

Esercizi di Matematica 3

1 funzioni in due variabili e limiti

Esercizio 1.1. Risolvi i seguenti limiti:

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2(y+3)+3|y|}{x^2+|y|} \quad (3)$$

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+2x^3+y^4+3y^5)}{x^2+y^4} \quad (1)$$

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{4x^2+y^4} \quad (\text{non esiste})$$

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3+y^9} \quad (\text{non esiste})$$

2 derivate

Esercizio 2.1. Calcola le derivate parziali, il gradiente e le derivate parziali seconde delle funzioni seguenti; dopodichè per ogni funzione trova i punti in cui il gradiente è uguale a zero (risolvendo il sistema $f_x(x,y) = 0$, $f_y(x,y) = 0$), e scrivi la matrice Hessiana nei punti trovati.

$$\bullet f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$$

$$\bullet f(x,y) = 2(x^2+y^2+1) - x^4 - y^4$$

$$\bullet f(x,y) = \sqrt{x^2-2y}$$

Esercizio 2.2. Stabilisci se la funzione è continua nel punto nel punto $(0,0)$; dopodichè calcola (se esistono) le derivate parziali (sarà necessario usare la definizione di derivata: perchè?)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$