Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Fisica

Analisi Matematica II

prof. Antonio Greco

Terza parte

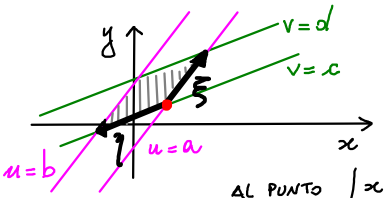
Anno accademico 2023/24

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL DETERMINANTE JACOBIANO NEL CASO $N=k$

PREMESSA: SE $F(x)=Ax$ È LINEARE, CON A MATRICE QUADRATA, ALLORA L'IMMAGINE $F(\Omega)$ DEL PARALLELEPIPEDO $\Omega=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_N,b_N]$ È UN DOMINIO N-DIMENSIONALE A CONDIZIONE CHE $\det A\neq 0$. ANZI, IL VOLUME DI $F(\Omega)$ È

$$|F(\Omega)| = |\Omega|\cdot|\det A|$$

ESEMPIO: PONIAMO $\begin{cases} x = a_{11}u + a_{12}v \\ y = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$ CON $(u,v)\in\mathbb{R}$. PRENDIAMO $\Omega=[a,b]\times[c,d]$



ξ VA DAL PUNTO $\begin{cases} x = a_{11}a + a_{12}c \\ y = a_{21}a + a_{22}c \end{cases}$

AL PUNTO $\begin{cases} x = a_{11}a + a_{12}d \\ y = a_{21}a + a_{22}d \end{cases}$

QUINDI $\xi = (a_{12}, a_{22})(d-c)$

MENTRE η VA DA $\begin{cases} x = a_{11}a + a_{12}c \\ y = a_{21}a + a_{22}c \end{cases}$ AL PUNTO

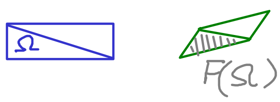
$\begin{cases} x = a_{11}b + a_{12}c \\ y = a_{21}b + a_{22}c \end{cases}$ QUINDI $\eta = (a_{11}, a_{21})(b-a)$

DA CUI $|F(\Omega)| = |\xi\times\eta| =$

$$= \operatorname{abs}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{11} & a_{21} \end{vmatrix}\cdot(b-a)(d-c)$$

$$= \operatorname{abs}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{11} & a_{21} \end{vmatrix}\cdot|\Omega|$$

NOTA: CON IL PROCEDIMENTO DI ARCHIMEDE LA FORMULA SI ESTENDE AL CASO Ω = CERCHIO O ALTRA FIGURA REGOLARE: 1) Ω = TRIANGOLO



2) Ω = POLIGONO REGOLARE (UNIONE DI TRIANGOLI) 3) CERCHIO: QUANDO P_m POLIGONO $\longrightarrow$ Ω CERCHIO

PARTO DA $|F(P_m)| = \operatorname{abs}(\det DF)\cdot|P_m|$

E OTTENGO $|F(\Omega)| = \operatorname{abs}(\det DF)\cdot|\Omega|$

MA 28 NOV 2023

SUPERFICI REGOLARI E AREA

CI LIMITIAMO A $N=2$ E $k=3$: DATE

$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ DIFFERENZIABILI PER OGNI (u,v) IN UN RETTANGOLO $(a,b)\times(c,d)$,

OPPURE UNA STRISCIA $(a,b)\times\mathbb{R}$ OPPURE NEL PIANO $\mathbb{R}^2$, O ANCHE IN UN APERTO DEL PIANO, GUARDO I CAMPI COORDINATI. PONENDO $v=v_0$ (COSTANTE) OTTENGO

$\begin{cases} x = x(u,v_0) \\ y = y(u,v_0) \\ z = z(u,v_0) \end{cases}$ IL CUI VETTORE VELOCITÀ È

$$\xi_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v_0)\right)$$

SERVE CHE $\xi_u \neq 0$ PER OGNI (u,v_0). SE INVECE FISSO $u=u_0$ E LASCIO VARIARE v OTTENGO

$\begin{cases} x = x(u_0,v) \\ y = y(u_0,v) \\ z = z(u_0,v) \end{cases}$ IL CUI VETTORE VELOCITÀ È

$$\xi_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v)\right)$$

E DOVRÀ AVERSI $\xi_v \neq 0$. I CAMPI ξ_u, ξ_v SI DICONO CAMPI COORDINATI. SERVE CHE RISULTI $\xi_u\times\xi_v \neq \bar{0}$.

