

Le frazioni

Un approccio soft
per la primaria

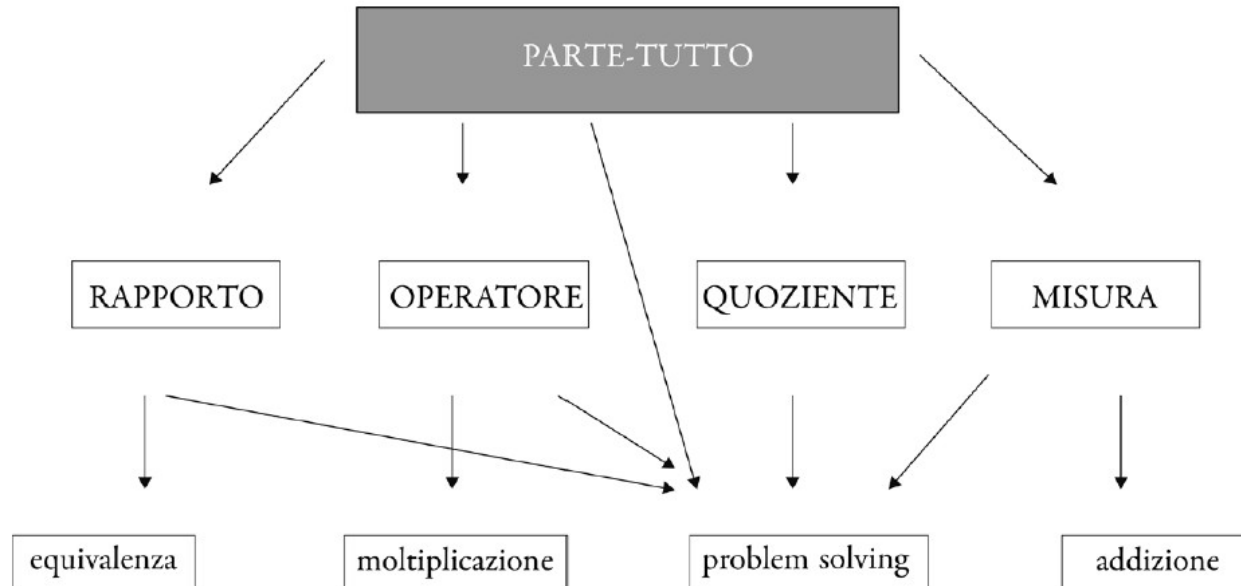
$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{5}$$

$$\frac{1}{4}$$

Il modello di Kieren

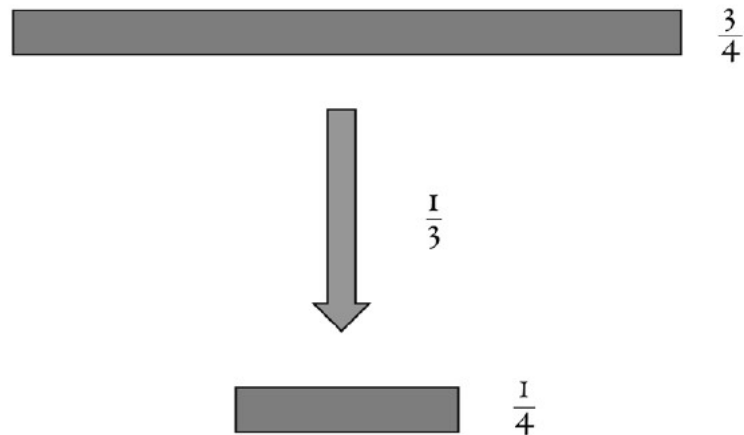
FIGURA 7.1
Frazioni: il modello teorico di Kieren



Fonte: Kieren (1976) e Behr *et al.* (1983)

La frazione come “dilatatore-compressore”


FIGURA 7.2
La frazione come “dilatatore-compressore”



$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Fonte: Behr *et al.* (1993).

