SI DEFINISCE IL COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \quad (\text{QUINDI } k \leq n)$$

ES: $\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = 3$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1}{2\cdot 1\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 10$$

IL CALCOLO COMBINATORIO SI OCCUPA DI ANALIZZARE I MODI DI RIORDINARE / RAGGRUPPARE GLI ELEMENTI DI UN INSIEME FINITO DI OGGETTI.

PERMUTAZIONE: UNA PERMUTAZIONE DI UN INSIEME A E' UNA SEQUENZA ORDINATA DEI SUOI ELEMENTI PRESI UN'UNICA VOLTA.

ES: $A = \{a, b, c\}$ QUALI SONO LE SEQUENZE ORDINATE DI ELEMENTI DI A?

abc, acb, bac, bca,

cab, cba

IN GENERALE, SE $\#(A) = n$, LE

PERMUTAZIONI DI A SONO

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

POSSIBILI SCELTE NELLA 1ª POSIZIONE

POSSIBILI SCELTE NELLA 2ª POSIZIONE

. . . . .

ES: PERMUTAZIONI DELLE LETTERE $\{M, A, R, E\}$.

MARE, MRAE, MREA, MAER,

MEAR, MERA, AMRE, AMER,

ARME, AREM, AEMR, AERM,

RMAE, RMEA, RAME, RAEM,

REMA, REAM, EMAR, EMRA,

ERMA, ERAM, EAMR, EARM

IN TUTTO DOVREBBERO ESSERE

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

ESERCIZIO: QUANTE SONO LE PERM. DI

$A = \{a, b, c, d, e\}$?

DISPOSIZIONI (SENZA RIPETIZIONI): UNA DISPOSIZIONE DI UN INSIEME A É UNA SEQUENZA ORDINATA DI SUOI ELEMENTI, MA NON NECESSARIAMENTE TUTTI.

ES: SEQUENZE DI 2 LETTERE PRESE DA

$$B = \{b, x, u\}$$

$$bx, \ bu, \ xb, \ xu, \ ub, \ ux$$

IN GENERALE, SE $\#(A) = n$ E VOGLIO DISPOSIZIONI DI k ELEMENTI, OTTENGO

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

POSSIBILI DISPOSIZIONI.

ES: DISPONIAMO COPPIE DI ELEMENTI DI

$$A = \{\heartsuit, \star, \square\}$$

$$\heartsuit\star, \ \heartsuit\square, \ \star\heartsuit, \ \star\square, \ \square\heartsuit, \ \square\star$$

(NOTA CHE É IDENTICO AL PRECEDENTE ES.)

QUINDI AVEVO, PER OGNI COPPIA:

3 POSSIBILITÁ PER IL PRIMO ELEMENTO

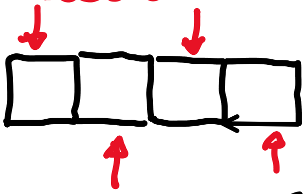
3-1 POSSIBILITÁ PER IL SECONDO ELEM.

ESERCIZIO: CALCOLARE $D_{5,3}$

DISPOSIZIONI (CON RIPETIZIONI): A DIFFERENZA DELLE DISPOSIZIONI SEMPLICI, AMMETTIAMO CHE NELLA SEQUENZA ALCUNI ELEMENTI POSSANO RIPETERSI.

POSSO METTERE 21 SCELTE

ES: PAROLE DI 4 LETTERE



$\Rightarrow 21^4$ PAROLE

CON ALFABETO ITALIANO (21 CARATTERI).

IN GENERALE POSSO COMPORRE

$$D^{\text{ripetizioni}}_{m,k} = m^k$$

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONI.

COMBINAZIONI (SENZA RIPETIZIONI): UNA COMBINAZIONE É UNA SEQUENZA DI ELEMENTI DI A IN CUI NON CONTA L'ORDINE.

ES: $A = \{1, 2, 3, a, b, c\}$, $k = 2$

(COMBINAZIONI DI 2 ELEMENTI PRESI DA A)

1-2, 1-3, 1-a, 1-b, 1-c

1-2, 1-3, 1-a, 1-b, 1-c
2-3, 2-a, 2-b, 2-c
3-a, 3-b, 3-c
a-b, a-c
b-c

IN GENERALE, $C_{m,k} = \binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}$

NELL'ES. SOPRA, $m=6$, $k=2$ E AVEVO

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!\,2!} = \frac{6!}{4!\,2!} =$$

$$= \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}\cdot 2\cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$$

COMBINAZIONI

ES: SI VUOLE FORMARE UNA COMMISSIONE FATTA DA MATEMATICI E BIOLOGI. VOGLIAMO 2 MATEMATICI E 3 BIOLOGI. POSSO SCEGLIERE TRA 6 MATEMATICI E 5 BIOLOGI. QUANTE POSSIBILITÁ HO?

DATO CHE L'ORDINE NON CONTA, USIAMO LE COMBINAZIONI.

- TUTTI I MODI POSSIBILI DI SCEGLIERE

I 2 MATEMATICI SONO

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!\,2!} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

- TUTTI I MODI POSSIBILI DI SCEGLIERE

I 3 BIOLOGI SONO

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

SOLUZIONE: LE COMMISSIONI POSSIBILI SONO

$15 \cdot 10 = 150$.

<u>COMBINAZIONI (CON RIPETIZIONI)</u>: SONO COMBINAZIONI IN CUI AMMETTIAMO DI POTER RIPETERE GLI ELEMENTI DI A.

IN GENERALE LE COMBINAZIONI CON RIPETIZ. DI k ELEMENTI DI UN INSIEME A (FORMATO DA n ELEMENTI) SONO

$$C^{\text{ripetizioni}}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

DOMANDA: SE FACCIO DISPOSIZIONI / COMBINAZ. CON RIPETIZIONI, POSSO PRENDERE

$k > n$?

ES: $A = \{1, 2\}$, $k = 3$, DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONI

111, 112, 121, 122,

211, 212, 221, 222,

OSSIA 2^3 POSSIBILITA' (n^k).

ES: $A = \{1, 2\}$, $k = 3$, COMBINAZ. CON RIPETIZIONI

112 = 121 = 211

111

122

222

OSSIA 4 COMB. CON RIPETIZIONI.

LA FORMULA SCRITTA PRIMA NE PREVEDEVA

$$\binom{n+k-1}{k}$$ CON $n = 2$, $k = 3$

OSSIA

$$\binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} =$$

$$\Big(\quad 3 \quad \Big) = \Big(3 \Big) = \frac{\quad}{(4-3)!\,3!}$$

$$= \frac{4!}{1!\,3!} = 4$$

RISPOSTA: SÍ, QUANDO AMMETTIAMO RIPETIZIONI POSSO AVERE $k > n$.

ESERCIZI: (PAG. 189, 198 DI [MONTALDO])

1) LE TARGHE AUTOMOBILISTICHE SONO COMPOSTE NELL'ORDINE DA:
   a) 2 LETTERE
   b) 3 NUMERI
   c) 2 LETTERE

(CON ALFABETO DA 26 CARATTERI)

QUANTE AUTOMOBILI POSSONO ESSERE IMMATRICOLATE?

2) MARCO HA 5 MONETE DEL VALORE DI $\{1, 10, 20, 50, 100\}$ EURO RISPETTIVAMENTE. QUANTE SOMME DIVERSE (NON NULLE) DI DENARO PUÓ FORMARE?

SCRIVERE ESPLICITAMENTE TUTTE QUESTE SOMME.