SI DICE CHE LE EQUAZIONI $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ INDIVIDUANO UNA SUPERFICIE REGOLARE SE $x,y,z(u,v)$ SONO DI CLASSE C^1 E RISULTA $\xi_u\times\xi_v \neq \bar{0}$ IN TUTTI I PUNTI.

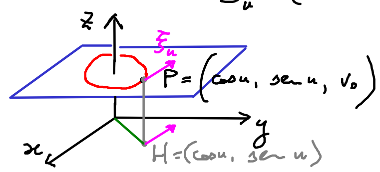
GI 30 NOV 2023

ESERCIZIO: VEDERE SE LE EQUAZIONI

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases}$$

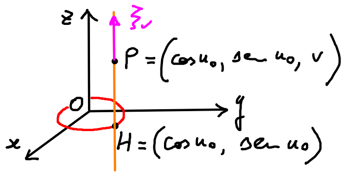
RAPPRESENTANO UNA SUPERFICIE REGOLARE E IN TAL CASO IDENTIFICARLA

SVOLGIMENTO. SE FISSO $v = v_0$ OTTENGO LA CIRCONFERENZA $\begin{cases} x = \cos u \\ y = \operatorname{sen} u, \\ z = v_0 \end{cases}$ $u \in \mathbb{R}$, NEL PIANO $z = v_0$ E IL CAMPO COORDINATO È $\xi_u = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0)$



SE INVECE FISSO $u = u_0$ OTTENGO LA RETTA

$$\begin{cases} x = \cos u_0 \\ y = \operatorname{sen} u_0 \\ z = v \end{cases}$$



E IL CAMPO ξ_v È $\xi_v = (0, 0, 1)$. LA SUPERFICIE È REGOLARE IN QUANTO LE $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ SONO DI CLASSE C^1

E $\xi_u \times \xi_v = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$= \hat{\imath} \cos u + \hat{\jmath} \operatorname{sen} u \neq \bar{0}$ PER OGNI u, v IN QUANTO $\|\xi_u \times \xi_v\| = 1$. LA SUPERFICIE È LA QUADRICA DI EQUAZIONE $x^2 + y^2 = 1$ (CILINDRO).

LA CONTINUITÀ DEI CAMPI COORDINATI CONSENTE DI DEFINIRE L'AREA DELLA PORZIONE $F(\Omega)$ DOVE Ω È UN RETTANGOLO NEL PIANO (u,v) OPPURE UN'ALTRA FIGURA PIANA REGOLARE: L'IDEA ALLA BASE È CHE IL $\|\xi_u \times \xi_v\|$ È IL TASSO DI VARIAZIONE DELL'AREA. INFATTI IL RETTANGOLO $\Omega = [u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$ SI TRASFORMA IN $F(\Omega)$ CHE È EQUIVALENTE AL RETTANGOLO DI LATI a (ARCO) E $h = z_1 - z_0 = v_1 - v_0$ DOVE $a = R \cdot (u_1 - u_0) = u_1 - u_0$

DUNQUE $|F(\Omega)| = |\Omega|$

ESERCIZIO: RIFARE CON $\begin{cases} x = R \cos u \\ y = R \operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases}$ DOVE $R > 0$

ESERCIZIO: RIFARE CON $\begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases}$

DOVE $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, BADARE ALLA REGOLARITÀ NEI PUNTI $(u, 0)$ CON $u \in \mathbb{R}$.

