

Successioni numeriche

1

Successioni numeriche

Definizione

Una successione $\{a_n\}$ è una funzione che ad ogni numero naturale n associa un numero reale a_n

$$\{a_n\}: \begin{array}{l} n \rightarrow a_n \\ 0 \rightarrow a_0 \\ 1 \rightarrow a_1 \\ \vdots \\ n \rightarrow a_n \end{array} \quad \text{Es.} \quad \left\{ \frac{1}{n} \right\}: \begin{array}{l} n \rightarrow a_n \\ 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow \frac{1}{2} \\ \vdots \\ n \rightarrow \frac{1}{n} \end{array}$$

2

Successioni numeriche

Definizione

Il limite della successione $\{a_n\}$ è il numero reale a (si dice anche che a_n converge ad a) e si indica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad (a_n \rightarrow a)$$

se, qualunque sia $\varepsilon > 0 \exists v_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > v_\varepsilon$.

3

Successioni numeriche

Es. tramite la definizione dimostriamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Si ha $|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Quindi basta porre $v = \frac{1}{\varepsilon}$ e si ha che $\forall n > v \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

4

Successioni numeriche

Se il limite della successione $\{a_n\}$ è un numero finito allora la successione si dirà **convergente** (o **regolare**);

se il limite di $\{a_n\}$ è infinito, allora a_n si dirà **divergente** (**regolare**);

se invece tale limite non esiste, allora $\{a_n\}$ si dirà **indeterminata** (o **irregolare**);

La definizione di limite infinito per la successione $\{a_n\}$ e i teoremi sui limiti sono analoghi a quelli visti per le funzioni.

5

Successioni numeriche

Definizione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists N = N(K) : \forall n \geq N : a_n > K$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall H > 0 \exists M = M(H) : \forall n \geq M : a_n < -H$$

Teorema dell'unicità del limite.

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Rightarrow a$ è unico.

6

*Successioni numeriche**Teorema della permanenza del segno*

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$ (o $a < 0$)

Allora $a_n > 0$ definitivamente (o $a_n < 0$).

Per le successioni, «definitivamente» significa per n abbastanza grande.

Es. $n - 10\sqrt{n}$ è definitivamente positiva per $n > 100$

7

*Successioni numeriche**Teorema*

Ogni successione $\{a_n\}$ si dice limitata se $\exists M$:

$$|a_n| \leq M.$$

Es. * $\{a_n\} = (-1)^n$ è limitata: $|a_n| = 1$ ($M=1$),

Ma non ha limite, infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \text{ non esiste}$$

* $\{a_n\} = \sin n$ è limitata ma non ammette limite

8

*Successioni numeriche**Teorema del confronto (o dei due carabinieri)*

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre successioni tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a,$

allora anche la successione b_n è convergente e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a.$$

9

*Successioni numeriche**Teorema*

Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, e se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty,$ allora
anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty,$

Analogamente se $b_n \leq c_n$ e $c_n \rightarrow -\infty$ allora anche $b_n \rightarrow -\infty$

10

Successioni numeriche

Teorema

Se $\{a_n\}$ è una successione limitata e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, allora la successione prodotto $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$.

$$\text{Es. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin n) \frac{1}{n} = 0$$

in quanto $\sin n$ è limitata: $|\sin n| \leq 1$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

11

Successioni numeriche

Successioni infinitesime (cioè convergenti a zero) o infinite (cioè divergenti) possono essere confrontabili come si è fatto per le funzioni. Le definizioni sono analoghe.

Si ha, anche per le successioni

$$\ln n \ll n^b \ll a^n \ll n! \ll n^n, \quad b > 0, a > 1.$$

Anche per le successioni valgono le operazioni con i limiti e le convenzioni con $l' \infty$, visti per le funzioni.

12

Successioni numeriche

Anche i limiti notevoli visti per le funzioni, si adattano alle successioni

$$\text{Es.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$$

13

Successioni numeriche

Definizione

La successione $\{a_n\}$ si definisce

monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

monotona strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

monotona decrescente se $a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

monotona strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ogni successione monotona ammette limite. In particolare ogni successione monotona limitata è convergente (cioè ammette limite finito: per es $l = \sup a_n$ se a_n è limitata e crescente)

14

Progressione geometrica

$$a_n = q^n, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q \text{ ragione della successione}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 \text{ se } |q| < 1 \\ 1 \text{ se } q = 1 \\ +\infty \text{ se } q > 1 \\ \text{non esiste se } q \leq -1 \end{cases}$$

15

Esercizio. Calcolare il limite:

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0 \end{aligned}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(\sqrt[n]{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

16