

Integrale particolare con il metodo della variazione delle costanti

Se $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$ sono soluzioni particolari dell'equazione differenziale di ordine n , allora l'integrale particolare $y_1(x)$ legato al termine $b(x)$ è dato da:

$$\bar{y} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x) \quad (1)$$

Dove $C_1(x), C_2(x), C_3(x), \dots, C_n(x)$ sono funzioni di x e si determinano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) + C'_2(x)y_2(x) + \dots + C'_n(x)y_n = 0 \\ C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) + C'_2(x)y'_2(x) + \dots + C'_n(x)y'_n = 0 \\ C'_1(x)y''_1(x) + C'_2(x)y''_2(x) + C'_2(x)y''_2(x) + \dots + C'_n(x)y''_n = 0 \\ \dots \\ C'_1(x)y^{(n-1)}_1(x) + C'_2(x)y_2(x) + C'_2(x)y^{(n-1)}_2(x) + \dots + C'_n(x)y^{(n-1)}_n = b(x) \end{cases}$$

È un sistema in cui compaiono come incognite $C'_1(x), C'_2(x), C'_3(x), \dots, C'_n(x)$, mentre gli integrali particolari compaiono con derivata crescente dalla prima riga all'ultima fino alla derivata di ordine $n-1$.

Nell'ultima riga a secondo membro si inserisce il termine $b(x)$ nelle precedenti a secondo membro si inserisce 0.

Per determinare i coefficienti $C_1(x), C_2(x), C_3(x), \dots, C_n(x)$ si integrano le $C'_1(x), C'_2(x), C'_3(x), \dots, C'_n(x)$ soluzioni del sistema

Esempio

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y''' - 2y'' + y' = e^x$$

Scrivo l'equazione omogenea associata

$y''' - 2y'' + y' = 0$ e l'equazione caratteristica $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ dalla quale ottengo le soluzioni

$\lambda = 0, \lambda = 1$ con molteplicità 2

Per cui

$$y_0 = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x$$

Calcolo ora l'integrale particolare formula (1)

$$\bar{y} = C_1(x)1 + C_2(x)e^x + C_2(x)xe^x$$

Imposto il sistema

$$\begin{cases} C'_1(x)1 + C'_2(x)e^x + C'_3(x)xe^x = 0 \\ C'_1(x)0 + C'_2(x)e^x + C'_3(x)(x+1)e^x = 0 \\ C'_1(x)0 + C'_2(x)e^x + C'_3(x)(x+2)e^x = e^x \end{cases}$$

Si calcola il determinante Wronskiano (vedere documento "Determinante di una matrice")

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & xe^x \\ 0 & e^x & (x+1)e^x \\ 0 & e^x & (x+2)e^x \end{vmatrix} = 1[(x+2)e^{2x} - (x+1)e^{2x}] = e^{2x} \neq 0$$

Noto il determinante $W(x)$ si calcolano i diversi coefficienti $C'_1(x), C'_2(x), C'_3(x)$

$$C'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x & xe^x \\ 0 & e^x & (x+1)e^x \\ e^x & e^x & (x+2)e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{e^x[e^{2x}(x+1) - xe^{2x}]}{e^{2x}} = e^x$$

Per cui

$$C_1(x) = \int e^x dx = e^x$$

$$C'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & xe^x \\ 0 & 0 & (x+1)e^x \\ 0 & e^x & (x+2)e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{1[-e^{2x}(x+1)]}{e^{2x}} = -x - 1$$

$$C_2(x) = \int -x - 1 dx = -\frac{x^2}{2} - x$$

$$C'_3(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{1[e^{2x}]}{e^{2x}} = 1$$

$$C_3(x) = \int 1 dx = x$$

Per cui $\bar{y} = C_1(x)1 + C_2(x)e^x + C_3(x)xe^x$ ossia $\bar{y} = e^x + \left(-\frac{x^2}{2} - x\right)e^x + x^2e^x$

La soluzione complessiva

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + e^x + \left(-\frac{x^2}{2} - x\right) e^x + x^2 e^x$$

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + e^x + -x e^x + \frac{x^2}{2} e^x$$

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1 + (C_2 + 1) e^x + (C_3 - 1) x e^x + \frac{x^2}{2} e^x$$