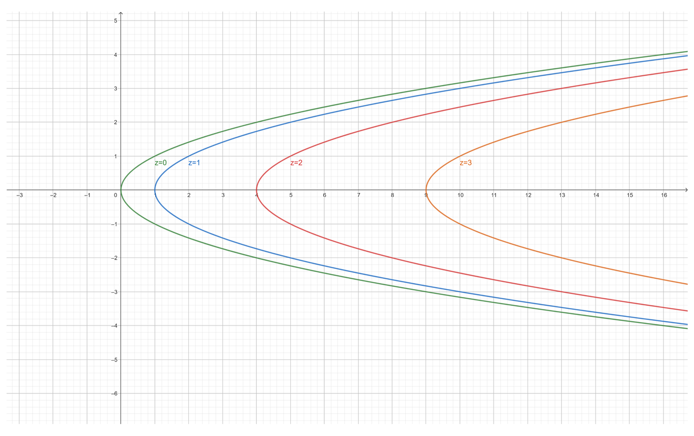
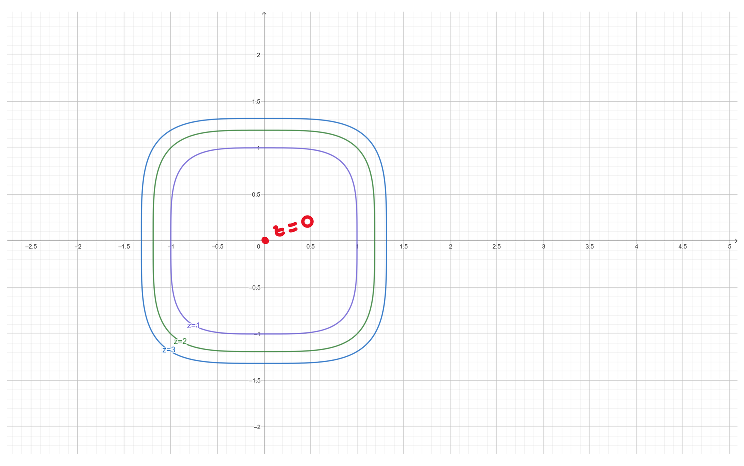
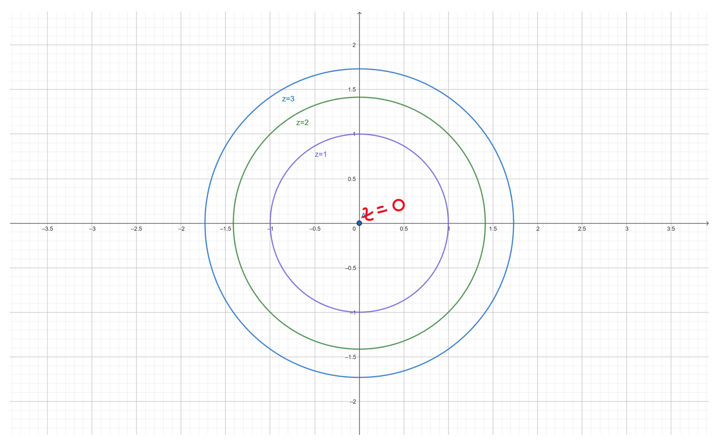






Curve di livello

$f(x,y) = \sqrt{x-y^2}$ Dominio $x \geq y^2$, $x - y^2 \geq 0$, $x \geq y^2$

z			
0	$\sqrt{x-y^2} = 0$	$x-y^2=0$	$x=y^2$
-1	$\sqrt{x-y^2} = -1$	IMPOSSIBILE	
1	$\sqrt{x-y^2} = 1$	$x-y^2=1$	$x=1+y^2$
3	$\sqrt{x-y^2} = 3$	$x-y^2=9$	$x=9+y^2$