Dalla divisione alle frazioni

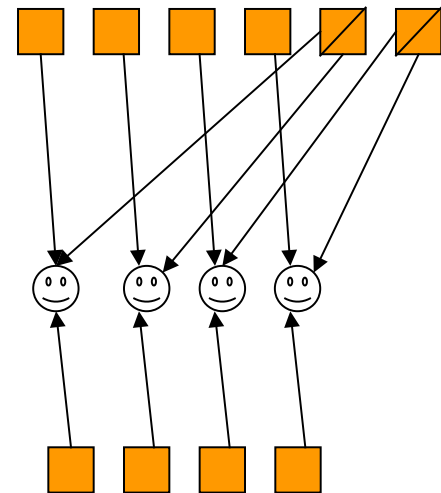
ESEMPIO 7.1 

- a) 4 bambini devono dividersi 12 biscotti in modo che a ciascuno tocchi la stessa quantità. Quanti ne avranno a testa?
- b) 4 bambini devono dividersi 10 biscotti in modo che a ciascuno tocchi la stessa quantità. Quanti ne avranno a testa?
- c) 12 bambini devono dividersi 4 biscotti in modo che a ciascuno tocchi la stessa quantità. Quanti ne avranno a testa?

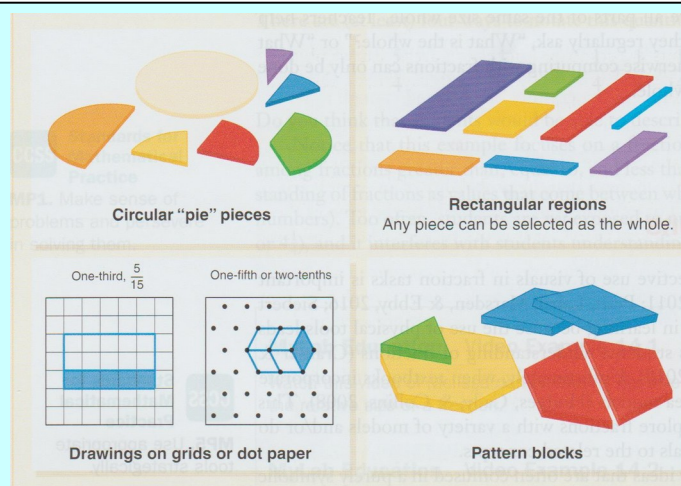
Fonte: Van de Walle, Lovin (2006).

Frazioni: ripartire un oggetto in parti uguali

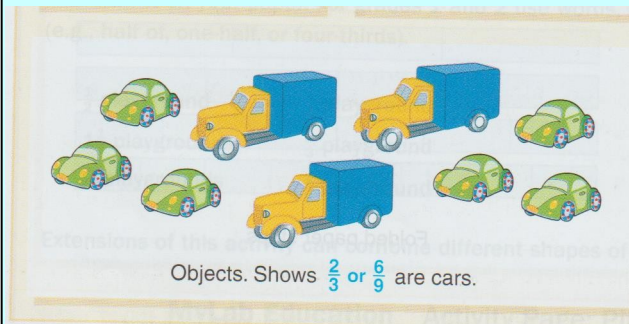
- Il modello iniziale di frazione deriva dalla ripartizione di un'unità (o di m unità) in n parti uguali
- Per sviluppare questo modello sono utili i problemi-storia
- La strategia inizialmente usata dai bambini è il dimezzamento: quindi iniziare con $n = 2, 4, 8$
- Quando $n = 3, 6$ occorre ricorrere a strategie alternative
- Durante le discussioni successive, introdurre il linguaggio delle parti frazionarie ("un terzo", "un quarto" ecc.), senza simbolismo
- E' sbagliato credere che il problema sia tanto più difficile quanto più cresce il denominatore



