Analisi Matematica II

prof. Antonio Greco

Alcune domande rivolte agli studenti in sede d'esame
Appelli dal 22-01-2013 al 20-02-2014

Equazioni differenziali

1. Spiegare che cosa si intende per *"equazione differenziale lineare"*.

2. Spiegare che cosa si intende per *"forma normale"* di un'equazione differenziale.

3. Illustrare il teorema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale.

4. Illustrare la struttura dello spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + b\,y' + c\,y = f(t)$, dove b e c sono costanti assegnate e $f(t)$ è una data funzione continua.

5. Trovare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2 - y \\ y(1) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = 2 - y \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy' = y \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = y' \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + 3y' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = -4y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + 4y = -8\cos^2 t \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

6. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni:

$$y' = y^2 \qquad y' = 1 + y^2 \qquad y' = |y|$$

$$y'' + y = 1 \qquad y'' + 4y = 0$$

$$y'' + \omega^2 y = 0, \text{ essendo } \omega > 0$$

$$y'' = y' \qquad y'' + y' = 0 \qquad y'' + \tfrac{1}{2} y' + y = 0$$

7. Spiegare che cosa si intende per *"determinante wronskiano"*.

8. Fra tutte le soluzioni dell'equazione $y'' = y'$, determinare quelle il cui grafico passa per l'origine.

Rappresentazione parametrica delle curve

9. Tracciare il sostegno della curva data da

$$\begin{cases} x(t) = t^4 \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$

10. Trovare la velocità della curva data da

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$$

11. Trovare la lunghezza dell'arco della curva precedente descritto al variare di t nell'intervallo $[0, 1]$.

Limiti e continuità

12. Dare la definizione di limite per una funzione $f(x, y)$ di due variabili reali.

13. Dare la definizione di *continuità* per una funzione $f(x, y)$ di due variabili reali.

14. Stabilire se la funzione $f(x, y) = x^2 - x + y^2$ è continua.

15. Stabilire se le seguenti funzioni sono prolungabili con continuità nell'origine:

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

16. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Calcolo differenziale

17. Spiegare che cosa sono le derivate parziali.

18. Stabilire se l'esistenza delle derivate parziali implica la continuità della funzione considerata.

19. Stabilire se la continuità di una funzione implica l'esistenza delle sue derivate parziali.

20. Spiegare in che cosa consiste la proprietà di differenziabilità di una funzione.

21. Stabilire se l'esistenza delle derivate parziali implica la differenziabilità.

22. Stabilire se le funzioni

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } xy = 0; \\ 1 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y = 0; \\ \frac{x^2\,y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } x^2+y^2 > 0 \end{cases}$$

possiedono le derivate parziali prime nel punto $(0,0)$.

23. Stabilire se le funzioni precedenti sono differenziabili nel punto $(0,0)$.

24. Dimostrare che la differenziabilità implica la continuità.

25. Trovare i punti del piano xy nei quali la funzione $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ è differenziabile.

26. Spiegare che cos'è e che informazioni dà il gradiente.

27. Illustrare la relazione che intercorre fra gradiente e linee di livello.

28. Illustrare lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di una funzione $f(x,y)$.

Grafici di funzioni

29. Trovare il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

30. Trovare le linee di livello della funzione $f(x,y) = xy$.

31. Definire il piano tangente al grafico di una funzione $f(x,y)$.

32. Determinare il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x^2+y^2$ nel punto $(1,1)$.

33. Determinare il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x^2+y^2$ nel punto $(0,0)$.

34. Determinare il piano tangente al grafico della funzione
$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$
nel punto $(0,0)$.

35. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:
$$\begin{aligned}
&f(x,y) = x^2 + y^2 \\
&f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\
&f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \\
&f(x,y) = h - \frac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2}, \text{ essendo } h, r > 0
\end{aligned}$$

Massimi e minimi

36. Trovare gli eventuali punti critici della funzione $f(x,y) = x^2 - x + y^2$.

37. Determinare gli eventuali punti di massimo assoluto, gli eventuali punti di minimo assoluto, gli eventuali punti di massimo relativo, e gli eventuali punti di minimo relativo delle seguenti funzioni:
$$f(x,y) = xy \qquad f(x,y) = \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x,y) = x^2 + y^4$$
$$f(x,y) = x^3 - y \qquad f(x,y) = x^3 - y^2 \qquad f(x,y) = x^2 - x + y^2$$
$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Integrali multipli

38. Trovare l'area della superficie costituita dal grafico della funzione $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

39. Calcolare i seguenti integrali doppi:

$$\iint_{B_{300}(0,0)} xy\,dx\,dy$$

$$\iint_{B_1(0,0)} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

$$\iint_{B_1(0,0)} \frac{x^2\,y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy$$

$$\iint_{B_1(0,0)} \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$$

$$\iint_{B_1(0,0)} \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx\,dy$$

$$\iint_{B_r(0,0)} \left(h - \frac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx\,dy, \text{ essendo } h, r > 0$$

$$\iint_{B_2(0,0)} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$$

$$\iint_Q (x^2 + y^2)\,dx\,dy, \text{ essendo } Q = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\iint_Q (x^2 - x + y^2)\,dx\,dy, \text{ essendo } Q \text{ come sopra}$$

40. Illustrare l'interpretazione geometrica dell'integrale doppio.

41. Trovare il volume del cono delimitato dal piano xy e dal grafico della funzione $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

42. Trovare il volume del solido delimitato dal piano $z = 1$ e dal grafico della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$.

