

# Analisi Superiore 1

## Programma dettagliato (a.a. 2023/2024)

Nel seguito trovate il programma (molto) dettagliato del corso di *Analisi Superiore 1* relativo all'a.a. 2023/2024, che riporta esattamente ciò che è stato trattato durante le lezioni. I teoremi, le proposizioni e le proprietà da dimostrare sono seguite dalla dicitura “c.d.” che sta per “con dimostrazione”; nelle parti in cui non viene specificato, significa che è richiesto solo l’enunciato o la conoscenza dei risultati generali. Alcune dimostrazioni non sono state fatte esplicitamente durante le lezioni e sono state assegnate allo studente per esercizio.

### **Introduzione all’analisi complessa.**

Richiami: il campo dei numeri complessi; proprietà e operazioni con i numeri complessi; il piano di Gauss; forma cartesiana, forma trigonometrica e forma esponenziale di un numero complesso; il piano complesso esteso. Le serie di potenze in campo complesso e richiami sulle proprietà della funzione somma di una serie di potenze. Funzioni analitiche in  $\mathbb{R}$  e criterio di analiticità. La funzione esponenziale complessa e il suo sviluppo in serie di potenze.

Funzioni di variabile reale a valori complessi e funzioni di variabile complessa a valori complessi; intorno sferico di centro  $z_0$  e raggio  $r$  e topologia in  $\mathbb{C}$ ; limiti di funzioni complesse: definizioni ed esempi; funzioni limitate; funzioni continue; funzioni derivabili in senso complesso; definizione di funzione olomorfa e di funzione intera; algebra delle derivate; derivata di funzione composta; derivata di funzione inversa; legame tra derivabilità in senso complesso e continuità (c.d.); esempi. Differenziabilità in senso complesso e relazione con derivabilità (c.d.); relazione tra derivabilità (in senso complesso) e differenziabilità (in senso reale) in due variabili e relazioni di Cauchy-Riemann (c.d.); funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  e funzioni  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  derivabili; legame tra derivabilità della funzione e delle sue componenti: esempi; esempi di funzioni derivabili e non; relazione tra il modulo della derivata di una funzione derivabile e il determinante jacobiano della funzione vettoriale ad essa associata; condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari; condizione necessaria affinché una funzione derivabile in un dominio sia costante

(c.d.); esempio di utilizzo di questa proprietà; una funzione definita in un dominio e a valori reali (o a valori immaginari puri), è derivabile se e solo se è costante.

Polinomi complessi in  $x$  e  $y$  e polinomi in  $z$ ; l'operatore di Cauchy-Riemann e il suo utilizzo per la definizione di olomorfia di una funzione; verifica della derivabilità di una funzione tramite le condizioni di Cauchy-Riemann, e tramite l'operatore di Cauchy-Riemann; funzioni olomorfe e funzioni analitiche; esempio di funzione derivabile in un punto ma non analitica in tale punto.

Alcune particolari funzioni complesse: funzioni polinomiali e loro zeri; funzione esponenziale complessa, serie esponenziale e proprietà; funzioni trigonometriche e le funzioni iperboliche complesse e loro proprietà; proprietà delle funzioni trascendenti elementari: sviluppi in serie, relazioni fondamentali, non limitatezza, periodicità e zeri.

La funzione determinazione principale della radice quadrata di  $z$  come inversa della funzione  $f(z) = z^2$  definita nel semipiano destro; funzione radice principale  $n$ -esima complessa. Funzioni polidrome e loro caratteristiche; confronto tra le multifunzioni di variabile reale e le multifunzioni di variabile complessa; determinazioni della multifunzione radice  $n$ -esima complessa. Punto di diramazione della multifunzione radice quadrata e linea di diramazione; continuità delle determinazioni nel piano complesso tagliato lungo una semiretta uscente dall'origine. La multifunzione logaritmo complesso; la determinazione principale del logaritmo complesso come inversa dell'esponenziale con dominio ristretto, e sue proprietà; la multifunzione  $z^w$ : casi particolari ed esempi; calcolo delle derivate della radice  $n$ -esima complessa e del logaritmo complesso anche utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari.

Funzioni armoniche e loro legame con le funzioni olomorfe; armoniche elementari; esistenza dell'armonica coniugata di una funzione armonica in un aperto semplicemente connesso.

