Equazioni differenziali lineari di ordine n

Metodo della variazione delle costanti arbitrarie (*o di Lagrange*)

(*valido per un'equazione differenziale lineare a coefficienti variabili*)

1

Equazioni differenziali lineari di ordine n

Teorema *Siano* $y_1(x),\dots,y_n(x),\ \ x\in I\subseteq R,\ n$ *integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea .*
Siano $c_1(x),\dots,c_n(x),\ n$ *funzioni le cui derivate soddisfano in I il sistema di equazioni lineari in* $c_1'(x),\dots,c_n'(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1+\dots\dots\dots\dots+c_n'(x)y_n=0 \\ c_1'(x)y_1'+\dots\dots\dots\dots+c_n'(x)y_n'=0 \\ \dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ \dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}+\cdots+c_n'(x)y_n^{(n-1)}=\mathrm{b}(x) \end{cases}$$

Allora un integrale particolare dell'equazione differenziale lineare di ordine n è

$$\bar{y}(x)=c_1(x)y_1(x)+\dots+c_n(x)y_n(x)$$

2

Equazioni differenziali lineari, Metodo di Lagrange

Esempio $\quad y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i, \quad y_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

c_1, c_2 *costanti.*

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$$

$$\bar{y}(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$$

$c_1(x), c_2(x)$ *funzioni da determinare*

3

Equazioni differenziali lineari, Metodo di Lagrange

$$\bar{y}(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0 \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

4

Equazioni differenziali lineari, Metodo di Lagrange

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ b(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{1} = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & b(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{1} = 1$$

5

Equazioni differenziali lineari, Metodo di Lagrange

$$c_1(x) = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|, \qquad c_2(x) = \int 1 dx = x$$

$$\bar{y}(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x = \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$$

l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$$

6

Equazioni differenziali lineari, Metodo di Lagrange

Esempio $y''' - 2y'' + y' = e^x$

7

Equazioni differenziali lineari, Metodo di Lagrange

Esempio $y'' + 2y' + y = \dfrac{\ln x}{e^x}$

8