IN GENERALE SI TROVA, CON SUPERFICI DI AREA NOTA, CHE, SE PARTO DA $\Omega = [u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$ DI AREA $(u_1 - u_0)(v_1 - v_0)$ OTTENGO LA PORZIONE DI SUPERFICIE $F(\Omega)$ LA CUI AREA $|F(\Omega)|$ SODDISFA LA RELAZIONE

$$\lim_{\substack{u_1 \to u_0 \\ v_1 \to v_0}} \frac{|F(\Omega)|}{|\Omega|} = \|\xi_u \times \xi_v\|.$$

ESEMPIO: $\begin{cases} x = a_{11} u + a_{12} v \\ y = a_{21} u + a_{22} v \\ z = 0 \end{cases}$

CON $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ E $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$: OTTENGO UNA SUPERFICIE REGOLARE? COME CAMBIANO LE AREE NEL PASSARE DA (u,v) A (x,y,z)?

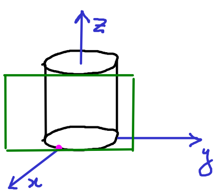
GI 30 NOV 2023

PIANO TANGENTE

È IL PIANO INDIVIDUATO DAI DUE VETTORI ξ_u, ξ_v (SOTTO L'IPOTESI $\xi_u \times \xi_v \neq \bar{0}$).

DETTAGLI: HO UNA SUPERFICIE REGOLARE
$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$
SCELGO UN PUNTO (u_0,v_0) LA CUI IMMAGINE È $P = \big(x(u_0,v_0),\ y(u_0,v_0),\ z(u_0,v_0)\big)$. DETERMINO $\xi_u(u_0,v_0)$ E $\xi_v(u_0,v_0)$ E RESTA INDIVIDUATO IL PIANO
$$(x,y,z) = P + \lambda\, \xi_u(u_0,v_0) + \mu\, \xi_v(u_0,v_0)$$
DOVE $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. I VERSORI NORMALI SONO
$$n^{\pm} = \pm \frac{\xi_u \times \xi_v}{\|\xi_u \times \xi_v\|}.$$

ESEMPIO: SE $\begin{cases} x = \cos u \\ y = \operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases}$ E FISSO (u_0,v_0) OTTENGO $P = (\cos u_0, \operatorname{sen} u_0, v_0)$ E SO CHE $\xi_u = (-\operatorname{sen} u_0, \cos u_0, 0)$, $\xi_v = (0,0,1)$ QUINDI IL PIANO TANGENTE IN P HA EQUAZIONI PARAMETRICHE $(x,y,z) = P + \lambda(-\operatorname{sen} u_0, \cos u_0, 0) + \mu(0,0,1)$. IN PARTICOLARE, SE $u_0 = v_0 = 0$ HO $P = (1,0,0)$ E IL PIANO È $(x,y,z) = P + \lambda(0,1,0) + \mu(0,0,1)$



DUNQUE $\begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

L'IPERSFERA: $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ SI PUÒ TAGLIARE CON IL PIANO $x_4 = c \in (-1,1)$ E SI OTTIENE LA SFERA $\{(x_1,x_2,x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - c^2\}$

GI 30 NOV 2023

CURVE REGOLARI

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO, UNA CURVA REGOLARE È UNA $F : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ DI CLASSE C^1 E TALE CHE $F' \neq 0$ IN $[a,b]$. LA SI PUÒ RAPPRESENTARE CON $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ DOVE $x(t)$, $y(t)$ E $z(t)$ SONO DI CLASSE C^1 E IL VETTORE $v(t) = F'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$ NON SI ANNULLA IN $[a,b]$.

ESEMPIO: FISSANDO $u = u_0$ OPPURE $v = v_0$ IN UNA SUPERFICIE REGOLARE SI OTTENGONO CURVE REGOLARI I CUI VETTORI VELOCITÀ SONO I CAMPI COORDINATI DELLA SUPERFICIE.