Curve nel piano complesso; mappe conformi: funzioni olomorfe con derivata non nulla conservano gli angoli in ampiezza e in verso (c.d.); trasformazioni conformi viste come cambi di coordinate; utilizzo delle trasformazioni conformi per risolvere il problema del Dirichlet-Laplaciano; Teorema della mappa di Riemann; trasformazione di rette verticali e orizzontali tramite

trasformazioni conformi; linee di livello delle parti reale e immaginaria di una trasformazione conforme; esempi: le funzioni  $f(z) = z^2$  e  $f(z) = e^z$ ; potenziale complesso e moto piano stazionario di un fluido incomprimibile e irrotazionale, linee equipotenziali e linee di corrente. Analisi complessa in un'opera d'arte: *La Galleria di stampe* di Escher.

Integrali di funzioni complesse lungo curve in  $\mathbb{C}$ ; proprietà dell'integrale: linearità rispetto alla funzione integranda, linearità rispetto al cammino di integrazione, invarianza per curve equivalenti; stima dell'integrale di  $f(z)$  lungo una curva in funzione della lunghezza della curva (disuguaglianza di Darboux); esempi.

Funzioni primitive; definizione; primitive in un dominio (c.d.); condizione necessaria per l'esistenza di primitive (c.d.); teorema fondamentale del calcolo integrale in  $\mathbb{C}$  (c.d.); legame degli integrali curvilinei di funzioni complesse con integrali curvilinei di forme differenziali lineari piane; esempi. Condizione sufficiente per l'esistenza di primitive in un dominio semplicemente connesso; differenza tra esistenza di primitive per funzioni reali di variabile reale e per funzioni complesse di variabile complessa; primitive in un insieme semplicemente connesso; esempi; primitive globali e primitive "locali"; teorema di Morera (c.d.); Primo Teorema di Cauchy con due tipologie di ipotesi (interno di curve chiuse contenuto nel dominio di olomorfia e domini semplicemente connessi); prima formulazione e dimostrazione con l'utilizzo del teorema di Gauss-Green nel piano; forma complessa della formula di Gauss-Green; seconda formulazione con ipotesi di semplice connessione del dominio e dimostrazione; Teorema di Cauchy-Goursat (con ipotesi minime); domini regolari a un sol contorno e a più contorni (domini limitati semplicemente connessi); Teorema di Cauchy per domini limitati con "buchi" (c.d.); Teorema di Cauchy per curve omotope o per circuiti equivalenti (c.d.) e sua utilità; secondo teorema di Cauchy e formula integrale (c.d.); formula integrale per curve non semplici; indice di avvolgimento di una curva chiusa rispetto a un punto; significato della formula integrale come formula di rappresentazione; formula della media o Teorema della media di Gauss; olomorfia della derivata di una funzione olomorfa (c.d.); una funzione olomorfa in un aperto è di classe  $C^\infty$  in tale aperto (c.d.); teorema di Cauchy enunciato in termini di curve omologhe a zero; regolarità delle funzioni olomorfe e confronto col comportamento delle funzioni reali di variabile reale; formula

integrale di Cauchy per le derivate.

Richiami sulle serie di potenze in  $\mathbb{C}$ ; funzioni analitiche in senso complesso; analiticità delle funzioni olomorfe (c.d.); differenza con le funzioni reali di variabile reale: esempio di funzione reale di variabile reale infinitamente derivabile con continuità ma non analitica in  $\mathbb{R}$ ; sviluppi in serie notevoli in campo complesso (serie esponenziale, serie circolari, serie iperboliche, serie geometrica, serie logaritmica e serie binomiale); raggio di convergenza della serie di potenze di una funzione intera; stima di Cauchy per le derivate e confronto con il criterio di analiticità per funzioni infinitamente derivabili in campo reale; disuguaglianze di Cauchy per i coefficienti della serie di potenze di una funzione olomorfa; stime di Cauchy per le derivate; il teorema di Liouville (c.d.) e la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra col suo utilizzo.

