

**ESERCITAZIONE N. 5: INTEGRALI**  
**ANALISI MATEMATICA 1 - A.A. 2023/2024**

**FRANCESCO CANNAS AGHEDU**

(1) Calcola i seguenti integrali indefiniti immediati:

(a)

$$\int x^3 dx$$

(b)

$$\int \sqrt{x} dx$$

(c)

$$\int x^{-3} dx$$

(d)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx$$

(e)

$$\int \frac{x^5 + x^4 + 1}{x^2} dx$$

(f)

$$\int \frac{1 + x^3}{2x^2} dx$$

(g)

$$\int \left( \frac{1}{x} + x \right) dx$$

(h)

$$\int \frac{3x^2 + 4x}{x^2} dx$$

(i)

$$\int \frac{1 + x^2}{3x} dx$$

(j)

$$\int (x - \cos x) dx$$

(k)

$$\int \left( \frac{2}{x} + 6e^x \right) dx$$

(l)

$$\int \frac{x^2 - 9}{x + 3} dx$$

(m)

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{2} dx$$

(n)

$$\int \frac{2 \sin^2 x - 4}{\sin^2 x} dx$$

(o)

$$\int \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

(p)

$$\int 1 + \frac{2}{1 + x^2} dx$$

(q)

$$\int 1 - \frac{6}{\sqrt{9 - 9x^2}} dx$$

(r)

$$\int \frac{8x}{x^3 + x} dx$$

(2) Calcola i seguenti integrali indefiniti:

(a)

$$\int (x + 1)^5 dx$$

(b)

$$\int 15\sqrt{6 - 5x} dx$$

(c)

$$\int e^{2x} \sqrt{5 + e^{2x}} dx$$

(d)

$$\int \frac{\ln x}{5x} dx$$

(e)	$\int 6 \sin^5 x \cos x \, dx$	(k)	$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$
(f)	$\int \left( \frac{x^2 + \ln^2 x}{x} \right) \, dx$	(l)	$\int (2x^3 + x)e^{x^4+x^2} \, dx$
(g)	$\int \frac{6x-3}{x^2-x+5} \, dx$	(m)	$\int \sin(4x) \, dx$
(h)	$\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$	(n)	$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$
(i)	$\int 3 \tan x \, dx$	(o)	$\int (x+2) \cos(x^2+4x) \, dx$
(j)	$\int \frac{x+5}{x+3} \, dx$	(p)	$\int \frac{7}{\sin^2(4-7x)} \, dx$
		(q)	$\int \frac{6x}{1+9x^4} \, dx$

(3) Utilizzando il metodo di integrazione per parti, calcola i seguenti integrali:

(a)	$\int x \cos x \, dx$	(g)	$\int \log x \, dx$
(b)	$\int x \log x \, dx$	(h)	$\int \log^2 x \, dx$
(c)	$\int x^2 \sin x \, dx$	(i)	$\int x \sin^2 x \, dx,$
(d)	$\int x^2 e^x \, dx$	(j)	$\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$
(e)	$\int \arcsin x \, dx$	(k)	$\int \frac{\log(1+x)}{x^2} \, dx$
(f)	$\int \arctan x \, dx$	(l)	$\int x \arctan x \, dx$

(4) Calcola, mediante opportuna sostituzione, i seguenti integrali:

(a)	$\int \sqrt{4-x^2} \, dx$	(c)	$\int (x+1)\sqrt{1-x^2} \, dx$
(b)	$\int \sqrt{3-x^2} \, dx$		

(d)

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad t = \sqrt{x}$$

(e)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} dx, \quad t = \sqrt{x}$$

(f)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}} dx, \quad t = \sqrt{x+4}$$

(g)

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} dx, \quad t = x + \sqrt{1+x^2}$$

(h)

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}} - 4}{\sqrt{x}} dx$$

(i)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx, \quad t = \sqrt{x}$$

(j)

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} dx$$

(k)

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$$

(l)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$$

(m)

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx, \quad t = e^x$$

(n)

$$\int \frac{2}{1 + \sin x} dx$$

(o)

$$\int \frac{\sin x + 3}{2 \sin x} dx$$

(p)

$$\int \frac{2}{\sin x} dx$$

(q)

$$\int \frac{4}{1 + \cos x} dx$$

(5) Calcola i seguenti integrali di funzioni razionali:

(a)

$$\int \frac{5}{2x-3} dx$$

(b)

$$\int \frac{x+5}{x+3} dx$$

(c)

$$\int \frac{x}{x-10} dx$$

(d)

$$\int \frac{4x+1}{2x-1} dx$$

(e)

$$\int \frac{4}{x^2-2x} dx$$

(f)

