Calcolo di prodotti scalari, norme e prodotti vettoriali

$\mathbb{R}^3$ $\quad v = (1, 2, -1) \quad w = (-2, 0, 1)$

$$v \cdot w = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -2 + 0 - 1 = -3$$

$$\| v \| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i(2-0) - j(1-2) + k(0+4) = 2i + j + 4k$$

$$= 2(1,0,0) + (0,1,0) + 4(0,0,1) = (2, 1, 4)$$

$$w \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2i - j(2-1) - 4k = -2i - j - 4k = (-2, -1, -4)$$

---

determinare l'equazione di una retta o una parabola partendo dal disegno

es 1) parto dal disegno: scelgo due punti

$\overset{x_1 \; y_1}{(0, 1)}, \; \overset{x_2 \; y_2}{(1, 3)} \qquad \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \to m$

$$\frac{y-1}{x-0} = \frac{3-1}{1-0} \rightsquigarrow x \cdot \frac{y-1}{x} = 2 \cdot x \rightsquigarrow y - 1 = 2x$$

$$y = 2x + 1$$

es 2) $\overset{P_1}{\overset{x_1 \; y_1}{(1, 0)}}, \; \overset{P_2}{\overset{x_2 \; y_2}{(0, 1)}}$

$$\frac{y-0}{x-1} = \frac{1-0}{0-1} \rightsquigarrow \frac{y}{x-1} = \frac{}{-1} \rightsquigarrow y = -1(x-1)$$

$$y = -x + 1$$

– parabola con due radici e concavità positiva

$$y = (x - r_1) \cdot (x - r_2) = (x - (-1)) \cdot (x - 1) = (x+1) \cdot (x-1) = x^2 - 1$$

– parabola con una radice e concavità positiva

$$y = (x - r) \cdot (x - r) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

– parabola con due radici e concavità negativa

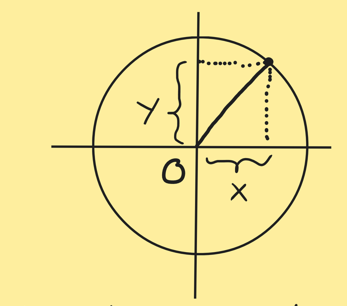
$$y = -(x - r_1)(x - r_2) = -(x+1)(x-1) = -(x^2 - 1) = -x^2 + 1$$

circonferenze (equazione e disegno)

equazione del tipo $\quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

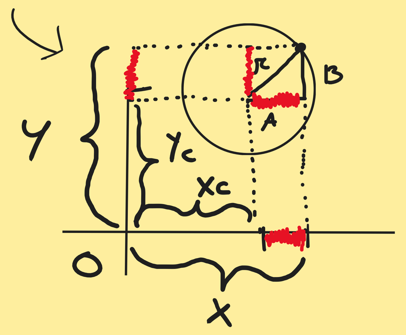
servono due elementi per trovare l'equazione partendo dal disegno e viceversa:

1) centro 2) raggio



centrata nell'origine

traslato



dal teorema di pitagora, la relazione che cerchiamo è

$r^2 = x^2 + y^2$

$r^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2$

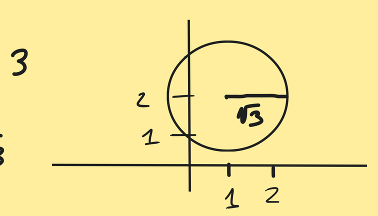
$$r^2 = A^2 + B^2$$

$$r^2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2$$

es 1)

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$$

$c = (1, 2) \qquad r = \sqrt{3}$



di solito però non trovo un'equazione già pronta!

es2)

$$\frac{3x^2 + 3y^2 + 6x - 4}{3} = \frac{0}{3} \rightsquigarrow x^2 + y^2 + 2x - \frac{4}{3} = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$y^2 + (x^2 + 2x + 1) - 1 - \frac{4}{3} = 0$$

$$y^2 + (x+1)^2 - \frac{7}{3} = 0 \rightsquigarrow y^2 + (x+1)^2 = \frac{7}{3}$$

$c = (-1, 0) \qquad r = \sqrt{\frac{7}{3}}$

es 3)

$$\frac{1}{2} \cdot \left(2x^2 + 2y^2 + 2\sqrt{2}(x+y) - 1\right) = 0 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 + y^2 + \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y - \frac{1}{2} = 0$$

$$\left[\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] + \left[\left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 + \sqrt{2}x = x^2 + \frac{2}{2}\sqrt{2}\,x$$

$$= \left(x^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x + \frac{2}{4}\right) - \frac{2}{4}$$

$$= \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

$C = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad r = \sqrt{\frac{3}{2}}$

es 4)

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = -2 \qquad$ IMPOSSIBILE

es 5) $\underbrace{(x+1)^2}_{0} + \underbrace{(y-2)^2}_{0} = 0 \qquad x = -1, \; y = 2$