$f(x,y) = x^4+y^4$

$z=0$ $x^4+y^4=0$

$z=1$ $x^4+y^4=1$

$z=-1$ $x^4+y^4=-1$

$f(x,y) = x^2+y^2$

$z=0$ $x^2+y^2=0$

$z=1$ $x^2+y^2=1$

$z=2$ $x^2+y^2=2$

Massimi e minimi vincolati

cercare MAX e MIN assoluti di una funzione in un dominio limitato e racchiuso da un numero finito di curve che chiamiamo vincoli

siano f, g due funzioni derivabili una volta con continuità in A

$E = \{(x,y) \in A \mid g(x,y) = 0\}$ questo è la curva che racchiude il dominio che ci interesse (vincolo)

(x_0,y_0) si dice punto di massimo/minimo vincolato assoluto per f rispetto al vincolo g (rispetto ad E)

se $f(x_0,y_0) \geq (\leq) f(x,y)$ per ogni $(x,y) \in E$

con questo metodo trovo i massimi e minimi lungo la curva. Si trovano risolvendo il sistema:

Teorema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \quad \text{con } \nabla g \neq 0$$

calcolo le quote dei punti trovati. Quello con quota maggiore è il MAX A.V., quello con quota minore è il MIN A.V.

se volessi calcolare i massimi e minimi assoluti in un dominio racchiuso da una o più curve,

- calcolo i massimi e minimi relativi con la matrice Hessiana, considerando solo quelli dentro il dominio interessato
- calcolo i massimi e minimi vincolati sul bordo del dominio con il metodo visto
- calcolo le quote di tutti i punti trovati e come max assoluto prendo quello con quota maggiore

$f(x,y) = e^{x+y}$ cerco i MAX, MIN vincolati assoluti nella curva $x^2+y^2=1$

$g(x,y) = x^2+y^2-1$

$\nabla g(x,y) = (\overset{g_x}{2x}, \overset{g_y}{2y})$ $\nabla f(x,y) = (\overset{f_x}{e^{x+y}}, \overset{f_y}{e^{x+y}})$

$$\begin{cases} (e^{x+y}, e^{x+y}) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$\nabla g \neq 0$
$(2x,2y) \neq 0$
$(x,y) \neq (0,0)$
però non sta nella curva e quindi non mi crea problemi

$$\begin{cases} e^{x+y} = \lambda 2x \\ e^{x+y} = \lambda 2y \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

punti $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{e^{x+y}}{2x} = \lambda \\ \frac{e^{x+y}}{2y} = \lambda \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{e^{x+y}}{2x} = \frac{e^{x+y}}{2y} \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$$

$x^2+x^2-1=0 \Rightarrow 2x^2=1$ $x^2=\frac{1}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\left(x=\frac{1}{\sqrt2}, y=\frac{1}{\sqrt2}, \lambda = \frac{e^{\frac{2}{\sqrt2}}}{\frac{2}{\sqrt2}} = \frac{\sqrt2}{2}e^{\frac{2}{\sqrt2}}\right), \left(x=-\frac{1}{\sqrt2}, y=-\frac{1}{\sqrt2}, \lambda = \frac{e^{-\frac{2}{\sqrt2}}}{-\frac{2}{\sqrt2}} = -\frac{\sqrt2}{2}e^{\frac{2}{\sqrt2}}\right)$

devo verificare per $x=0, y=0$

$(0,0)$ non va bene perché $x^2+y^2-1=0$

$x=0$, $y \neq 0$

$x=0$
$$\begin{cases} e^y = 0 \quad \text{NO} \\ e^y = 2\lambda y \\ y^2-1=0 \end{cases}$$
nessuna soluzione

$y=0$ analogo nessuna soluzione

i punti di massimo/minimo assoluti vincolati sono $\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)$

$f_x = e^{x+y}$ $f_y = e^{x+y}$

$f_{xx} = e^{x+y}$ $f_{xy} = e^{x+y}$ $f_{yy} = e^{x+y}$

$\nabla f(x,y) = (e^{x+y}, e^{x+y}) = 0$ IMPOSSIBILE

dentro il dominio racchiuso dalla curva $x^2+y^2=1$ non ci possono essere massimi e minimi