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 6}{x^2 + x} dx$$

(g)

$$\int \frac{3x-9}{x^2-x-2} dx$$

(h)

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+1} dx$$

(i)

$$\int \frac{x^4 + 2x - 1}{x^2 - 1} dx$$

(j)

$$\int \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$$

(k)

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 4}{2x - 3} dx$$

(l)

$$\int \frac{4x+1}{4x^2+4x+1} dx$$

(m)

$$\int \frac{x+2}{x^2+10x+25} dx$$

(n)

$$\int \frac{x+2}{4x^2+9} dx$$

(o)	$\int \frac{2x+3}{x^2-6x+10} dx$	(u)	$\int \frac{x^5}{x^4-1} dx$
(p)	$\int \frac{x+3}{x^2+4x+5} dx$	(v)	$\int \frac{x}{x^4-1} dx$
(q)	$\int \frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2} dx$	(w)	$\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+1} dx$
(r)	$\int \frac{2x}{(x-1)^3} dx$	(x)	$\int \frac{1}{9x^2-6x+5} dx$
(s)	$\int \frac{x+4}{x^3-4x^2+4x} dx$	(y)	$\int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx$
(t)	$\int \frac{1}{x^3+2x^2+2x+1} dx$	(z)	$\int \frac{1}{x^3+x^2} dx$

(6) Riepilogo. Calcola i seguenti integrali:

(a)	$\int \frac{4x}{x^3-3x^2-x+3} dx$	(j)	$\int_0^2 \frac{x-2}{x^2+4x+5} dx$
(b)	$\int \frac{2x+3}{x^3+3x^2-4} dx$	(k)	$\int_0^{\pi/2} e^x \cos(2x) dx$
(c)	$\int \frac{6x-1}{x^3-6x^2+12x-8} dx$	(l)	$\int_0^{\pi/2} e^x \sin(2x) dx$
(d)	$\int \frac{x-3}{x^3+2x^2+x+2} dx$	(m)	$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x+2}{x^2+2} dx$
(e)	$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$	(n)	$\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$
(f)	$\int \frac{e^{2x}}{2e^{2x}-6e^x+5} dx$	(o)	$\int_0^{1/2} \frac{2x^2}{x^4-1} dx$
(g)	$\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin^2 x}{2\cos^2 x} dx$	(p)	$\int_0^1 \frac{e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+1} dx$
(h)	$\int \frac{x+2}{x^2+4x+3} dx$	(q)	$\int_0^{\pi/4} \tan x \ln(\cos x) dx$
(i)	$\int \frac{x+1}{x^2-4x+4} dx$	(r)	$\int_0^1 (x^2+1)e^{-x} dx$

- (7) Calcola l'integrale generalizzato della funzione  $y = x/(1 + x^2)$  sull'intervallo  $[0, +\infty)$ .
- (8) Calcola l'integrale generalizzato della funzione  $y = 1/x$  sull'intervallo  $[0, 1]$ .
- (9) Calcola l'integrale generalizzato della funzione  $y = 1/\sqrt{2-x}$  sull'intervallo  $[1, 2)$ .

(10) Verifica che

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(11) Verifica che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

(12) Verifica che

$$\int_2^{+\infty} (x \log x)^{-1} dx$$

è divergente.

(13) Calcola l'area dei trapezoidi rappresentati nella Figura 1.

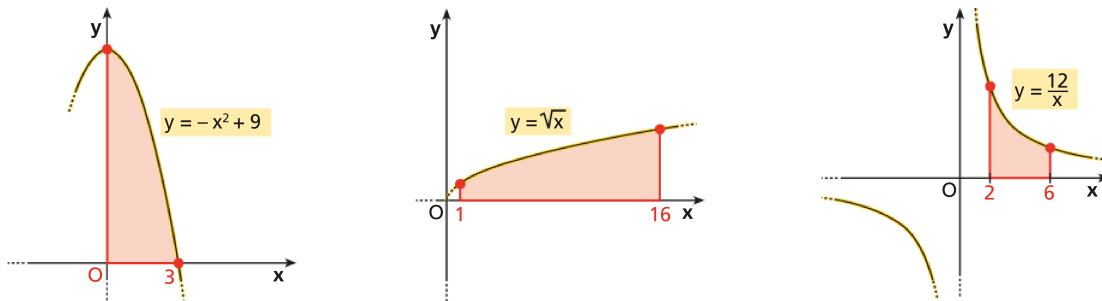


FIGURA 1.

