(x_0,y_0) si dice punto di sella se è un punto critico ma non è né massimo né minimo

A insieme aperto, f derivabile in A, due volte

se (x_0,y_0) è punto di massimo/minimo $\Rightarrow$ è un punto critico

per trovare massimi e minimi basta cercare tra i punti critici

se (x_0,y_0) è un punto critico, e se
- $Hf(x_0,y_0)$ definita positiva $\Rightarrow$ punto di MINIMO
- $Hf(x_0,y_0)$ definita negativa $\Rightarrow$ punto di MASSIMO
- $Hf(x_0,y_0)$ indefinita $\Rightarrow$ punto di SELLA
- $Hf(x_0,y_0)$ semidefinita positiva $\Rightarrow$ SELLA OPPURE MINIMO
- $Hf(x_0,y_0)$ semidefinita negativa $\Rightarrow$ SELLA OPPURE MASSIMO

COME CLASSIFICO LA MATRICE?

matrice definita
- positiva se gli autovalori sono > 0
- negativa se gli autov. < 0

matrice indefinita se sono discordi (uno positivo e uno negativo)

semidefinita
- positiva autovalori ≥ 0
- negativa autovalori ≤ 0

calcolo il determinante di $Hf(x_0,y_0)$

det > 0 $\rightsquigarrow$
- $f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \rightsquigarrow$ def. positiva $\Rightarrow$ punto di minimo
- $f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \rightsquigarrow$ def negativa $\Rightarrow$ punto di massimo

det < 0 $\Rightarrow$ indefinita $\Rightarrow$ punto di sella

det $= 0$ non si può dire nulla

- $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ D: $\mathbb{R}^2$

$f_x(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) = -2x\,e^{-(x^2+y^2)}$

$f_y(x,y) = -2y\,e^{-(x^2+y^2)}$

$\nabla f(x,y) = \left(-2x\cdot e^{-(x^2+y^2)}, -2y\,e^{-(x^2+y^2)}\right) = e^{-(x^2+y^2)}(-2x,-2y)$

$\begin{cases} \cancel{-e^{-(x^2+y^2)}}\,2x = 0 \\ \cancel{-e^{-(x^2+y^2)}}\,2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

punto critico: $(0,0)$

$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial f_x}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2\cdot e^{-(x^2+y^2)} - 2x\left[e^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2x)\right] =$
$-2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2 e^{-(x^2+y^2)} = e^{-(x^2+y^2)}\left[-2+4x^2\right]$

$f_{xy}(x,y) = -2x\cdot e^{-(x^2+y^2)}(-2y) = 4xy\,e^{-(x^2+y^2)} = f_{yx}(x,y)$

$f_{yy}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\left[-2+4y^2\right]$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$f_{xx}(0,0) = e^{-0}[-2+0]$
$f_{xy}(0,0) = 0\cdot e^{-0}$
$f_{yy}(0,0) = e^{-0}[-2+0]$

$\det(Hf(0,0)) = 4-0 = 4 > 0$ matrice definita negativa

$\Rightarrow$ punto di massimo

- $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$ $D = \mathbb{R}^2$

$f_x(x,y) = 3x^2 + y$
$f_y(x,y) = -3y^2 + x$

$\nabla f(x,y) = (3x^2+y, -3y^2+x)$

$\begin{cases} 3x^2+y = 0 \\ -3y^2+x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -3x^2 \\ -3(-3x^2)^2 + x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -3x^2 \\ -27x^4 + x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -3x^2 \\ x(-27x^3+1) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ -27x^3+1 = 0 \end{cases}$

$27x^3 = 1$
$x^3 = \frac{1}{27}$
$x = \frac{1}{3}$

$x = 0 \rightsquigarrow y = 0$ $(0,0)$

$x = \frac{1}{3} \rightsquigarrow y = -3\cdot\frac{1}{3^2} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$f_{xx}(x,y) = 6x$ $f_{xy}(x,y) = 1$
$f_{yy}(x,y) = -6y$

$\det(Hf(0,0)) = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = -1 < 0$ matrice indefinita punto di sella

$\det\left(Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right) = \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 4-1 = 3 > 0$

matrice definita positiva

$\Rightarrow$ punto di minimo

- $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$

l'unico punto critico di $f(x,y)$ è $(0,0)$. $(\nabla f(0,0) = (0,0))$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4-0 = 4 > 0$

la matrice è definita, ed $f_{xx} = 2 > 0$, quindi è definita positiva $\Rightarrow$ $(0,0)$ punto di minimo

- $f(x,y) = 2(x^2+y^2+1) - x^4 - y^4$

quindi i punti critici sono

$(0,0)$ $(0,1)$ $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$

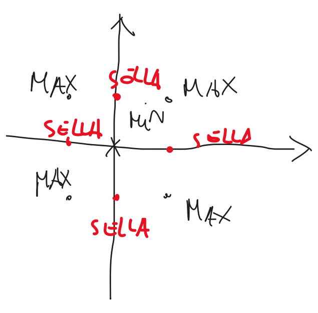
$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ autovalori > 0 $\Rightarrow$ definita positiva $\Rightarrow$ punto di minimo

$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ indefinita $\Rightarrow$ punto di sella

$Hf(0,-1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ indefinita $\Rightarrow$ punto di sella

$Hf(-1,1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ autovalori < 0 $\Rightarrow$ definita negativa $\Rightarrow$ punto di massimo

$Hf(1,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ sella



$Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ sella

$Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ massimo

$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ massimo

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ massimo

- $f(x,y) = \sqrt{x^2-2y}$

D $x^2-2y \geq 0$ $y \leq \frac{x^2}{2}$ $y = \frac{x^2}{2}$

non ha punti critici

$f_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2y}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-2y}}$ D_1 $x^2-2y > 0$

$x^2 > 2y$
$\frac{x^2}{2} > y$
$y < \frac{x^2}{2}$

$f_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2y}}\cdot(-2) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-2y}} \neq 0$ D_2 $x^2-2y > 0$

$y = \frac{x^2}{2}$

$f\left(x, \frac{x^2}{2}\right) = \sqrt{0} = 0$

la curva $y = \frac{x^2}{2}$ rappresenta punti di minimo

i punti di minimo sono $\left(t, \frac{t^2}{2}\right)$ $t \in \mathbb{R}$

- $f(x,y) = x^4 + y^4$ $D = \mathbb{R}^2$

$f_x(x,y) = 4x^3$ $f_y(x,y) = 4y^3$

$\nabla f(x,y) = (4x^3, 4y^3)$

$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $(0,0)$

$f_{xx}(x,y) = 12x^2$ $f_{xy} = 0 = f_{yx}$ $f_{yy}(x,y) = 12y^2$

$\det(Hf(0,0)) = \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = 0$

con la matrice non si conclude nulla, ma $(0,0)$ è un punto di minimo

- $f(x,y) = x^3 + y^3$

$f_x = 3x^2$ $f_y = 3y^2$

$f_{xx} = 6x$ $f_{xy} = 0$ $f_{yy} = 6y$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non posso concludere nulla, ma $(0,0)$ è un punto di sella