Proprietà delle funzioni analitiche: zeri di una funzione olomorfa; zeri di ordine finito e di ordine infinito; una funzione olomorfa in un dominio ammette zeri di ordine infinito se e solo se è nulla in tale dominio (c.d.); l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla in un dominio è un insieme discreto e privo di punti di accumulazione appartenenti al dominio di olomorfia (c.d.); teorema degli zeri per una funzione olomorfa: l'ordine di uno zero di una funzione olomorfa è univocamente determinato; principio di identità per funzioni olomorfe (con varie formulazioni) e suoi corollari (c.d.). Conseguenze del principio di identità per funzioni olomorfe: differenza tra funzioni complesse olomorfe e funzioni reali derivabili; esempi; principio di identità come strumento per dimostrare in  $\mathbb{C}$  alcune identità algebriche che coinvolgono funzioni intere; estensione analitica (o prolungamento analitico) di funzioni analitiche in senso reale; prolungamento analitico di funzioni analitiche in un aperto; esempi; le funzioni trascendenti elementari sono le uniche estensioni analitiche in  $\mathbb{C}$  delle "omonime" funzioni reali di variabile reale; procedimento di estensione analitica di una funzione olomorfa "attorno" a un punto di non derivabilità (isolato); "barriera" (o "frontiera") naturale di singolarità: esempio; funzioni analitiche espresse come somme di serie di potenze formalmente diverse, ma prolungamento analitico l'una dell'altra; multifunzioni analitiche e loro elementi analitici; sviluppi in serie di potenze di una funzione analitica  $f$  che possono convergere in punti non appartenenti al dominio di olomorfia di  $f$ , o che convergono in punti interni

al dominio, ma con somma diversa da  $f$ .

Principio del massimo modulo (c.d.) e suoi corollari in un dominio limitato (c.d.); diverse formulazioni di tale principio e osservazioni; disuguaglianze di Cauchy del massimo modulo.

Serie bilatere e loro convergenza in corone circolari; sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa in una corona circolare (c.d.); univocità dei coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent; parte principale e parte regolare della serie; sviluppi in dischi bucati o in domini privati di un punto; esempi di calcolo dello sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa in una corona circolare; disuguaglianze di Cauchy per le serie di Laurent.

Punti regolari e punti singolari; punti singolari isolati e punti singolari non isolati; esempi; classificazione delle singolarità isolate di una funzione tramite lo sviluppo in serie di Laurent e tramite il comportamento della funzione “vicino” alla singolarità; esempi; teorema di Riemann sulle singolarità eliminabili. Punto singolare isolato all’infinito per funzioni intere; funzioni meromorfe; continuità delle funzioni meromorfe nel piano complesso esteso; una funzione meromorfa in  $\mathbb{C}$  possiede al massimo un’infinità numerabile di poli (c.d.); funzioni razionali; le funzioni razionali sono prive di singolarità essenziali (c.d.); ordine di una funzione razionale; funzioni razionali di ordine 1; zeri e poli di una funzione e del suo reciproco; rapporto di funzioni meromorfe con zeri o poli in comune: regola di de l’Hôpital per funzioni complesse (c.d.); somma, prodotto e quoziente di funzioni meromorfe; sviluppi in serie di Taylor e/o di Laurent di una funzione meromorfa; una funzione non può essere limitata in modulo in un intorno di una singolarità isolata non eliminabile (c.d.).

Comportamento di una funzione in un intorno di una singolarità isolata essenziale: teorema di Casorati (c.d.); teorema di Picard.

Residuo di una funzione in un suo punto singolare isolato; teorema dei residui (c.d.); legame tra olomorfia di una funzione in un punto e residuo nullo in quel punto; residuo in una singolarità eliminabile; formula per il calcolo dei residui in un polo semplice e in un polo di ordine  $m$  (c.d.); residuo nell’origine di una funzione pari; calcolo del residuo di una funzione rapporto di funzioni olomorfe con denominatore che ha uno zero semplice; esempi.

Residuo all’infinito; sviluppo in serie di Laurent di una funzione in un intorno di infinito: parte singolare e parte regolare; esempi; studio del residuo

a infinito di  $f(z)$  col cambio di variabile  $z = \frac{1}{\xi}$ ; teorema della somma dei residui (c.d.) e conseguenze: somma dei residui al finito nulla (e residuo a infinito nullo) di una funzione con un numero finito di singolarità isolate con comportamento asintotico a infinito come  $\frac{1}{|z|^m}$ ,  $m > 1$ ; calcolo di integrali curvilinei tramite il teorema dei residui; teorema dell'indicatore logaritmico o principio dell'argomento (c.d.), motivazione del nome della formula e conseguenze (una funzione meromorfa in  $\mathbb{C}$  con un numero finito di poli ha numero di poli pari al numero di zeri); teorema di Rouché (c.d.) e conseguenza: il teorema fondamentale dell'algebra; esempio di utilizzo del Teorema di Rouché per la localizzazione degli zeri di una funzione olomorfa.