- (14) Determina l'area  $S$  della superficie delimitata dall'asse  $x$  e dal grafico della funzione  $y = x^2 - 9$  definita sull'intervallo  $[0; 2]$
- (15) Determina l'area  $S$  della superficie delimitata dall'asse  $x$  e dal grafico della funzione  $y = e^x - 1$  definita sull'intervallo  $[-1; 1]$
- (16) Calcola l'area delle superfici evidenziate nella Figura 2.
- (17) Calcola l'area della regione finita di piano individuata dalle funzioni  $f(x) = \frac{4}{x}$  e  $g(x) = x^2 - 6x + 9$ .
- (18) Calcola l'area della regione finita di piano individuata dalle funzioni  $f(x) = x^2 - 1$  e  $g(x) = -x^2 - 3x - 1$ .
- (19) Calcola l'area del triangolo mistilineo individuato dall'iperbole equilatera  $y = \frac{6}{x}$  e dalle rette  $y = -\frac{3}{2}x + 6$  e  $y = -\frac{1}{6}x + 2$ .

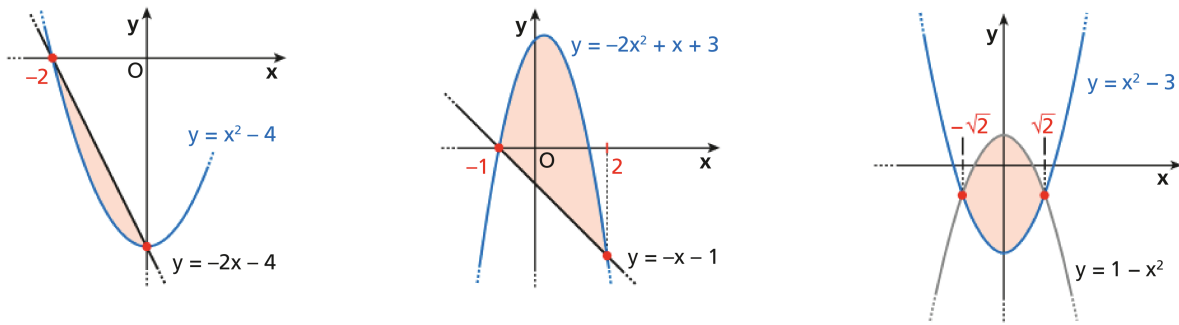


FIGURA 2.

(20) Verifica che le superfici colorate nella Figura 3 hanno area finita e calcolane il valore.

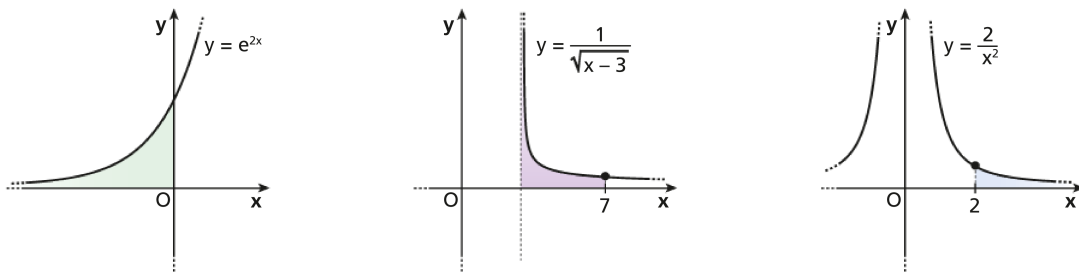


FIGURA 3.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.verde 4A**. Zanichelli
- [2] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.verde 4B**. Zanichelli
- [3] Bertsch M., Dal Passo R., Giacomelli L. **Analisi matematica**. McGraw-Hill Education
- [4] Conti M., Ferrario D. L., Terracini S., Verzini G. **Analisi matematica. Dal calcolo all'analisi, Vol 1**. Apogeo
- [5] Doderò N., Baroncini P., Manfredi R. **Lineamenti di Matematica B**. Ghisetti e Corvi editori
- [6] Marcellini P., Sbordone C. **Esercitazioni di Matematica. Primo volume, parte prima**. Liguori Editore
- [7] Marcellini P., Sbordone C. **Esercitazioni di Matematica. Primo volume, parte seconda**. Liguori Editore
- [8] Marcellini P., Sbordone C. **Esercitazioni di Matematica. Secondo volume, parte prima**. Liguori Editore

INGEGNERIA DELL'ENERGIA ELETTRICA PER LO SVILUPPO SOSTENIBILE, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI  
*Email address:* [francesco.cannasa@unica.it](mailto:francesco.cannasa@unica.it)