MAT 3   14/12

giovedì 14 dicembre 2023   11:06

CODICE LEZIONE 997725

LISTA 10

3) $\Sigma = \{ z = 9 - x^2 - y^2 , \ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \}$

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 9 - x^2 - y^2 \end{cases} \quad (x,y) \in D = \{ x^2 + y^2 \leq \tfrac{1}{2} \}$$

$$\| \varphi_x \wedge \varphi_y \| = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} = \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

($f(x,y)$)

$$\iint_\Sigma 1 \, d\sigma = \iint_D 1 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$$

$$D: \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{4\rho^2 + 1} \cdot \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{(4\rho^2 + 1)^{3/2}}{3/2} \frac{1}{8} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{(2+1)^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{3/2} \cdot \frac{1}{8} \right) d\theta = 2\pi \left(--- \right) ..$$

4) $\Sigma = \{ z = 2 - x - y , \ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{16} \}$ $f(x,y,z) = x + 2y + z - 4$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = 2 - \rho\cos\theta - \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2 - x - y \end{cases} \quad (x,y) \in D = \{ x^2 + y^2 \leq \tfrac{1}{16} \}$$

$$\| \varphi_x \wedge \varphi_y \| = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\iint_\Sigma f(x,y,z) \cdot d\sigma = \iint_D \big(\cancel{x} + 2y + \overbrace{(2 - \cancel{x} - y)}^{z} - 4 \big) \sqrt{3} \, dx \, dy =$$

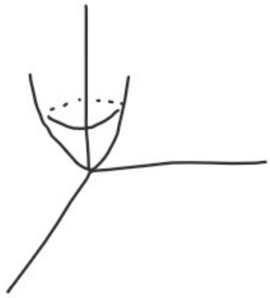
$$= \sqrt{3} \iint_D -2+y \; dx\,dy \qquad D = \left\{ -\tfrac14 \le x \le \tfrac14 ,\ -\sqrt{\tfrac14 - x^2} \le y \le \sqrt{\tfrac14 - x^2} \right\}$$

$$= \sqrt{3} \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac14} (-2+\rho\,\text{sen}\,\theta)\cdot\rho \; d\rho\, d\theta = \sqrt{3}\int_0^{2\pi} \left[-\rho^2 + \frac{\rho^3}{3}\,\text{sen}\,\theta \right]_0^{\frac14} d\theta =$$

$$= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{4^3\cdot 3}\;\text{sen}\,\theta \right) d\theta = \dots$$

$$\Sigma = \left\{ z = x^2+y^2 ,\quad 1 \le z \le 4 \right\} \qquad f(x,y,z) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$1 \le x^2+y^2 \le 4$$



$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \qquad (x,y) \in D = \left\{ 1 \le x^2+y^2 \le 4 \right\}$$

$$\|\varphi_x \wedge \varphi_y\| = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

$$\iint_\Sigma \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) d\sigma = \iint_D \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\; dx\,dy$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 \text{arctg}\Big(\overbrace{\frac{\cancel{\rho}\,\text{sen}\,\theta}{\cancel{\rho}\cos\theta}}^{tg(\theta)}\Big)\sqrt{1+4\rho^2}\;\rho\; d\rho\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 \theta\cdot\sqrt{1+4\rho^2}\;\rho\; d\rho\, d\theta = \dots$$

---

cenni di eq. differenziali $\qquad y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

esempio:

$$y'(x) + \frac{2x}{x^2+1}\, y(x) = 0$$

È un'equazione in cui compare una funzione y con le sue derivate

una soluzione è:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2+1} ; \qquad y'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\overbrace{-\frac{2x}{(x^2+1)^2}}^{y'} + \frac{2x}{x^2+1}\cdot \overbrace{\frac{1}{x^2+1}}^{y} = 0$$

DEF

sia $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$.

una eq. del tipo $F(x, y(x), \dots y^{(n)}(x)) = 0$ è un eq. differenziale ordinarie di ordine n

l' integrale generale è l'insieme di tutte le soluzioni

esempio:

$y''(x) = 3$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 3$ $\qquad \int y'' dy = \int 3\, dx$ $\qquad y' = 3x + k$

$\frac{dy}{dx} = 3x + k$ $\qquad \int y' dy = \int 3x + k\, dx$ $\qquad y = 3x^2 + kx + c$

eq. a variabili separabili: $\quad y'(x) \cdot g(y(x)) = f(x)$

1) $\quad y'(x) = y(x)$ $\qquad \frac{y'(x)}{y(x)} = 1$ $\qquad \int \frac{dy}{y} = \int 1\, dx$

$\ln|y| = x + k$ $\qquad |y| = e^{x+k}$

2) $\quad y' = (1+y)x$ $\qquad \frac{y'}{1+y} = x$ $\qquad \int \frac{dy}{1+y} = \int x\, dx$

$\ln(1+y) + c = \frac{x^2}{2} + k$ $\qquad \ln(1+y) = \frac{x^2}{2} + \underbrace{(k - c)}_{a}$ $\qquad \ln(1+y) = \frac{x^2}{2} + a$

$1 + y = e^{\frac{x^2}{2} + a}$ $\qquad y = e^{\frac{x^2}{2} + a} - 1$

3) $\quad y' = y \operatorname{sen} x$ $\qquad \frac{y'}{y} = \operatorname{sen} x$ $\rightarrow$ $\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{sen} x\, dx$

$\ln(y) = -\cos x + k$ $\qquad y = e^{-\cos x + k}$

Teorema di Cauchy

$F: (a,b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

se esistono le derivate parziali rispetto a x e y (di F), continue, ed F è continua, allora esiste un'unica soluzione esempio:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} \cdot y \\ y(3) = 2 \end{cases}$$

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$ $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x}\, dx$ $\ln(y) = \ln(x) + K$