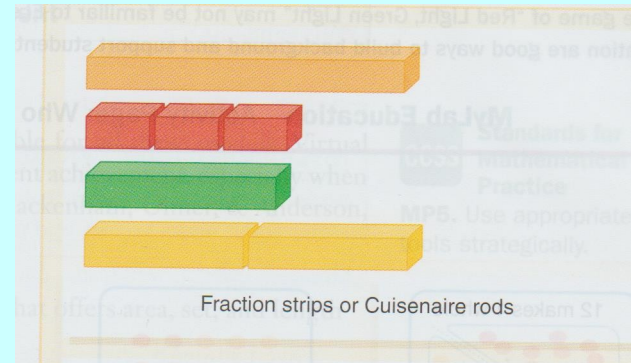
Modelli per le frazioni



Modelli a striscia



Modelli ad area



Modelli insiemistici

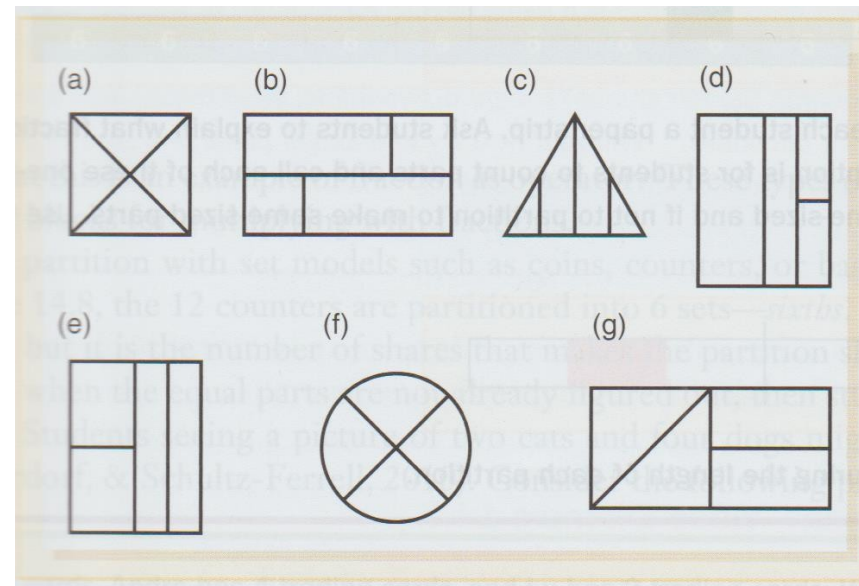
Dalle parti frazionarie ai simboli di frazione

- Saper identificare correttamente parti frazionarie

Le parti sono giuste?

- Saper riconoscere il rapporto tra un insieme di parti frazionarie e un intero

Più o meno di uno?



Dalle parti frazionarie ai simboli di frazione

5 fourths

More than 1 quesadilla or less than 1 quesadilla?

How much more to get to a second whole quesadilla?

3 fourths

Wow! Ten-fourths: How many quesadillas is that?

10 fourths

Is ten-twelfths as much as ten-fourths? Is it as much as five-fourths?

10 twelfths

Dalle parti frazionarie ai simboli di frazione

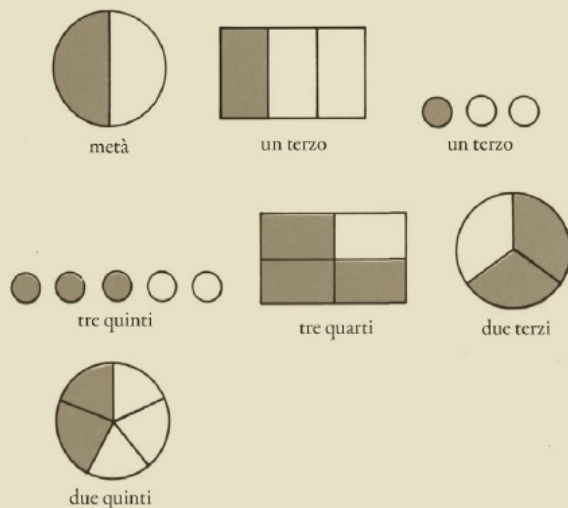
ATTIVITÀ 7.1 ✂

Obiettivo: Saper identificare e denominare correttamente parti frazionarie.

Materiali: Una quantità adeguata di materiali manipolativi di tipo diverso.

Svolgimento: L'insegnante pone il seguente problema: "Tania ha ricevuto una torta divisa in cinque fette uguali. Ne ha mangiati due pezzi. Che frazione della torta ha mangiato?". Poi invita i bambini a rappresentare questa situazione-problema con i materiali che preferiscono o con un disegno. Successivamente, chiede loro di denominare le parti frazionarie ombreggiate in ciascuna figura riprodotta in FIG. 7.6.