Lemma di Jordan (del grande cerchio) (c.d.) e sue diverse formulazioni. Calcolo di integrali tramite il teorema dei residui, l'applicazione del Lemma di Jordan e gli strumenti dell'analisi complessa: calcolo di integrali di funzioni razionali fratte (in  $\mathbb{R}$ ) in cui il grado del denominatore supera di almeno 2 quello del numeratore (calcolo di integrali in  $\mathbb{R}$  di funzioni prolungabili in  $\mathbb{C}$  con un numero finito di poli che non stanno sull'asse reale, infinitesime a infinito); integrali in  $\mathbb{R}$  "tipo trasformata di Fourier"; Lemma di Jordan del piccolo cerchio (c.d.) e sua applicazione nel calcolo di integrali generalizzati che richiedono di "aggirare" un polo semplice; calcolo di integrali in  $\mathbb{R}$  "tipo trasformata di Fourier della funzione di Gauss"; integrali di Fresnel.

### **Elementi di analisi funzionale.**

Spazi di Banach; proprietà della funzione norma; esempi:  $\mathbb{R}^N$  con la norma euclidea e con altre norme; spazio delle funzioni continue su un compatto con la norma lagrangiana; spazio delle funzioni limitate con la norma del sup; spazi di Lagrange;  $C[a, b]$  con la norma del max e con la norma integrale di ordine 1; spazi normati isomorfi e isometricamente isomorfi; completamento di uno spazio normato; norme equivalenti; norme equivalenti in uno spazio di dimensione finita (c.d.); completezza di uno spazio normato di dimensione finita (c.d.) e corollari per sottospazi di dimensione finita; lo spazio dei polinomi e il teorema di approssimazione di Weierstrass; definizione di spazio di Hilbert.

Disuguaglianze ausiliarie: disuguaglianza di Young (c.d.); disuguaglianze di

Hölder e di Minkowsky.

Operatori lineari tra spazi vettoriali normati e funzionali lineari; operatori limitati e norma di un operatore (definizioni equivalenti); condizione necessaria e sufficiente affinché un operatore sia limitato è che trasformi insiemi limitati in insiemi limitati (c.d.); esempi; esempio di operatore lineare non limitato; limitatezza di un operatore  $A : X \rightarrow Y$  con  $X$  di dimensione finita (c.d.); operatori continui e operatori uniformemente continui; un operatore lineare è limitato se e solo se è continuo (c.d.); lo spazio  $\mathcal{L}(X, Y)$  degli operatori lineari continui; spazio duale e norma duale; completezza di  $\mathcal{L}(X, Y)$  se  $Y$  è uno spazio di Banach (c.d.); operatore lineare prodotto; operatori invertibili; esempi.

Teorema di Helly-Hahn-Banach; Corollario 1 (in uno spazio normato) (c.d.); Corollario 2 (c.d.) (che lega la norma di un elemento dello spazio normato alla norma di un elemento del duale e alla dualità); Corollario 3 (c.d.) (che esprime la norma di un vettore come max); Corollario 4 (condizione di densità di un sottospazio di uno spazio normato). Teorema di Banach-Steinhaus, suo corollario nel caso di una famiglia numerabile di operatori lineari continui (c.d.) e corollari per un sottoinsieme limitato in uno spazio di Banach (c.d.) e nel suo duale (c.d.).

Spazio biduale; iniezione canonica e definizione di spazio riflessivo. Topologia iniziale e convergenza di successioni nella topologia iniziale; topologia debole in uno spazio di Banach; convergenza debole e sue proprietà (c.d.). Equivalenza della topologia debole e della topologia forte in uno spazio normato finito-dimensionale (c.d.); esempi di insiemi non debolmente aperti e non debolmente chiusi in uno spazio di dimensione infinita; non “metrizzabilità” della topologia debole in uno spazio di dimensione infinita; coincidenza di chiusura debole e forte in insiemi convessi; continuità di operatori lineari tra spazi di Banach dotati di topologia forte e/o debole. La topologia debole\* su uno spazio duale e sue proprietà (c.d.); confronto tra topologia debole\*, topologia debole e topologia forte in uno spazio duale; importanza delle topologie deboli; i teoremi di Riesz e di Banach-Alaoglu-Bourbaki; topologie coincidenti in spazi di dimensione finita.

Spazi riflessivi; esempi; Teorema di Kakutani (c.d.); teorema di compattezza debole sequenziale e Teorema di Eberlein-Šmulian; compattezza e compattezza sequenziale in uno spazio metrico e in uno spazio topologico; riflessività

di un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Banach riflessivo (c.d.); legame tra riflessività di uno spazio di Banach e del suo duale (c.d.).

