esempio campo non conservativo

$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ $\gamma = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$\oint_0^{2\pi} \left(\underbrace{\frac{-\operatorname{sen}\theta}{1}}_{F_1}, \underbrace{\frac{\cos\theta}{1}}_{F_2} \right) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\, d\theta = \oint_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \, d\theta =$

$= \oint_0^{2\pi} 1\, d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi \neq 0$

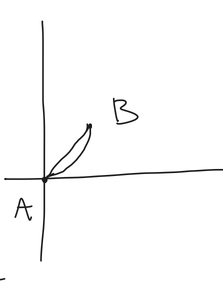
per il teorema, se la circuitazione è $\neq 0$, allora F non è conservativo

oppure:

$\gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ $t \in [0,1]$ $\gamma_2 = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ $t \in [0,1]$

$\gamma_1(0) = (0,0)$ $\gamma_1' = \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t \end{cases}$ $\gamma_2(0) = (0,0)$ $\gamma_2(1) = (1,1)$

$\gamma_2(1) = (1,1)$ $\gamma_2' = \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 1 \end{cases}$



$x^2 = t^2 = y$

$\int_{\gamma_1} \langle F, T \rangle ds = \int_0^1 \left(\frac{-t^2}{t^2+t^4}, \frac{t}{t^2+t^4} \right) \cdot (1, 2t)\, dt$

$= \int_0^1 \left(\frac{-1}{1+t^2} + \frac{t \cdot 2t}{t^2+t^4} \right) dt = -\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

$= + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\operatorname{arctg}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0$

$\int_{\gamma_2} \langle F, T \rangle ds = \int_0^1 \left(\frac{-t}{2t^2}, \frac{t}{2t^2} \right) \cdot (1,1)\, dt = \int_0^1 \left(-\frac{t}{2t^2} + \frac{t}{2t^2} \right) dt = \int_0^1 0\, dt = 0$

esempio: campo conservativo

$F = (x - 2y, -2x + y)$ $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 2xy$

$f_x = \frac{2x}{2} + 0 - 2y = x - 2y = F_1$

$f_y = \frac{2y}{2} - 2x = y - 2x = F_2$ è conservativo

$\oint_\gamma F \cdot T\, ds$ $\gamma = \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$\int_\gamma F \cdot T\, ds = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = \frac{1}{2} + 0 - 2 - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) = 0$

oppure: è una circuitazione di un campo conservativo, quindi $= 0$

$F(x,y) = (y, x)$ $\gamma = \left(e^{\operatorname{sen} t^2}, \ln\left(\frac{t^2}{\pi} + 1 \right) \right)$ $t \in [0, \sqrt{\pi}]$

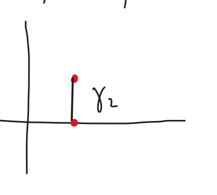
calcola l'integrale $\int_\gamma F \cdot T\, ds$

$A = \gamma(0) = (1, 0)$

$B = \gamma(\sqrt{\pi}) = (1, \ln(2))$

$F_1 = y$ $f_x = y$ $f = xy$

$F_2 = x$ $f_y = x$



$\int f_x\, dx = \int y\, dx = yx + g(y) = f$

$f_y = x = x + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0$ $g(y) = \text{cost}$

$f = xy + \text{cost}$

$\int_\gamma F \cdot T_\gamma\, ds = \int_{\gamma_2} F \cdot T_{\gamma_2}\, ds = f(\gamma(\sqrt{\pi})) - f(\gamma(0)) = f(1, \ln 2) - f(1, 0)$

$= \ln(2) - 0 = \ln(2)$

attenzione:

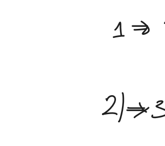
Se la circuitazione di un campo è $= 0$ rispetto ad una curva γ, non è detto che sia conservativo

Teorema: le seguenti sono tutte equivalenti

1) il campo F è conservativo
2) per ogni curva chiusa, la circuitazione di F è nulla
3) per ogni γ_1, γ_2 curve con lo stesso punto iniziale e finale, si ha che $\int_{\gamma_1} F \cdot T\, ds = \int_{\gamma_2} F \cdot T\, ds$