FIGURA 7.6

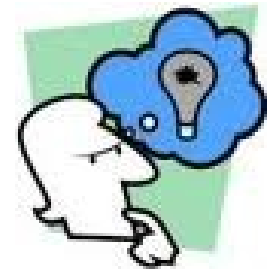


Fonte: Bezuk (1988).

Dalle parti frazionarie ai simboli di frazione

- La notazione standard per le frazioni è una convenzione arbitraria; però non va solo enunciata, bensì esemplificata in dettaglio
- Mostrare vari insiemi di parti frazionarie e scrivere la frazione corrispondente; includere frazioni improprie, apparenti, equivalenti
- Porre la domanda: cosa significa il numero in alto? Cosa significa il numero in basso?

Prova a rispondere tu!



Concetto tradizionale e iterativo di frazione

Concetto tradizionale

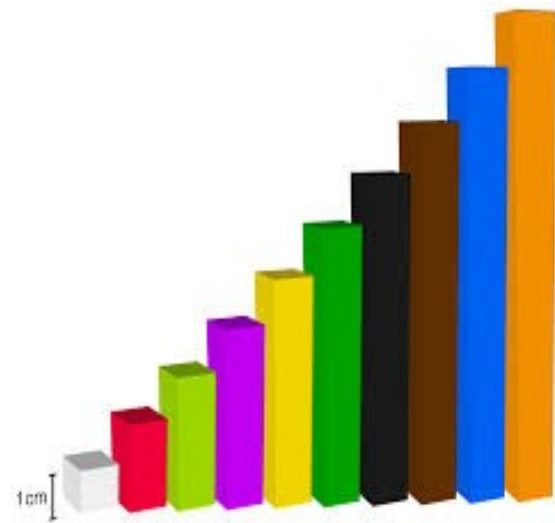
- Il numeratore esprime "quante parti consideriamo"
- Il denominatore esprime "quante parti ci vogliono per fare un intero"
- Corretto, ma fuorviante: a volte tagliamo $1/6$ di torta senza tagliare i rimanenti $5/6$, ma non ci vogliono 2 parti per fare un intero
- Oppure abbiamo una pizza tagliata in 12 pezzi; due pezzi fanno $1/6$, ma non ci vogliono 6 parti per fare un intero

Concetto iterativo

- Il numeratore esprime "quante parti consideriamo"
- Il denominatore esprime "cosa contiamo": se è 4, contiamo "quarti", se è 6, contiamo "sesti", ecc.
- Questa concezione è perfettamente comprensibile alla luce delle attività viste sinora
- Ed è priva degli svantaggi indicati a sinistra...

Dalle parti all'intero, e viceversa

- Difetti del modello ad area tradizionale (il "modello della torta", di forma circolare):
- Buono per lavorare sulle **frazioni unitarie** (frazioni a numeratore 1), carente sugli altri tipi di frazione
- Per lavorare su frazioni più complesse è preferibile usare **modelli ad area diversi** (rettangolari etc.) oppure **modelli a striscia** o **modelli insiemistici**



Dalle parti all'intero, e viceversa

- Dati l'intero e la frazione, trova la parte
- Date la parte e la frazione, trova l'intero

If this rectangle is one whole,
—find one-fourth.
—find two-thirds.
—find five-thirds.

If brown is the whole,
find one-fourth.

If dark green is one whole,
what rod is two-thirds?

If dark green is one whole,
what rod is three-halves?

If 8 counters are a whole set,
how many are in one-fourth of a set?

If 15 counters are a whole,
how many counters make three-fifths?

If 9 counters are a whole,
how many are in five-thirds of a set?

If this rectangle is one-third, what could the whole look like?

If this rectangle is three-fourths, draw a shape that could be the whole.

If this rectangle is four-thirds, what rectangle could be the whole?

If purple is one-third, what rods are the whole?

If dark green is two-thirds, what rod is the whole?

If yellow is five-fourths, what rod is one whole?

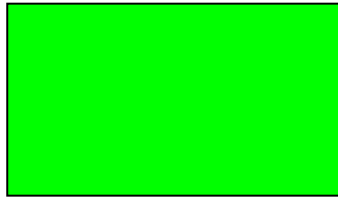
If 4 counters are one-half of a set, how big is the set?

If 12 counters are three-fourths of a set, how many counters are in the full set?