Definizione di spazio separabile e alcune proprietà: sottoinsiemi di spazi separabili; spazi di Banach separabili tali che il duale sia separabile; spazi separabili e riflessivi; metrizzabilità della bolla chiusa unitaria del duale di uno spazio di Banach separabile rispetto alla topologia debole\*; metrizzabilità della bolla chiusa unitaria rispetto alla topologia debole in uno spazio di Banach con duale separabile; successioni limitate sequenzialmente debolmente\* compatte nel duale di uno spazio di Banach separabile.

Definizione di spazio uniformemente convesso; proprietà geometrica dell'uniforme convessità; esempio di norma uniformemente convessa equivalente a una norma che non lo è; Teorema di Milmann-Pettis.

Spazi  $L^p(\Omega)$ . Definizione di spazio misurabile  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ . Spazi  $L^p(\Omega)$  nello spazio misurabile degli insiemi di  $\mathbb{R}^N$  rispetto alla misura di Lebesgue;  $L^p$  è uno spazio vettoriale (c.d.);  $L^p$  è uno spazio normato (c.d.); spazio delle funzioni essenzialmente limitate  $L^\infty$ ; estremo superiore essenziale (definizioni equivalenti); norma in  $L^\infty$  col sup del modulo della funzione nel complementare di un insieme di misura nulla (c.d.); confronto tra sup e sup essenziale di una funzione; sup e sup essenziale per funzioni continue; esempi;  $L^\infty$  è uno spazio normato (c.d.);  $L^\infty$  è uno spazio di Banach (c.d.). Disuguaglianza di Hölder negli spazi  $L^p$  (c.d.) e disuguaglianza di Hölder generalizzata; utilizzo della disuguaglianza di Hölder per dimostrare la disuguaglianza triangolare di Minkowsky nella norma  $L^p$ ; inclusione tra gli spazi  $L^p$  per insiemi di misura finita (c.d.); esempi; disuguaglianza di interpolazione per gli spazi  $L^p$  (c.d.); Teorema di Fischer-Riesz (c.d.); proprietà di sottosuccessioni di successioni convergenti in  $L^p$  (c.d.); ‘convergenza in media’ di indice  $p$ ; spazio delle funzioni a quadrato sommabile. Disuguaglianze di Clarkson (la  $i$ ), per  $2 \leq p < \infty$ , c.d.); riflessività di  $L^p$  per  $1 < p < \infty$  (c.d.) (la prima tramite le disuguaglianze di Clarkson e il Teorema di Milamann-Pettis e la seconda tramite l'operatore  $T : L^p \rightarrow (L^q)^*$ , dove  $q$  è l'esponente coniugato di  $p$ ); Teorema di rappresentazione di Riesz in  $L^p$  per  $1 < p < \infty$  (c.d.); separabilità di  $L^p$  per  $1 \leq p < \infty$ ; proprietà dello spazio  $L^1$ ; Teorema di rappresentazione di Riesz in  $L^1$ ; duale di  $L^1$ ; proprietà dello spazio  $L^\infty$  visto come duale di  $L^1$ ; non separabilità e non riflessività di  $L^\infty$ ; esempio che mostra che per funzionali lineari continui in  $L^\infty$  non vale la formula di

rappresentazione. Risultati di convergenza debole e proprietà riguardanti le topologie deboli negli spazi  $L^p$ .

Definizioni: prodotto di convoluzione, enunciato del teorema di Young e proprietà del prodotto di convoluzione; supporto e supporto essenziale di una funzione; spazio delle funzioni continue a supporto compatto, spazio delle funzioni infinitamente derivabili con continuità a supporto compatto e risultati di densità; spazio delle funzioni localmente  $p$ -integrabili; l'operatore di traslazione, invarianza per traslazioni e continuità per traslazioni negli spazi  $L^p$ .

