ESERCITAZIONE N. 6: EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
ANALISI MATEMATICA 1 - A.A. 2023/2024

FRANCESCO CANNAS AGHEDU

(1) Determina l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

(a)
$$y' = 3y$$

(b)
$$y' = 2xy$$

(c)
$$y' = \frac{(x-1)y}{x}$$

(d)
$$y' = (\cos x)y$$

(e)
$$y' = -e^x y$$

(f)
$$y' = 2xe^{x^2} y$$

(g)
$$y' = -\cot x$$

(h)
$$y' = \frac{(\ln x)y}{x}$$

(i)
$$y' = \frac{xy}{x^2-1}$$

(j)
$$y' = (-\sin 2x)y$$

(k)
$$y' = y \arctan x$$

(l)
$$y' = 3y + 1$$

(m)
$$y' = y + x$$

(n)
$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$$

(o)
$$y' = y + e^x$$

(p)
$$y' = 4y - e^{2x}$$

(q)
$$y' = -e^x y$$

(r)
$$y' = y + x^2 - 1$$

(s)
$$y' = \frac{3y}{x} + x^3 e^x$$

(t)
$$y' - (\tan x)y - \cos x = 0$$

(u)
$$y' = (y+1)\cos x$$

(2) Risolvi i seguenti problemi di Cauchy:

(a)
$$\begin{cases} y' = 3xe^{x^2} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} y' = (1-y)/x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} y' = \dfrac{(x+1)y}{x} + x(1-x) \\ y(1) = e \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} y' = 2y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x}y = x^3 \\ y(1) = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} y' - y\tan x - 1 = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

(3) Determina l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee:

(a)
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

(b)
$$y'' - 10y' + 21y = 0$$

(c)
$$y'' - 2y' + y = 0$$

(d)
$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

(e)
$$y'' + 3y = 0$$

(f)
$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

(g)
$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

(h)
$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

(i)
$$y'' + 2y' = 0$$

(j)
$$y'' + 2y = 0$$

(k)
$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

(l)
$$y'' + 6y' + 34y = 0$$

(m)
$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

(n)
$$y'' - 2y' + 4y = 0$$

(4) Risolvi i seguenti problemi di Cauchy:

(a)
$$\begin{cases} y'' + 2y' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} y'' - 10y' + 25y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} y'' - 6y' + 10y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(5) Determina l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine non omogenee:

(a) $$y'' + y = x + 1$$

(b) $$y'' + y' = x - 7$$

(c) $$y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 1$$

(d) $$y'' + y' = 6e^{8x}$$

(e) $$y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$$

(f) $$y'' + y' = 6e^{-x}$$

(g) $$y'' - 2y' + y = x^2 + x$$

(h) $$y'' - 2y' + y = e^x$$

(i) $$y'' - 5y' + 6y = e^x$$

(j) $$y'' - 2y' - 3y = (2x + 1)e^x$$

(k) $$y'' - 4y' = x^2 + 1$$

(l) $$y'' - y = xe^x$$

(m) $$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

(n) $$y'' - y' - 2y = 2\sin x$$

(o) $$y'' + y = \cos x$$

(p) $$y'' + y' = \sin x + \cos x$$

(q) $$y'' - y = xe^{-x}$$

(r) $$y'' - 2y' + y = xe^x$$

(6) Applicando il metodo della variazione delle costanti, risolvi le seguenti equazioni differenziali:

(a) $$y'' - y = 3x^2 - 1$$

(b) $$y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x}$$

(c) $$y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}$$

(d) $$y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$$

(7) Risolvi i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $$\begin{cases} y'' + y' - y = \cos x - e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} y'' + 2y' = x^2 + e^{-2x} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(8) Determina l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari di ordine superiore al secondo:

(a) $$y''' - 5y'' = 0$$

(b) $$y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

(c) $$y^{(4)} - y^{(3)} - 6y'' = 0$$

(d) $$y^{(4)} + 3y^{(3)} - 4y'' = 0$$

(e)
$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' = 0$$
(f)
$$y^{(4)} + y'' = 0$$
(g)
$$y^{(6)} - y^{(4)} = 0$$
(h)
$$y''' - y'' = \sin x$$
(i)
$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \cos x$$
(j)
$$y''' + y'' - y' - y = e^{2x}$$

(9) Risolvi le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

(a)
$$y'y = x$$
(b)
$$y' = 2xy$$
(c)
$$y' = 1 + y^2$$
(d)
$$y' = \cos^2 y$$
(e)
$$y' = 2x\cos^2 y$$
(f)
$$y' \tan x = y$$
(g)
$$y' = e^{x-y}\cos x$$
(h)
$$y' = 2x\sqrt{1-y^2}$$

(10) Risolvi i seguenti problemi di Cauchy:

(a)
$$\begin{cases} y' - \dfrac{x}{y^2} = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
(b)
$$\begin{cases} y' = xy \\ y(1) = -1 \end{cases}$$
(c)
$$\begin{cases} y' + 3x^2y^4 = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$
(d)
$$\begin{cases} y' = \frac{y^2-1}{x^2-1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(11) Risolvi le seguenti equazioni differenziali di Bernoulli:

(a)
$$y' = 2y - e^x y^2$$
(b)
$$2y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{y}$$
(c)
$$y' = \frac{2y}{x} + 2x\sqrt{y}$$
(d)
$$y' = x(y^3 - y)$$

(12) Risolvi i seguenti problemi di Cauchy:

(a)
$$\begin{cases} 2y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$
(b)
$$\begin{cases} 2xyy' = y^2 - x^2 + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(13) Risolvi le seguenti equazioni differenziali di Clairaut:

(a)
$$y = xy' + e^{y'}$$

(b)
$$y = xy' + \sqrt{y'}$$

(c)
$$y = xy' - \sin y'$$

(d)
$$y = \frac{x(y')^3 - 1}{(y')^2}$$

(14) Rappresenta in uno stesso sistema di riferimento cartesiano i grafici delle soluzioni dell'equazione di Clairaut:

$$y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$$

Riferimenti bibliografici

[1] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.verde 4A**. Zanichelli

[2] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.verde 4B**. Zanichelli

[3] Bertsch M., Dal Passo R., Giacomelli L. **Analisi matematica**. McGraw-Hill Education

[4] Conti M., Ferrario D. L., Terracini S., Verzini G. **Analisi matematica. Dal calcolo all'analisi, Vol 1**. Apogeo

[5] Dodero N., Baroncini P., Manfredi R. **Lineamenti di Matematica B**. Ghisetti e Corvi editori

[6] Marcellini P., Sbordone C. **Esercitazioni di Matematica. Primo volume, parte prima.** Liguori Editore

[7] Marcellini P., Sbordone C. **Esercitazioni di Matematica. Primo volume, parte seconda.** Liguori Editore

[8] Marcellini P., Sbordone C. **Esercitazioni di Matematica. Secondo volume, parte prima.** Liguori Editore

Ingegneria dell'Energia Elettrica per lo Sviluppo Sostenibile, Università degli Studi di Cagliari

Email address: `francesco.cannasa@unica.it`