1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} \qquad a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2-y^2 = 0$$

$e^x-1 \sim x$

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ye^x-y}{\operatorname{sen} y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(e^x-1)}{\operatorname{sen} y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{y}{\operatorname{sen} y}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(e^x-1)}_{\sim x}$$

$e^x-\ell$, $x\to 0$ $\qquad |a+b| \le |a|+|b|$

$$0 \le \left|\frac{y}{\operatorname{sen} y}(e^x-1)\right| = \left|\frac{y}{\operatorname{sen} y}\right| \left|e^x-1\right| = \left|\frac{y}{\operatorname{sen} y}-1+1\right| \cdot |e^x-1| = \Big(\underbrace{\left|\frac{y}{\operatorname{sen} y}-1\right|}_{<\varepsilon_1}+|1|\Big)|e^x-1|$$

$$< (\varepsilon_1+1)\cdot\varepsilon_2 = \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2+\varepsilon_2$$

3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^2+y^2}$$

$x=y$ $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 x^4}{x^2+x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{2x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{2} = 0$

$x=0$ $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = 0$

$$\left|\frac{x^2y^4}{x^2+y^2}\right| \le \underbrace{\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|}_{\le 1}\cdot|y^4| \le |y^4| \to 0$$

4) $$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+1)(y-2)^2}{x^2+y^2-4y+2x+5} = \lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+1)(y-2)^2}{(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)}$$

x^2+2x+1

y^2-4y+4

$$= \lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+1)(y-2)^2}{(x+1)^2+(y-2)^2}$$

$x=-1$ $\quad \lim_{y\to 2} \frac{0}{0+(y-2)^2} = 0$

$x=2$

$$\begin{cases} x = mt-1 \\ y = nt+2 \end{cases}$$

$$\left|\frac{(x+1)(y-2)^2}{(x+1)^2+(y-2)^2}\right| = \underbrace{\left|\frac{(y-2)^2}{(x+1)^2+(y-2)^2}\right|}_{\le 1}|x+1| \le |x+1| \to 0$$

5) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy+y^3}{x^2+y^2}$$

$x=0$ $\quad \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^2} = \lim_{y\to 0} y = 0$

$x=y$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x^3}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3-2x^2}{2x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x^2}(x-1)}{\cancel{2x^2}} = \lim_{x\to 0} x-1 = -1$$

6) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{|y|}$$

$x=0$ $\quad \lim_{y\to 0} \frac{|0|}{|y|} = 0$

$x=y$ $\quad \lim_{y\to 0} \frac{|y|}{|y|} = 1$

7) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x-2y)}{x-y}$$

$x=0$ $\quad \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(-2y)}{-y} = \lim_{y\to 0} \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(-2y)}{-2y}\right)}_{\to 1}\cdot 2 = 2$

$y=0$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

8) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$x=0$ $\quad \lim_{y\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{y}\right) = \operatorname{arctg}(0) = 0$

$x=y$ $\quad \lim_{y\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{y}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

derivate parziali prime e seconde

$f(x,y) = x^2\cdot\cos(x+y)$

$f_x(x,y) = 2x\cdot\cos(x+y) - x^2\operatorname{sen}(x+y)$

$f_y(x,y) = -x^2\operatorname{sen}(x+y)$

$f_{xx}(x,y) = 2\cos(x+y) + 2x\cdot(-\operatorname{sen}(x+y)) - 2x\operatorname{sen}(x+y) - x^2\cos(x+y)$

$f_{xy}(x,y) = 2x(-\operatorname{sen}(x+y)) - x^2(\cos(x+y))$

$f_{yx}(x,y) = -2x^2\operatorname{sen}(x+y) - x^2\cos(x+y)$

$f_{yy}(x,y) = -x^2\cos(x+y)$

gradiente (è un vettore con due componenti)

$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (2x\cos(x+y)-x^2\operatorname{sen}(x+y), -x^2\operatorname{sen}(x+y))$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$ $\qquad \nabla f(1,1) = (2\cos(2)-\operatorname{sen}(2), -\operatorname{sen}(2))$

matrice Hessiana (Matrice 2x2)

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

TEO SCHWARZ

se $f(x,y)$ è derivabile 2 volte con derivate seconde continue, allora $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$

se f è data dal rapporto, somme, prodotto, composizione ecc.. di funzioni elementari, nel dominio di definizione anche le loro derivate saranno continue.

Teorema

A aperto, connesso, f derivabile in A, $\nabla f(x,y)=0$ in tutto A $\Rightarrow$ f costante

$(x_0,y_0)\in A$ si dice punto critico se f derivabile in A con $\nabla f(x_0,y_0)=0$

$(x_0,y_0)\in A$ è un punto di massimo relativo se $\exists\, B_\delta(x_0,y_0)$: $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ per $(x,y)\in B_\delta(x_0,y_0)$

$(x_0,y_0)\in A$ è punto di minimo relativo se $\exists\, B_\delta(x_0,y_0)$ $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$ per $(x,y)\in B_\delta(x_0,y_0)$

nota: per le ultime due definizioni non è necessaria alcuna ipotesi di derivabilità, continuità ecc..

A insieme aperto, f derivabile in A, due volte — terremo queste ipotesi nelle lezioni successive

(x_0,y_0) si dice punto di sella se è un punto critico ma non è né massimo né minimo

se (x_0,y_0) è punto di massimo/minimo $\Rightarrow$ è un punto critico

se (x_0,y_0) è un punto stazionario, e se
- $Hf(x_0,y_0)$ definita positiva
- $Hf(x_0,y_0)$ definita negativa
- $Hf(x_0,y_0)$ indefinita
- $Hf(x_0,y_0)$ semidefinita

matrice definita
- positiva se gli autovalori sono >0
- negativa se gli autov. <0

matrice indefinita se sono discordi

semidefinita
- positiva autovalori ≥ 0
- negativa autovalori ≤ 0