$1 \Rightarrow 2$ $1 \Rightarrow 3$ le sapevamo già

$2) \Rightarrow 3)$ se per F la circuitazione è sempre nulla,



$\int_{\gamma_1 \cup -\gamma_2} F \cdot T\, ds = \int_{\gamma_1} F \cdot T\, ds + \int_{-\gamma_2} F \cdot T\, ds = 0$

chiusa

curve chiuse

$\int_{\gamma_1} F \cdot T\, ds = -\int_{-\gamma_2} F \cdot T\, ds$

$\Rightarrow \int_{\gamma_1} F \cdot T\, ds = \int_{\gamma_2} F \cdot T\, ds$

$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right)}_{A} i - j \underbrace{\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right)}_{B} + k \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)}_{C}$

$= (A, B, C)$

$F = (x^2 z, \ln(x+y), zy)$

$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 z & \ln(x+y) & zy \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z - 0 \\ -0 + x^2 \\ \frac{1}{x+y} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x^2 \\ \frac{1}{x+y} \end{pmatrix}$

non è irrotazionale

DEF Un campo vettoriale F $C^1(A)$ si dice irrotazionale se $\operatorname{rot}(F) = 0$ (in $\mathbb{R}^3$)

in $\mathbb{R}^2$ se vale la condizione $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$

Teorema Se F $C^2(A)$ è conservativo $\Rightarrow$ è irrotazionale

$F = \nabla g$ in $\mathbb{R}^2$ $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial g_x}{\partial y} = g_{xy}$

$(F_1, F_2) = (g_x, g_y)$

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial g_y}{\partial x} = g_{yx}$

per il teorema di Schwarz, $g_{xy} = g_{yx} \Rightarrow$

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$

$\square$

esempio campo irrotazionale non conservativo

$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

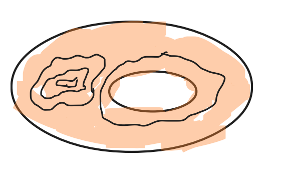
$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{-1 \cdot (x^2+y^2) - (-y)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Rightarrow$ campo irrotazionale

visto precedentemente: non è conservativo

DEF dominio semplicemente connesso



non è semplicemente connesso

è un dominio in cui ogni curva chiusa può essere deformata fino alla curva costante

è un dominio senza "buchi".

Teorema se il dominio del campo è semplicemente connesso, allora

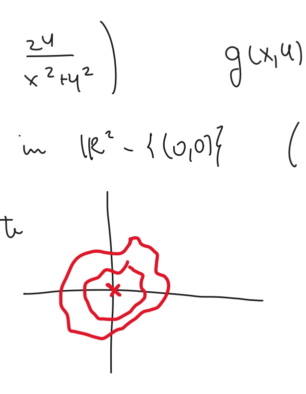
F conservativo $\Leftrightarrow$ irrotazionale

ATTENZIONE: se voglio calcolare la circuitazione di un campo definito su un dominio D, che ha una primitiva nel dominio D, devo assicurarmi che la curva chiusa stia nel dominio D e che il campo e la primitiva siano definite in tutta la regione di piano racchiusa dalla curva! altrimenti, il campo NON è conservativo su tutta la regione e la circuitazione potrebbe non essere nulla

$F(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2} \right)$ $g(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

è conservativa in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ (in $(0,0)$ il campo non è definito)

non è semplicemente connesso



se calcolo la circuitazione su una curva chiusa che racchiude l'origine, non è detto che sia $= 0$

(se integrassi su una circonferenza con centro nell'origine, il dominio racchiuso $(x^2+y^2 \leq 1)$ non è tutto contenuto nel dominio di definizione del campo!

non è detto che faccia zero, perché non è conservativo in $\{x^2+y^2 \leq 1\}$ che è il dominio racchiuso dalla curva

DEF Una superficie regolare è $\varphi: D^{\subset \mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longmapsto (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))$

con componenti di classe $C^1(D)$, non si autointerseca,

J ha rango 2 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$

le due colonne non sono proporzionali ($v_1 \neq c \cdot v_2$)

$(1,1,1)$ e $(2,2,2)$ sono proporzionali.

$(1,1,0)$ $(1,1,1)$ non sono vettori proporzionali

superfici cartesiane $f(x,y) = x^2 e^y$

$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto (x, y, x^2 e^y)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ J = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2xe^y & x^2 e^y \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} \varphi_x & \varphi_y \end{array} \end{array}$$

φ_x e φ_y non sono mai proporzionali.

integrale superficiale di $g(x,y)$ rispetto a $\varphi(v,t)$

$\iint_\Gamma g\, d\sigma = \iint_D g(\varphi(v,t)) \cdot \| \varphi_v \wedge \varphi_t \|\, dv\, dt$ $\varphi: D \to \mathbb{R}^3$