$y = e^{\ln(x)+K} = e^{\ln(x)} \cdot e^{K} = x \cdot e^{K}$

$\left(\ln|y| = \ln|x| + K \quad |y| = e^{\ln|x|+K} \quad (x, y \text{ nel valore iniziale sono } > 0) \right)$

$y = x \cdot e^{K}$ $y(3) = 3 \cdot e^{K} = 2$ $3e^{K} = 2$ $e^{K} = \frac{2}{3}$

$K = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$ soluzione: $y(x) = x\, e^{\ln(\frac{2}{3})} = x \cdot \frac{2}{3} = \frac{2x}{3}$

$\boxed{y(x) = \frac{2}{3}x}$ soluzione (unica)

eq. differenziali lineari: $y^{(n)} \cdot a_n(x) + y^{(n-1)} \cdot a_{n-1}(x) + \ldots + y' \cdot a_1(x) + y \cdot a_0(x) + a(x) = 0$

$y^{(5)} \cdot 3x^2 + y^{(3)} \ln x + y' e^{x} + y + e^{x} = 0$

eq. differenziali lineari a coefficienti costanti

$y^{(5)} + y^{(4)} + 5y + 3y' = x^2$

eq. differenziali lineari a coefficienti costanti, omogenee

$y^{(5)} + y^{(4)} + 5y + 3y' = 0$

metodo dell' eq. caratteristica

"trasformo" l'equazione differenziale in un'equazione polinomiale in cui l'ordine della derivata diventa il grado della potenza. Risolvo l'equazione polinomiale: se trovo tutte radici singole, le inserisco moltiplicate ad x come argomento dell'esponenziale. L'integrale generale sarà dato da una combinazione lineare con parametri K1, .., Kn di tali esponenziali. Se ci sono radici doppie, queste andranno ripetute due volte, e in una delle due l'esponenziale andrà moltiplicato per x.

$\lambda^5 + \lambda^4 + 5\lambda^0 + 3\lambda = 0$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$

$y = K_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + \ldots + K_5 \cdot e^{\lambda_5 x}$

esempio

$y'' - 3y' + 2y = 0$ $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \frac{3-1}{2} = 1 \\ \ldots \end{cases}$

esempio

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \frac{3-1}{2} = 1 \\ \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$$

$$y(x) = k_1 \cdot e^{1 \cdot x} + k_2 \cdot e^{2 \cdot x}$$

$$y'(x) = k_1 e^{x} + 2k_2 e^{2x}$$

$$y''(x) = k_1 e^{x} + 4k_2 e^{2x}$$

$$\overbrace{k_1 e^{x} + 4k_2 e^{2x}}^{y''} \overbrace{- 3k_1 e^{x} - 6k_2 e^{2x}}^{-3y'} + \overbrace{2k_1 e^{x} + 2k_2 e^{2x}}^{2y} =$$

$$e^{x}(\underbrace{k_1 + 2k_1 - 3k_1}_{0}) + e^{2x}(\underbrace{4k_2 - 6k_2 + 2k_2}_{0}) = 0$$

esempio

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad (\lambda - 1)^2 = 0 \qquad \lambda = 1$$

$$y(x) = k_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + k_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_1 x}$$

$$y(x) = k_1 e^{1 \cdot x} + k_2 \cdot x \cdot e^{1 \cdot x}$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 3)^2 (\lambda - 2)^2 = 0 \qquad k_1 e^{x} + k_2 e^{-3x} + k_3 \cdot x \cdot e^{-3x} + k_4 e^{2x} + k_5 \cdot x \cdot e^{2x}$$

1 simpola, −3 doppia, 2 doppia

per un eq. omogenea, una combinazione lineare di soluzioni è una soluzione. $\dots + y''' \cdot a_3(x) + y'' a_2(x) + y' a_1(x) + y \cdot a_0(x) = 0$

y_1 è una soluzione, y_2 è una soluzione $\Longrightarrow$

$y_s = a y_1 + b y_2$ è una soluzione

$$y_s''' \cdot a_3(x) + \dots + y_s \cdot a_0(x) = (a y_1 + b y_2)''' \cdot a_3(x) + \dots + (a y_1 + b y_2) \cdot a_0(x) =$$

$$= a \cdot y_1''' a_3(x) + b y_2''' a_3(x) + \dots + a y_1 a_0(x) + b y_2 a_0(x) =$$

$$a\left(y_1''' a_3(x) + \dots + y_1 a_0(x)\right) + b\left(a_3(x) y_2''' + \dots + y_2 a_0(x)\right) =$$

$a \cdot (0) + b(0) = 0$ $\square$

inoltre, se considero la non omogenea

$$\dots + y''' \cdot a_3(x) + y'' \cdot a_2(x) + y' a_1(x) + y \cdot a_0(x) = f(x)$$

il suo integrale generale è dato dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea associata + una soluzione particolare

$$y'' - 3y' + 2y = x$$

calcolo l'int. generale dell'omogenea associata:

$y'' - 3y' + 2y = 0$ $\quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

$$y_0(x) = k_1 e^{2x} + k_2 e^{x} + y_s$$

metodo di somiglianza:

$y_s(x) = ax + b$ $\quad y_s'(x) = a$ $\quad y_s''(x) = 0$ $\quad y_s'' - 3y_s' + 2y_s = ?$

$$0 - 3(a) + 2(ax + b) = -3a + 2ax + b$$

deve essere uguale a x!

$\begin{cases} 2a = 1 \\ -3a + b = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ -3\frac{1}{2} + b = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$

$y_s(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ è soluzione particolare di $y'' - 3y' + 2y = x$

quindi l'integrale generale sarà $y(x) = k_1 \cdot e^{2x} + k_2 e^{x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$