Esame scritto Geometria 1 - 20/01/2022

[Soluzioni]

Esercizio 1

a) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f) \iff f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0)$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + k x_3,\ k x_1 - x_2 - k x_4)$$

$$\iff \begin{cases} x_2 + k x_3 = 0 \\ k x_1 - x_2 - k x_4 = 0 \end{cases}$$

Procediamo a trovare le soluzioni di tale sistema lineare omogeneo. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k & 0 \\ k & -1 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

$rg(A) \geq 1$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & -1 \end{pmatrix} = -k \neq 0 \iff k \neq 0$$

Quindi $k \neq 0 \implies rg(A) = 2$.

Se $k = 0$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $rg(A) = 1$ dato che tutte le colonne, tranne la seconda, sono nulle.

Se $k \neq 0$ il sistema è equivalente a $\begin{cases} x_2 = -ks \\ kx_1 - x_2 = kt \end{cases}$

$x_3 = s, \ x_4 = t$

DM

da cui $kx_1 = x_2 + kt \underset{x_2 = -ks}{=} -ks + kt \xrightarrow[k\neq 0]{} x_1 = -s + t$

Pertanto

$$\ker(f) = V_A = \{(-s+t, -ks, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(-s, -ks, s, 0) + (t, 0, 0, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{s \cdot (-1, -k, 1, 0) + t\,(1, 0, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\}$$
$$= L((-1, -k, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$$

lin. indipendenti

Una base di $\ker(f)$ è dunque

$$\{(-1, -k, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$$

- Se $k=0$ il sistema è equivalente a

$$\{ x_2 = 0 \qquad x_1 = s, \quad x_3 = r, \quad x_4 = t$$

Pertanto

$$\ker(f) = \{(s, 0, r, t) : s, r, t \in \mathbb{R}\}$$
$$= L((1,0,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$$

poiché sono lin. indipendenti (sono vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$) si ha che una base di $\ker(f)$ è

$$\{(1,0,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

b) $\mathrm{Im}(g) = L(g(1), g(x), g(x^2))$

$$= L\big(h\cdot(1,1,0,0) + 1\cdot(0,1,1,0) + 0\cdot(0,0,0,1) + -1\cdot(0,0,-1,0),\ 0\cdot(1,1,0,0) + h\cdot(0,1,1,0) + +1\cdot(0,0,0,1) + 0\cdot(0,0,-1,0),\ h\cdot(1,1,0,0) + 2\cdot(0,1,1,0) + 1\,(0,0,0,1) - 1\cdot(0,0,-1,0)\big)$$

$$= L\big((h, h+1, 1+1, 0), (0, h, h, 1), (h, h+2, 2+1, 1)\big)$$

$$= L\big((h, h+1, 2, 0), (0, h, h, 1), (h, h+2, 3, 1)\big)$$

Per stabilire il massimo numero di vettori lin. indipendenti tra tali generatori troviamo il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} h & 0 & h \\ h+1 & h & h+2 \\ 2 & h & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} 2 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Longrightarrow$ rango $\geq 2 \quad \forall h \in \mathbb{R}$.

Consideriamo gli orlati.

$$\det\begin{pmatrix} h & 0 & h \\ 2 & h & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{I COL.} \to \text{I} - \text{III}}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & h \\ -1 & h & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = h \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & h \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= h(-1+h)$$

quindi $\quad h \neq 0 \wedge h \neq 1 \Longrightarrow \quad$ rango $= 3$

Per $h=0$ consideriamo l'altro orlato

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3-4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango} = 3$$

Per $h=1$ considero l'altro orlato

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{rango} = 2$$

Pertanto una base di $\operatorname{Im}(g)$ è:

- per $h \neq 1$: $\{(h, h+1, 2, 0), (0, h, h, 1), (h, h+2, 3, 1)\}$
- per $h = 1$: $\{(1, 2, 2, 0), (0, 1, 1, 1)\}$

c) Per $k=2$ e $h=0$ abbiamo

$$B=\{\underset{v_1}{(-1,-2,1,0)},\ \underset{v_2}{(1,0,0,1)}\}$$ base di $\ker(f)$

$$B'=\{\underset{v'_1}{(0,1,2,0)},\ \underset{v'_2}{(0,0,0,1)},\ \underset{v'_3}{(0,2,3,1)}\}$$ base di $\mathrm{Im}(f)$