**La trasformazione di Fourier.** Funzioni Fourier-trasformabili e condizione sufficiente di trasformabilità; trasformazione di Fourier in  $L^1$ ; trasformata di funzioni a valori reali e pari e di funzioni a valori reali e dispari (c.d.); linearità e continuità dell'operatore di Fourier (c.d.); effetto "regolarizzante" della trasformazione di Fourier: esempi; continuità della trasformata di Fourier (c.d.); Teorema di Riemann-Lebesgue (c.d.); proprietà della trasformata di Fourier: riscalamento (c.d.); coniugio (c.d.); traslazione nel tempo (c.d.); traslazione nella frequenza (c.d.); formula di moltiplicazione (c.d.); derivata della trasformata di Fourier (c.d.) e trasformata di Fourier della derivata (c.d.); interpretazione delle formule di derivazione; trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione (c.d.); funzioni antitrasformabili e antitrasformazione di Fourier; formula di simmetria (c.d.) e teorema di inversione; calcolo della trasformata di Fourier della funzione di Gauss con i metodi dell'analisi complessa e con le proprietà della trasformazione di Fourier; esempio di funzione Fourier trasformabile la cui trasformata non è integrabile; esempio di applicazione della formula di simmetria; confronto tra serie e trasformata di Fourier con qualche riferimento alla teoria dei segnali (cenni).

La trasformazione di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$ . Lo spazio di Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  delle funzioni rapidamente decrescenti; una funzione rapidamente decrescente è limitata e integrabile (c.d.); una funzione rapidamente decrescente è Fourier trasformabile e la sua trasformata è anch'essa rapidamente decrescente (c.d.); trasformazione di Fourier nello spazio di Schwartz e Teorema di Plan-

cherel in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ; teorema e identità di Plancherel in  $L^2(\mathbb{R})$ .

Un'applicazione della trasformazione di Fourier all'equazione del calore ("metodo di Fourier").

### **La trasformazione di Laplace.**

Funzioni Laplace-trasformabili e assolutamente Laplace-trasformabili; ascissa di convergenza e trasformata di Laplace nel semipiano di convergenza; ordine esponenziale di una funzione e legame con l'ascissa di convergenza; esempi: trasformata di Laplace della funzione di Heaviside (gradino unitario) e trasformata della funzione esponenziale; impulso di durata  $h$ , impulso unitario e loro trasformate; linearità della trasformazione di Laplace (c.d.); trasformata di Laplace delle funzioni trigonometriche, delle funzioni iperboliche e delle funzioni polinomiali; definizione di segnale (Laplace-trasformabile); limitatezza in modulo della trasformata di Laplace nel semipiano di convergenza (c.d.); trasformata di Laplace  $\mathcal{L}[f](s)$  infinitesima per  $\text{Re}(s)$  tende a infinito (c.d.); legame tra la trasformazione di Laplace e la trasformazione di Fourier (c.d.); proprietà di riscaldamento, di traslazione e di "smorzamento" (c.d.); trasformata di Laplace di un segnale periodico (c.d.); derivata della trasformata di Laplace (c.d.) e derivate di ordine successivo; trasformata della funzione  $\frac{f(t)}{t}$  (c.d.). Trasformata della derivata (c.d.) e trasformata delle derivate successive; prodotto di convoluzione tra segnali localmente integrabili; trasformata di Laplace della convoluzione; trasformata di Laplace dell'integrale (o della primitiva) (c.d.). Antitrasformazione di Laplace; formula di inversione di Riemann-Fourier; determinazione di un segnale continuo tramite la sua trasformata di Laplace; formula di inversione per un segnale continuo a tratti; condizione su una funzione  $F(s)$  complessa, olomorfa su un semipiano, affinché essa sia la trasformata di Laplace di una funzione  $f(t)$ ; formula di inversione di Riemann-Fourier (per funzioni Laplace-trasformabili) ricavata tramite il legame con la trasformazione di Fourier. La formula di inversione di Riemann-Fourier nella ricostruzione della funzione di Heaviside  $H(t)$  (per  $t \neq 0$ ). Confronto tra la trasformazione di Fourier e la trasformazione di Laplace: analogie e differenze.

Antitrasformata di Laplace di funzioni razionali fratte proprie con poli sem-

plici e poli multipli; applicazione della trasformata di Laplace per la risoluzione di alcuni problemi di Cauchy.

### **Testi di riferimento**

#### **Analisi complessa:**

- L.V. Ahlfors, *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, third edition, McGraw-Hill (1979);
- dispense disponibili sul sito docente.

#### **Analisi funzionale:**

- H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations*, Springer, New York (2011);
- dispense disponibili sul sito docente.

#### **Trasformate (e analisi complessa):**

- G.C. Barozzi, *Matematica per l'ingegneria dell'informazione*, Zanichelli (2001);
- dispense disponibili sul sito docente.

Nelle dispense c'è una bibliografia dove vengono forniti altri testi di approfondimento e/o consultazione.