MA 05 DIC 2023

USANDO IL VETTORE VELOCITÀ $v(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ NELL'ISTANTE $t = t_0$ SI PUÒ SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE NEL PUNTO $P = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$:
$$\begin{cases} x = x(t_0) + \lambda\, x'(t_0) \\ y = y(t_0) + \lambda\, y'(t_0) \\ z = z(t_0) + \lambda\, z'(t_0) \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
O ANCHE: $(x,y,z) = P + \lambda\, v(t_0)$

LE CURVE SI DICONO SEMPLICI SE, QUALORA SI ABBIA $(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) = (x(t_2), y(t_2), z(t_2))$ CON $t_1 < t_2$, VUOL DIRE CHE $t_1 = a$ E $t_2 = b$. SE CIÒ AVVIENE, LA CURVA SI DICE CHIUSA.

CARATTERIZZAZIONE DELLA TANGENZA:
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3} \Big[x_i(t) - \big(x_i(t_0) + (t - t_0)\, x_i'(t_0)\big)\Big]^2} = o(t - t_0)$$

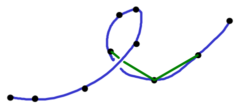
MA 05 DIC 2023

LUNGHEZZA DI UNA CURVA REGOLARE

DATA UNA CURVA REGOLARE $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(t)$, $t \in [a,b]$, DIVIDO L'INTERVALLO IN n PARTI UGUALI MEDIANTE I PUNTI $t_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$, $k=0,\dots,n$

MISURO IL SEGMENTO S_k CHE VA DAL PUNTO $\bar{\gamma}(t_{k-1})$ AL PUNTO $\bar{\gamma}(t_k)$ E SOMMO SU k:

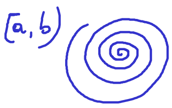
$$\sum_{k=1}^{n} \| \bar{\gamma}(t_k) - \bar{\gamma}(t_{k-1}) \|$$

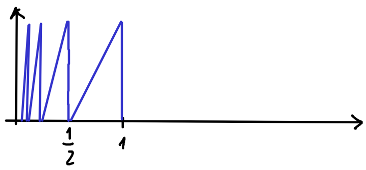


ESSENDO $\bar{\gamma}:[a,b] \to \mathbb{R}^3$ REGOLARE,

IL LIMITE $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \| \bar{\gamma}(t_k) - \bar{\gamma}(t_{k-1}) \|$

ESISTE FINITO E SI CHIAMA LUNGHEZZA





TALE LIMITE È IL VALORE DELL'INTEGRALE

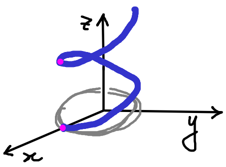
$$\int_a^b \|v(t)\| \, dt.$$

SI NOTI, INFATTI, CHE LA SOMMA

$$\sum_{k=1}^{n} \| \bar{\gamma}(t_k) - \bar{\gamma}(t_{k-1}) \|$$ SI APPROSSIMA CON

$$\sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \|v(t_{k-1})\| \longrightarrow \int_a^b \|v(t)\| \, dt$$

ESEMPIO (ELICA CILINDRICA):
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = t \end{cases}$$



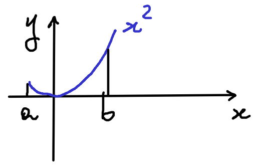
$t \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2+1} \, dt$$ SI PUÒ INTEGRARE ELEMENTARMENTE

$$= 2\pi\sqrt{R^2+1}$$

ESEMPIO: $\bar{\gamma}(t)$ DESCRIVE IL GRAFICO DI UNA $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ DI CLASSE $C^1([a,b])$:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$



$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2} \, dt$$

NOTA: LA SCELTA DEL PARAMETRO t È DISCREZIONALE. AD ESEMPIO, DATA $\bar{\gamma}(t)$ CON $t \in [a,b]$ POSSO ANCHE RAPPRESENTARLA CON $\bar{\gamma}(a+\lambda(b-a))$ CON $\lambda \in [0,1]$. LA LUNGHEZZA NON CAMBIA!