Quindi il MAX assoluto di $f(x,y)$ in $\{x^2+y^2 \leq 1\}$ è $\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$, il MIN $\left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)$

perché $f\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right) > f\left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)$

$f(x,y) = x^2+y^2$ $g(x,y) = x^2+y^2=1$

$f_x(x,y) = 2x$ $f_y(x,y) = 2y$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases}$ $(x,y)=(0,0)$

$f_{xx}(x,y) = 2$ $f_{xy}(x,y) = 0$ $f_{yy}(x,y) = 2$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\det Hf(0,0) = 4 > 0$ matrice definita $f_{xx} > 0$ definita positiva

$\Rightarrow (0,0)$ è un minimo relativo

guardo nel vincolo $g(x,y) = x^2+y^2=1$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \quad \nabla g \neq 0 \quad \begin{cases} 2x = 2x \cdot \lambda \\ 2y = 2y \cdot \lambda \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

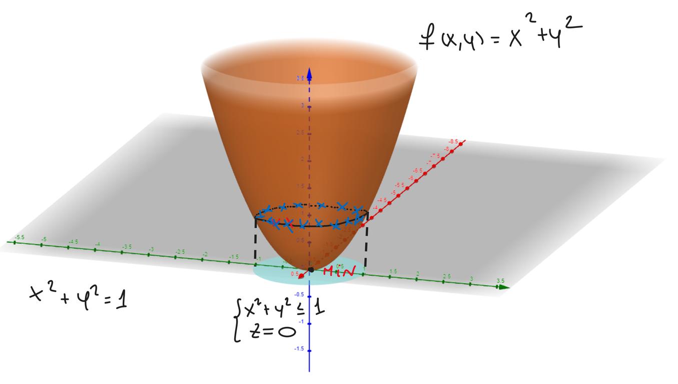
guardo la prima eq: $x=0 \lor \lambda=1$

$x=0$, $\lambda \neq 1$ $\begin{cases} 2y = \lambda 2y \\ y^2=1 \end{cases}$ $y=\pm1$ $\begin{cases} y=1 \\ 2=2\lambda \end{cases} \to \lambda=1$; $\begin{cases} y=-1 \\ -2=-2\lambda \end{cases} \to \lambda=1$

$x \neq 0$, $\lambda=1$ $\begin{cases} 2x=2x \\ 2y=2y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \longrightarrow x^2+y^2=1$

$\overset{x\ \ y\ \ \lambda}{(0, 1, 1)}$ compresa nella terza, $\overset{x\ \ y\ \ \lambda}{(0, -1, 1)}$ compresa nella terza, $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1)$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1)$ $\theta \in [0, 2\pi]$



i punti di estremo sono $(0,0)$ e $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ $\theta \in [0,2\pi]$

$f(0,0) = 0$

$f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ $\theta \in [0,2\pi]$

al variare di θ tutti i punti hanno quota $=1$ ma è un caso

$(0,0)$ MINIMO ASSOLUTO

$(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ $\theta \in [0,2\pi]$ MASSIMI ASSOLUTI

DEFINIZIONE $A \subseteq \mathbb{R}^2$ insieme aperto

$f(x,y)$ definita su A

$f(x,y)$ si dice differenziabile in (x_0,y_0) se è derivabile (1 volta) e se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$\|(h,k)\|$

$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(h,k) + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

$f(x,y) = x^2+2y$ $(1,2)$ $\nabla f = (2x, 2)$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(1+h)^2+2(2+k) - (1^2+2(2)) - (2\cdot1, 2)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1+h^2+\cancel{2h}+4+\cancel{2k}-5-(\cancel{2h}+\cancel{2k})}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$h=0 \to 0$

$k=0 \longrightarrow \frac{h^2}{\sqrt{h^2}} = \frac{h^2}{|h|} = \frac{|h||h|}{|h|} = |h| \to 0$

verifica per caso con la definizione che è $=0$