

4 Limiti e Derivate

Esercizio 4.1. Calcola i seguenti limiti:

1) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4x + 3}{x^2 - 4}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 2^x}{\sqrt{x + 4}}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^x \ln(x)}{2 + x}$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^x}{\ln x} + \frac{2}{x} \right)$

Esercizio 4.2 (Forme Indeterminate). Calcola i seguenti limiti usando l'ordine di infiniti o le loro gerarchie:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 - 3x^4}{2x^2 - 2x + 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3}}{x + 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 6}{3x^2 - 2x + x^3}$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\ln(x + 1)}$

Esercizio 4.3. Calcola la derivata delle seguenti funzioni nei punti indicati affianco usando la definizione (limite del rapporto incrementale):

1. $f(x) = x^3 + 4x + 1, \quad x_0 = 1$

2. $f(x) = 2x - 1, \quad x_0 = 6$

3. $f(x) = \frac{3}{x - 1}, \quad x_0 = 4$

4. $f(x) = e^{x-1}, \quad x_0 = 1$

Esercizio 4.4. Calcolare la derivata nel generico punto delle seguenti funzioni (si sfruttino le derivate note delle funzioni elementari e le proprietà su somma, prodotto, rapporto e funzioni composte):

1) $f(x) = 4x - 9$

7) $f(x) = \frac{x}{x - 2}$

2) $f(x) = 2x^3 - x$

8) $f(x) = \frac{9 - x}{x^2 - 1}$

3) $f(x) = 3 \ln x$

4) $f(x) = 2\sqrt{x}$

9) $f(x) = x \cos x$

5) $f(x) = -x^2 + 4x$

10) $f(x) = (x - 1)e^{-x}$

6) $f(x) = \sin(-x)$

Bonus) $f(x) = |x|$

Esercizio 4.5. Calcola la derivata destra e la derivata sinistra delle funzioni:

$$1) f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \leq 3 \\ x^2 - 9 & \text{se } x > 3 \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \\ x^2 + x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.6 (Derivate di funzioni composte). Calcola $f'(x)$ nei seguenti casi:

$$1) f(x) = 4\sqrt{3x+2} \quad 3) f(x) = e^{4x} + \frac{1}{\sqrt{e^x}}$$
$$2) f(x) = 2 \ln x - \sqrt[4]{\ln^3 x} \quad 4) f(x) = \sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 x$$

Esercizio 4.7. Calcola i seguenti limiti che presentano forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} \quad 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2 - 2x}$$
$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\sin 5x} \quad 6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x}{2x}$$
$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^3 - x^2} \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{2 \ln x}$$
$$4) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-2}}{(x-2)^2} \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cotg x}{\ln 2x^3}$$