

Esercizi di Matematica 3**1 domini**

Esercizio 1.1. *Disegnare ed esprimere in coordinate polari la regione di piano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$*

2 funzioni in due variabili e limiti

Esercizio 2.1. *Determina e disegna il dominio delle seguenti funzioni:*

- $f(x, y) = \frac{\ln(1-x^2)y}{x^2+y^2}$
- $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$
- $f(x, y) = (x - y)^2$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
- $f(x, y) = \left| \frac{x}{x-y} \right|$

Esercizio 2.2. *Descrivi (e se possibile disegna) le curve di livello delle seguenti funzioni:*

- $z = x^2$
- $z = e^{-(x^2+y^2)}$
- $z = \sin(x^2 + y^2)$
- $z = (x - y)^2$

Esercizio 2.3. *Risolvi i seguenti limiti:*

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \quad (0)$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(ye^x - y)}{\sin(y)} \quad (0)$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - 2xy + y^3}{x^2 + y^2} \quad (\text{non esiste})$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|}{|y|} \quad (\text{non esiste})$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x-2y)}{x-y} \quad (\text{non esiste})$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \quad (\text{non esiste})$

3 derivate

Esercizio 3.1. *Calcola le derivate parziali, il gradiente, le derivate parziali seconde e la matrice hessiana delle funzioni dell'esercizio 2.2 e delle seguenti funzioni:*

- $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ ($f_x = \frac{2y}{(x+y)^2}$, $f_y = \frac{-2x}{(x+y)^2}$)
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$)
- $f(x, y) = \frac{y}{\sin(x)}$ ($f_x = \frac{-y \cos(x)}{\sin^2(x)}$, $f_y = \frac{1}{\sin(x)}$)
- $f(x, y) = \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ ($f_x = \frac{2y}{x^2-y^2}$, $f_y = \frac{2y}{y^2-x^2}$)

Esercizio 3.2. *Calcola nel punto $(0, 0)$ la derivata puntuale della funzione*

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$