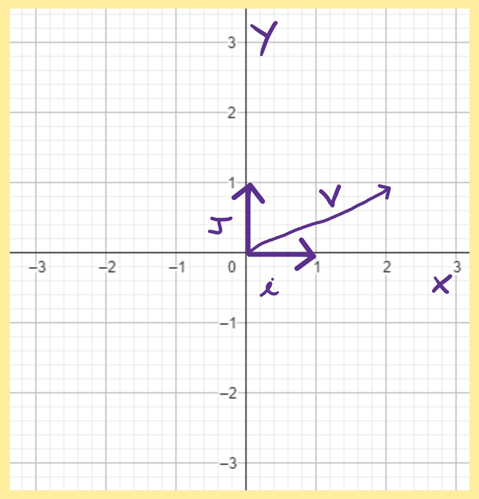
Lezione di ripasso 1

1

i vettori possono essere scritti in due modalità:



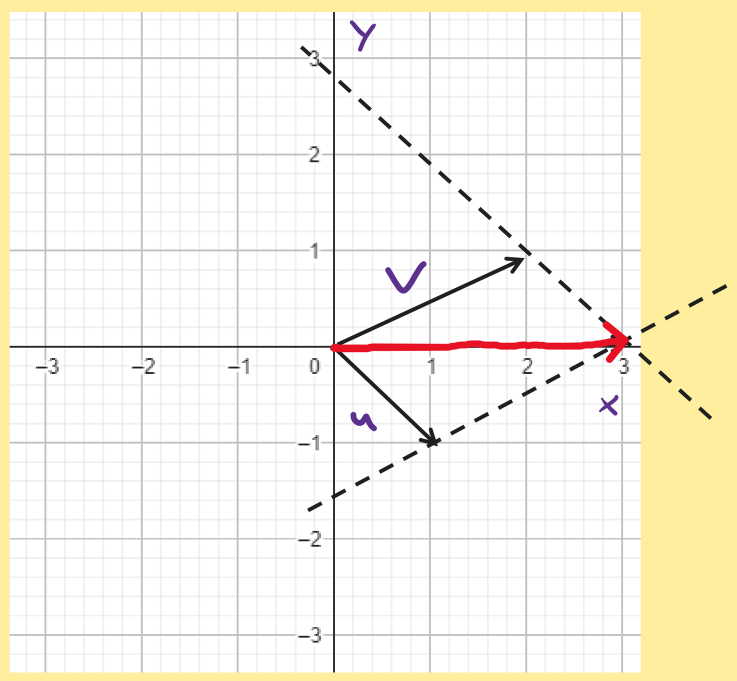
$V = (2,1)$, oppure

$V = 2i + J$

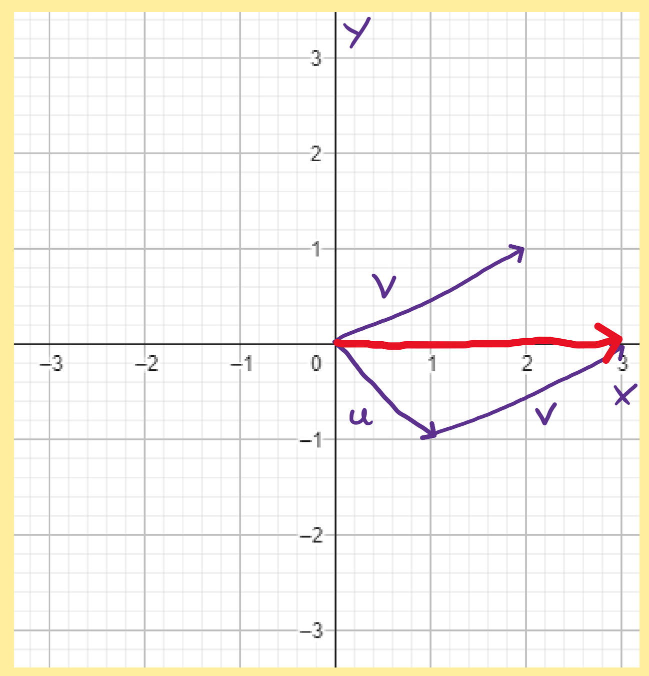
dove $i = (1,0)$

$J = (0,1)$

per sommare due vettori u e v , costruisco le parallele ai due vettori(metodo del parallelogramma) o uso il metodo punt-coda:



parallelogramma



punta coda: posiziono i due vettori "uno in coda all'altro"

$V = (2,1) \quad U = (-1,-1)$

$V + U = (2-1,\ 1-1) = (1,0)$

per disegnare il vettore u-v dovrò prima disegnare -v cambiando di segno le sue coordinate, e poi sommare u+(-v)

il prodotto scalare tra due vettori è un'operazione che ci restituisce un numero (scalare): si sommano i prodotti delle componenti dei due vettori.

$U \cdot V = -1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = -2 - 1 = -3$

$(v^1, v^2) \cdot (u^1, u^2) = v^1 u^1 + v^2 u^2$

la norma di un vettore è data da:

$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

ricorda che $\|u+v\| \neq \|u\| + \|v\|$!!

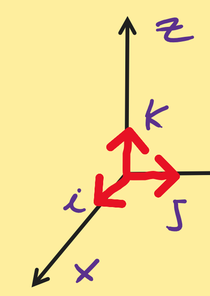
in particolare, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

inoltre, $u \cdot v \leq \|u\|\|v\|$

$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$ angolo tra i vettori u e v

in $\mathbb{R}^3$

il prodotto scalare e la norma si calcolano allo stesso modo!



$u = (1,2,-2) \quad v = (0,2,3)$

$u \cdot v = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 4 - 6 = -2$

$\|u\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

anche qui valgono $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$u \cdot v \leq \|u\| \cdot \|v\|$

i vettori della base canonica sono i, J, k

$i = (1,0,0) \quad J = (0,1,0) \quad k = (0,0,1)$

attenzione: gli assi cartesiani sono disposti sempre come nel disegno sopra (in modo che $i \wedge J = k$ come vedremo in seguito)

prodotto vettoriale: è un operazione che a due vettori (ordinati) associa un altro vettore, che sia perpendicolare ad entrambi. si indica con $u \wedge v$.

ricorda che $u \wedge v \neq v \wedge u$! infatti $u \wedge v = -v \wedge u$

per ogni coppia di vettori, esiste un unica direzione ortogonale ad entrambi. in base all'ordine dei due vettori ($u \wedge v$ oppure $v \wedge u$) si determina anche il verso

come si calcola?

$u = (2,1,0) \quad v = (0,3,1)$

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & J & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

← calcolo il determinante sviluppando rispetto alla prima riga con la regola di laplace

attenzione: matematicamente questa matrice non ha senso! è solo una regola per ricordare il procedimento!

$$i(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + J(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + k(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$i - 2J + 6k = (1,-2,6)$

esercizio:
- verifica che $v \wedge u = (-1,2,-6)$
- verifica che $i \wedge J = k$

proprietà:

$\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\| \cdot \operatorname{sen}\theta$

$(u+v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$

$u \wedge (v+w) = u \wedge v + u \wedge w$

attenzione: $u \wedge (v \wedge w) \neq (u \wedge v) \wedge w$