5 Massimi e Minimi relativi, Concavità e Studio di funzione

Esercizio 5.1. Vero o falso?

a. Se $f'(x_0) = 0$, allora $f(x)$ ha in x_0 un punto di massimo o minimo relativo.

b. Una funzione non derivabile in un punto x_0 non può avere un massimo o minimo relativo nel punto.

c. Se la derivata prima di una funzione esiste e non si annulla mai in un intervallo, la funzione non ha massimi o minimi relativi nell'intervallo.

d. Se in un intorno completo del punto x_0 si hanno $f'(x) > 0\ \forall x \neq x_0$ e $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di flesso orizzontale.

e. In un punto di flesso orizzontale le derivate prima e seconda si annullano sempre.

f. Per determinare i flessi di una funzione $f(x)$ basta trovare le soluzioni dell'equazione $f''(x) = 0$.

Esercizio 5.2. Determina i punti di massimo/minimo relativo o flesso orizzontale per le seguenti funzioni:

1) $y = x^4 + 2x$

2) $y = \dfrac{x-3}{(x-2)^3}$

3) $y = 2x \ln x - 5x$

4) $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$

Esercizio 5.3. Determina i punti di flesso delle seguenti funzioni:

1) $y = 2x^3 - 8x$

2) $y = 2x + \dfrac{1}{x}$

3) $y = xe^{-x}$

4) $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$

Esercizio 5.4. Considera la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$$

dove a è un parametro reale non nullo. Determina i valori di a per i quali $f(x)$ ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti di estremo relativo.

Esercizio 5.5. Trova h e k in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + hx + 5}{x^2 + 4x + k}$ abbia un punto di massimo in $M = (-2, -1)$.

Esercizio 5.6. Studia le seguenti funzioni e disegnane il grafico. Specificare gli eventuali asintoti, le regioni di positività/negatività, crescenza/decrescenza e concavità/convessità. Trovarne inoltre gli eventuali punti di massimo, minimo, flesso e punti di non derivabilità.

1) $f(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)^3}$

2) $f(x) = \arctan(1+x^2)$

3) $f(x) = e^x(1-|2x-x^2|)$

4) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

5) $f(x) = \sin(2x)$

6) $f(x) = \dfrac{2e^x+4}{e^x-1}$

Esercizio 5.7 (Bonus)**.** Determina i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ risulti continua e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + b & se\ x \geq 0 \\ \frac{1}{2e^x-1} & se\ x < 0 \end{cases}$$