Se la somma $\ker(f)+\mathrm{Im}(f)$ fosse diretta, avremmo

$$\dim(\ker(f)\oplus \mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker f)+\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2+3 = 5$$

il che è assurdo dato che $\ker(f)\oplus \mathrm{Im} f \subseteq \mathbb{R}^4$

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ kx_2 + (1-k)x_3 + x_4 = 0 \\ kx_1 + (1-k)x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1-k & 1 \\ k & 0 & 1-k & 1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1-k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1-k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \implies rg(A) \geq 2.$$

Considero l'orlato $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} = k \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix} = k(1-k)$$

Se $k \neq 0 \wedge k \neq 1 \implies rg(A) = 3. = rg(A|B)$

Controllo l'orlato rimanente quando $k=0$ oppure $k=1$.

$\underline{k=0}$ $\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-k & 1 \\ k & 1-k & 1 \end{pmatrix} \overset{k=0}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$k=1$ $\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-k & 1 \\ k & 1-k & 1 \end{pmatrix} \overset{k=1}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$

Pertanto per $k=0 \vee k=1$ $rg(A)=2$.

Controlliamo $rg(A|B)$ (per $k=0$ oppure $k=1$), considerando l'orlato del medesimo minore considerato prima con la colonna B:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} k=0 & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \\ k=1 & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Ne deduciamo che: per $k=0$ $rg(A|B)=3 \neq 2 = rg(A)$

per $k=1$ $rg(A|B)=2 = rg(A)$

Conclusione

Per $k \neq 0 \wedge k \neq 1$ il sistema è compatibile ed ammette ∞^1 soluzioni.

Per $k=0$ il sistema è incompatibile

Per $k=1$ il sistema è compatibile ed ammette ∞^2 soluzioni

Troviamo le soluzioni nei casi in cui il sistema è compatibile

CASO $k \neq 0 \wedge k \neq 1$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_4 = 1 \\ \qquad k x_2 \quad + x_4 = (k-1)t \\ k x_1 \qquad\qquad + x_4 = 1 + (k-1)t \end{cases}$$

$$x_3 = t$$

Per costruzione tale sistema è di Cramer e si ha dunque

$$x_1 = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ (k-1)t & k & 1 \\ 1+(k-1)t & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{k(1-k)}\, k \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+(k-1)t & 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - 1 - (k-1)t}{k(1-k)} = \frac{1}{k} t$$

Dalla prima equazione $x_4 = 1 - \frac{1}{k} t$ e quindi, dalla seconda,

$$k x_2 = (k-1)t - 1 + \frac{1}{k} t \implies$$

$$x_2 = \frac{k-1}{k} t - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} t$$

L'insieme delle soluzioni è:

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{k} t,\ \frac{k-1}{k} t - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} t,\ t,\ 1 - \frac{1}{k} t \right) : \begin{array}{l} k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

ZM

CASO $k = 1$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_4 = -s \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_3 = t \end{array}$$

da cui $x_1 = 1 - (-s) = 1 + s$.

L'insieme delle soluzioni è

$$S = \{(1+s, s, t, -s) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

ESERCIZIO 3

Intanto una base di V è $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v_1 \qquad\qquad v_2 \qquad\qquad v_3$

Troviamo $A = M_{BB}(f)$.

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_1$$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = v_1 + v_2$$

$$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = v_1 + v_2 - 3v_3$$

Allora $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(3+\lambda)$$

Vi sono due autovalori: $\lambda = 1 \quad m_a(1) = 2$

$\lambda = -3 \quad m_a(-3) = 1$

Trovo gli autospazi.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in V(1) \iff f\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} x+y+z & y+z \\ y+z & -3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y+z = x \\ y+z = y \\ -3z = z \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{array}{l} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{array}$$

Allora

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V \ : \ t \in \mathbb{R} \right\} = L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = L(v_1)$$

$\Rightarrow \ m_g(1) = \dim V(1) = 1 \neq m_a(1)$

$\Rightarrow$ f non è diagonalizzabile