$\frac{d\bar{\gamma}}{d\lambda} = \frac{d\bar{\gamma}}{dt} \cdot (b-a)$ QUINDI $\displaystyle\int_0^1 \left\| \frac{d\bar{\gamma}}{d\lambda} \right\| d\lambda =$

$= (b-a) \displaystyle\int_0^1 \left\| \frac{d\bar{\gamma}}{dt}(a+\lambda(b-a)) \right\| d\lambda$ CHE, POSTO

$t = a+\lambda(b-a)$, DIVENTA

$$(b-a) \int_a^b \left\| \frac{d\bar{\gamma}}{dt}(t) \right\| \frac{dt}{b-a} = \int_a^b \left\| \frac{d\bar{\gamma}}{dt}(t) \right\| dt$$

LE PARAMETRIZZAZIONI NOTEVOLI SONO: $\lambda \in [0,1]$

E $s \in [0, \ell]$ DATA DA $s(t) = \displaystyle\int_a^t \|v(t)\| \, dt$,

$t \in [a,b]$. NOTARE CHE $s'(t) = \|v(t)\|$.

SI TROVA DUNQUE $\frac{d\bar{\gamma}}{dt} = \frac{d\bar{\gamma}}{ds} \frac{ds}{dt}$ DA CUI SEGUE

$v(t) = \frac{d\bar{\gamma}}{ds} \|v(t)\|$ DUNQUE $\frac{d\bar{\gamma}}{ds} = \frac{v(t)}{\|v(t)\|} = \hat{\tau}$

VERSORE TANGENTE.

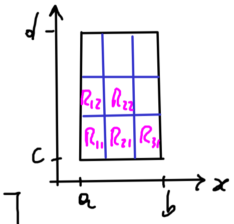
MA 05 DIC 2023

INTEGRALE DOPPIO: INTEGRALE DI UNA $f(x,y)$

IL DOMINIO DI INTEGRAZIONE Ω È BIDIMENSIONALE E LA SUA FORMA ENTRA IN GIOCO!

NEL CASO PIÙ SEMPLICE, $\Omega = [a,b] \times [c,d]$.
PRESA $f : \Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUA, E n INTERO POSITIVO, INTRODUCO I PUNTI $x_k = a + \frac{b-a}{n} k$ E $y_k = c + \frac{d-c}{n} k$ PER $k = 0, \dots, n$ E LA SOMMA

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \cdot \max_{R_{ij}} f,$$



DOVE $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$,

AMMETTE LIMITE FINITO, CHE È LO STESSO DI

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \cdot \min_{R_{ij}} f$$

E SI INDICA CON

$$\iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy.$$

ALLO STESSO RISULTATO SI GIUNGE CONSIDERANDO $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} f(x_i^*, y_j^*)$

PER QUALUNQUE SCELTA DI $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$

SE, INVECE Ω È UN QUALUNQUE INSIEME PIANO LIMITATO, CIOÈ $\Omega \subset [a,b] \times [c,d]$ SI CONSIDERANO

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \cdot \sup_{R_{ij}} \tilde{f}, \quad \text{E} \quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \cdot \inf_{R_{ij}} \tilde{f},$$

DOVE $\tilde{f}$ È DATA DA

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ 0, & (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$

ED È LIMITATA SE f LO È (IN PARTICOLARE SE $f \in C^0(\bar{\Omega})$).

SE LE SOMME DI CUI SOPRA CONVERGONO AD UNO STESSO LIMITE, LA f SI DICE INTEGRABILE ED IL SUDDETTO LIMITE DEFINISCE $\iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy$.

NOTARE CHE $f(x,y) \equiv 1$ NON È DETTO CHE SIA INTEGRABILE! DIPENDE DAL DOMINIO Ω: SE LO È, SI DICE CHE Ω È MISURABILE SECONDO PEANO-JORDAN E RISULTA $|\Omega| = \iint_\Omega dx\, dy$.