If 10 counters are five-halves of a set, how many counters are in one set?

Dalle parti all'intero, e viceversa

- Dati l'intero e la parte, trova la frazione



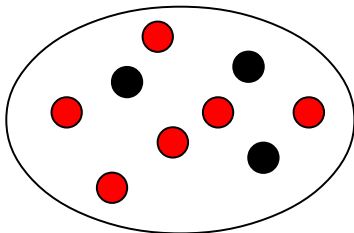
Che frazione del rettangolo verde è rappresentata dal rettangolo rosso?

Se il rettangolo rosso è un intero, che frazione rappresenta il rettangolo verde?



Se la striscia marrone è l'intero, che frazione rappresenta la striscia gialla?

Se la striscia gialla è l'intero, che frazione rappresenta la striscia marrone?



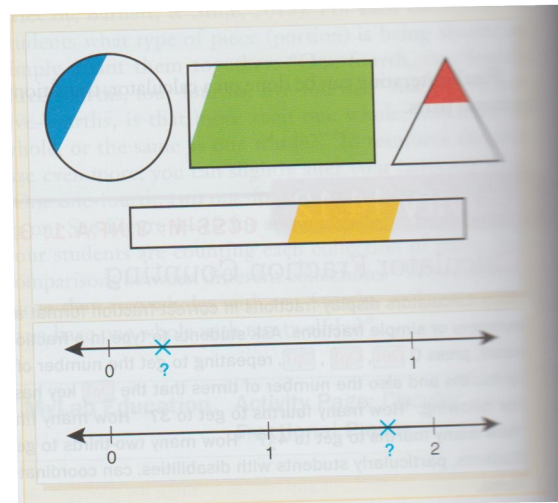
Che frazione di questo insieme rappresentano i gettoni neri?

Il senso del numero per le frazioni: le frazioni-ancora

- I bambini devono acquisire un "sesto senso" intuitivo per le frazioni: capire più o meno quanto è grande una certa frazione, e saper stimare con facilità quale tra due frazioni è più grande
- Le frazioni 0, $\frac{1}{2}$ e 1 sono frazioni-ancora che servono come punti di riferimento. Il bambino impara che $\frac{3}{20}$ è piccola, vicina a 0, mentre $\frac{3}{4}$ sta tra $\frac{1}{2}$ e 1. Gli stessi punti di riferimento aiutano anche con le frazioni improprie

**Zero, un mezzo
o uno?**

Circa quanto?



**Sempre più
vicino...**

Il senso del numero per le frazioni: confronto di frazioni

- Un errore comune dei bambini: 7 è maggiore di 4, quindi i settimi sono più grandi dei quarti
- Un errore comune degli insegnanti: cercare di smontare quest'idea con regole arbitrarie ("Denominatori più grandi significano frazioni più piccole"). Il bambino deve costruire l'idea giusta in prima persona, altrimenti sarà vittima del modello parassita
- La regola usuale per il confronto di frazioni (ridurre a denominatore comune e confrontare i numeratori) è efficace per trovare la risposta giusta, ma non sviluppa il senso del numero per le frazioni
- E' preferibile proporre attività di confronto che elicitino le seguenti quattro strategie. **ATTENZIONE:** evitare di proporle come "i quattro magici modi per confrontare le frazioni". Così non sarebbero altro che quattro regole misteriose in più che i bambini imparerebbero a memoria senza affinare il loro senso numerico

Il senso del numero per le frazioni: confronto di frazioni

1. **Più parti dello stesso intero.** $5/8$ è più di $3/8$ perché è come avere cinque parti della stessa cosa anziché 3
2. **Stesso numero di parti, ma di grandezza diversa.** $3/4$ è più di $3/7$ perché se divido un intero in 7 parti, le parti stesse saranno più piccole che se lo divido in 4 parti
3. **Più o meno di metà, più o meno di un intero.** $3/7$ è meno di $5/8$ perché la prima frazione è minore di $1/2$, l'altra maggiore; $5/4$ è maggiore di $7/8$ perché la prima frazione è maggiore di 1, l'altra minore
4. **Distanza da $1/2$ o da 1.** Perché $9/10$ è maggiore di $3/4$? Non perché 9 e 10 sono numeri grandi (anche se molti bambini risponderanno così), ma perché ognuna di esse dista dall'intero di una parte frazionaria, e i decimi sono più piccoli dei quarti.