43. Trovare il volume del sottografico della funzione
$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

44. Trovare il volume del solido Ω delimitato dalla superficie generata dalla rotazione del grafico della funzione $y = \operatorname{sen} x$ intorno all'asse x.

45. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_{B_3(0,0)} (x+y)\,dx\,dy\,dz$$

46. Verificare che il seguente limite:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint_{B_1(0,0)\setminus B_\varepsilon(0,0)} \frac{|x|}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

ha un valore finito, e poi calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_{B_1(0,0)\setminus B_\varepsilon(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Campi conservativi

47. Spiegare che cos'è un campo vettoriale.

48. Spiegare che cosa si intende per "campo conservativo".

49. Fare un esempio di campo conservativo.

50. Spiegare che cos'è un dominio *semplicemente connesso*.

51. Spiegare che cosa si intende per "campo irrotazionale".

52. Spiegare la relazione che sussiste fra campi conservativi e campi irrotazionali.

53. Dire se esiste un campo irrotazionale e non conservativo.

54. Scrivere le componenti di un campo vettoriale irrotazionale e non conservativo.

55. Stabilire se il campo $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ è conservativo, e, in caso affermativo, trovare un potenziale.

56. Stabilire se il campo $\hat{\boldsymbol{k}}$ è conservativo, e, in caso affermativo, trovare un potenziale.

57. Stabilire se il campo $\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$ è conservativo, e, in caso affermativo, trovare un potenziale.

58. Stabilire se il campo $\boldsymbol{F} = x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ è conservativo, e calcolare l'integrale curvilineo di seconda specie

$$\int_{+\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

dove $+\gamma$ è un segmento orientato uscente dall'origine.

59. Stabilire se il campo $\boldsymbol{F} = -x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} - z\,\hat{\boldsymbol{k}}$ è conservativo, e, in caso affermativo, trovare un potenziale.

60. Stabilire se il campo $\boldsymbol{F}$ dato da

$$\boldsymbol{F} = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

è irrotazionale.

61. Stabilire se il campo precedente è conservativo.

62. Determinare un potenziale locale per il suddetto campo.

63. Calcolare il rotore del campo $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ dato da

$$\boldsymbol{B}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{(-y, x, 0)}{x^2+y^2}$$

dove μ_0 è una costante positiva.

64. Verificare che il campo $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ indicato sopra non è conservativo.

Teorema di Stokes

65. Scrivere le formule di Gauss-Green.

66. Dimostrare le formule di Gauss-Green.

67. Trovare il flusso del campo $\boldsymbol{F} = x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\hat{\boldsymbol{k}}$ uscente dalla superficie sferica centrata nell'origine e di raggio 1.

68. Trovare il flusso del suddetto campo uscente dalla superficie sferica centrata nell'origine e di raggio 2.

69. Enunciare il teorema di Stokes.

70. Trovare il rotore del campo $\hat{\boldsymbol{k}}$.

71. Applicare il teorema di Stokes al caso in cui la superficie considerata è il grafico della funzione $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, ed il campo è $\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{k}}$.

72. Applicare il teorema di Stokes al caso in cui la superficie considerata è il grafico della funzione $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, ed il campo è $\boldsymbol{F} = -y\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + x\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$.

73. Trovare il gradiente ∇f della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

e poi il flusso del campo ∇f uscente dalla superficie sferica centrata nell'origine e di raggio 1.

74. Calcolare il flusso del versore $\hat{\boldsymbol{k}}$ attraverso la superficie grafico della funzione $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

75. Calcolare il flusso del versore $\hat{\boldsymbol{k}}$ attraverso la superficie grafico della funzione $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

76. Trovare un campo di vettori normali $\boldsymbol{n}$ alla superfice $\partial\Omega$ bordo del sottografico Ω della funzione $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

77. Trovare un campo di vettori normali $\boldsymbol{n}$ alla superfice data da

$$\begin{cases} x(\varphi, \vartheta) = R \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta \\ y(\varphi, \vartheta) = R \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta \\ z(\varphi, \vartheta) = R \cos\varphi \end{cases}$$

dove R è una costante positiva.

78. Trovare un campo di vettori normali $\boldsymbol{n}$ al grafico della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$