ESEMPIO: SE $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ E $f(x,y) = c$ (COSTANTE) SI TROVA $\iint_\Omega c\, dx\, dy = c|\Omega|$

SE, INVECE $\Omega = B_R(x_0, y_0)$ SI TROVA $\iint_\Omega c\, dx dy = c|\Omega| = c\pi R^2$. SE $f : \Omega \to [0, +\infty)$ È CONTINUA SU $\Omega = \bar{\Omega}$ REGOLARE, RISULTA

$$\iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy = |G|$$

ESSENDO $G = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega \text{ E } z \in [0, f(x,y)]\}$ IL SOTTOGRAFICO

MEDIA INTEGRALE: SE $f(x,y)$ È INTEGRABILE SU Ω (LIMITATO) SI PUÒ DEFINIRE LA MEDIA INTEGRALE

$$\bar{f} = \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = ⨍_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \in \mathbb{R}$$

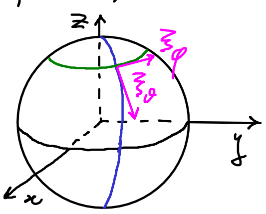
SE Σ È UNA SUPERFICIE REGOLARE DATA DA $\xi = \xi(u,v)$ PER $(u,v)\in\Omega$ REGOLARE, SI HA

$$\text{area}(\Sigma) = \iint_\Omega \|\xi_u \times \xi_v\|\,du\,dv$$

ESEMPIO:
$$\begin{cases} x = R \,\text{sen}\,\theta \cos\varphi \\ y = R\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

$$\xi_\theta = R(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ -\text{sen}\,\theta)$$
$$\xi_\varphi = R(-\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ \text{sen}\,\theta\cos\varphi,\ 0)$$

SICCOME $\xi_\theta \cdot \xi_\varphi = 0$



POSSIAMO SCRIVERE

$$\|\xi_\theta \times \xi_\varphi\| = \|\xi_\theta\|\cdot\|\xi_\varphi\| = R^2\,\text{sen}\,\theta$$

IN QUANTO $\|\xi\|_\theta = R$ E $\|\xi_\varphi\| = R\,\text{sen}\,\theta$, $\theta\in[0,\pi]$, DUNQUE L'AREA DELLA SFERA È DATA DA $\iint_\Omega R^2\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,d\varphi$

DOVE $\Omega = \{(\theta,\varphi)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]\}$

GI 07 DIC 2023

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DOPPIO

DALLA DEFINIZIONE SEGUE CHE:

1 SE f,g SONO INTEGRABILI SU Ω E PRENDO λ,μ IN $\mathbb{R}$ HO CHE $\lambda f+\mu g$ È INTEGRABILE E

$$\iint_\Omega \big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y)\big)\,dx\,dy = \lambda\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy + \mu\iint_\Omega g(x,y)\,dx\,dy$$

2 SE f È INTEGRABILE SU Ω_1 E SU Ω_2 CON $\mathring{\Omega}_1 \cap \mathring{\Omega}_2 = \emptyset$ $(\mathring{\Omega} = \bar{\Omega}\setminus\partial\Omega)$ ALLORA È INTEGRABILE SU $\Omega = \Omega_1\cup\Omega_2$ E SI TROVA CHE

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

3 SE f È INTEGRABILE SU Ω ALLORA ANCHE $|f(x,y)|$ LO È E RISULTA

$$\left|\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint_\Omega |f(x,y)|\,dx\,dy$$

4 SE $f\le g$ SONO INTEGRABILI, ALLORA

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_\Omega g(x,y)\,dx\,dy$$ (FACILE DA DIMOSTRARE)

NOTA: $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ MA $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \neq \int_0^1 x\,dx \int_0^1 x\,dx$

TUTTAVIA

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\ \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

CORRISPONDE A

$$\sum_{i=1}^N a_i b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^N a_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^N b_i^2}$$

 GI 07 DIC 2023

PER LA 1 (LINEARITÀ DELL'INTEGRALE) POSSIAMO SCRIVERE L'AREA DELLA SFERA $\iint_\Omega R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$= R^2 \iint_\Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \quad \text{DOVE } \Omega = [0,\pi]\times[0,2\pi]$$

IN GENERALE,

$$\iint_\Omega f(x)\,dx\,dy = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \max_{R_{ij}} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \max_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

$$= (d-c) \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \max_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = (d-c)\int_a^b f(x)\,dx$$

MA ALLORA $R^2 \iint_\Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta$

$= 4\pi R^2$.