Frazioni equivalenti

Come fai a sapere che $4/6 = 2/3$?

Alcune possibili risposte:

1. Sono uguali perché $4/6$ si può semplificare in $2/3$.
2. Se abbiamo 6 oggetti e ne prendiamo 4, otteniamo $4/6$. Ma raggruppandoli a 2 a 2, avremmo 2 gruppi su un totale di 3 gruppi, il che significa $2/3$.
3. Partendo da $2/3$ e moltiplicando numeratore e denominatore per 2, otteniamo $4/6$.
4. Se dividiamo un quadrato in 3 parti e ne coloriamo 2, abbiamo colorato $2/3$ del quadrato. Ma se dividessimo le 3 parti a metà, avremmo colorato $4/6$ del quadrato e l'area colorata rimarrebbe la stessa.

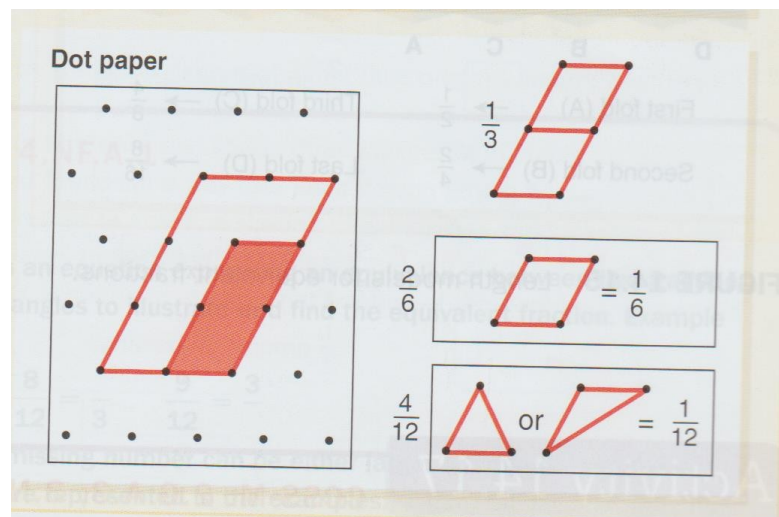
Risposte 1. e 3.: **risposte procedurali**, efficienti ma spiegano poco

Risposte 2. e 4: **risposte concettuali**, poco efficienti ma spiegano molto

Frazioni equivalenti: concetti o procedure?

- Non si abbia troppa fretta di introdurre l'algoritmo: all'inizio i metodi intuitivi sono sempre i migliori
- In terza, la comprensione concettuale e le esplorazioni informali sono più che sufficienti; un approccio algoritmico e formale all'equivalenza tra frazioni può essere lasciato alle classi superiori.

Equivalenze quadrettate



Raggruppa i gettoni

Equivalenze nascoste

Attività di verifica: famiglie di frazioni

1. Ritagliate su un cartoncino colorato 4 cerchi uguali.
2. Prendete un cerchio, piegatelo in due e tagliatelo in due semicerchi. Scrivete su ognuno di essi il nome della parte frazionaria $\frac{1}{2}$, da un lato in parole e dall'altro in simboli.
3. Ripetete col secondo cerchio, ma tagliandolo in 4 parti, e col terzo cerchio, ma tagliandolo in 8 parti.
4. Non tagliate il quarto cerchio. Scrivete comunque "un intero" da un lato e " $\frac{1}{1}$ " dall'altro.

Esempi di domande (in parole o in forma simbolica):

Equivalenza. *Quanti ottavi in un quarto? E in tre quarti? A quanti ottavi è uguale un mezzo?*

Parte-tutto. *Quanti quarti ci vogliono per fare un intero? Cosa ottengo se tolgo sette ottavi a un intero?*

Frazioni improprie. *Quanti interi ho se ho cinque quarti?*

Confronto di frazioni. *E' maggiore cinque sestimi o un mezzo?*

Calcolo con frazioni. *Quanto fa tre quarti più tre quarti? Quanto manca a un intero se ho tre quarti? Trova delle frazioni che insieme danno un intero.*