DEFINIZIONE: SI DICE CHE Ω È UN DOMINIO REGOLARE (PER L'INTEGRALE DOPPIO) SE È L'UNIONE DI UN NUMERO FINITO DI DOMINI SEMPLICI, CIOÈ DEL TIPO

$$\Omega = \{ (x,y) : x\in[a,b],\ y\in[\varphi(x), \psi(x)] \}$$

CON $\varphi, \psi \in C^0([a,b])$ } DETTI ANCHE "NORMALI".

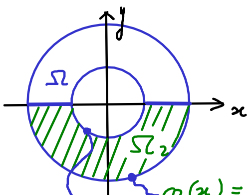
VALE ANCHE $\Omega = \{(x,y) : y\in[c,d],\ x\in[\varphi(y), \psi(y)]\}$

ESEMPIO: $\Omega = \overline{B}_{R_2}(0,0) \setminus B_{R_1}(0,0)$ CON $R_1 < R_2$

NON È SEMPLICE MA È L'UNIONE DI $\Omega_1 =$

$= \Omega \cap \{y \geq 0\}$ E

$\Omega_2 = \Omega \cap \{y \leq 0\}$

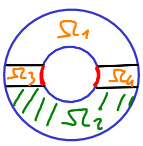


$\varphi(x) = -\sqrt{R_2^2 - x^2}$

$$\psi(x) = \begin{cases} -\sqrt{R_1^2 - x^2}, & |x| \leq R_1 \\ 0, & \text{SE } R_1 < |x| \leq R_2 \end{cases}$$

IN EFFETTI LE $\varphi, \psi \in C^0([-R_2, R_2])$ SONO DI CLASSE C^1 A TRATTI

A PATTO DI DIVIDERE Ω IN 4 PARTI

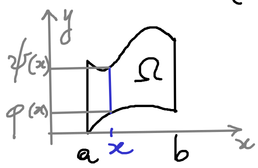


RIDUZIONE DELL'INTEGRALE DOPPIO A DUE INTEGRALI SEMPLICI

1 SE $\Omega = \{(x,y) : x\in[a,b] \text{ E } y\in[\varphi(x), \psi(x)]\}$

E $f \in C^0(\Omega)$ ALLORA PER OGNI $x \in [a,b]$ CONSIDERO

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

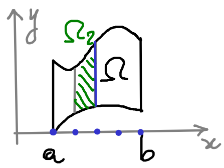


E SI TROVA CHE

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

INFATTI $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{\Omega_k} f(x,y)\,dx\,dy$

DOVE $\Omega_k = \Omega \cap ([x_{k-1}, x_k]\times\mathbb{R})$, $x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$



L'INTEGRALE $\displaystyle\iint_{\Omega_k} f(x,y)\,dx\,dy$ SI APPROSSIMA CON $\displaystyle\iint_{\Omega_k} f(x_k,y)\,dx\,dy$ DUNQUE CON

$$(x_k - x_{k-1}) \int_{\varphi(x_k)}^{\psi(x_k)} f(x_k, y)\,dy.$$

DI CONSEGUENZA L'INTEGRALE $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ VIENE APPROSSIMATO DA

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot \int_{\varphi(x_k)}^{\psi(x_k)} f(x_k, y)\,dy$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

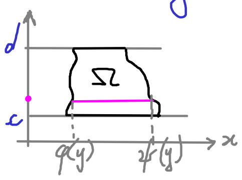
MA 12 DIC 2023

RIDUZIONE DELL'INTEGRALE DOPPIO A DUE INTEGRALI SEMPLICI

2 SE $\Omega = \{(x,y) : y \in [c,d] \text{ E } x \in [\varphi(y), \psi(y)]\}$

E $f \in C^0(\Omega)$ ALLORA PER OGNI $y \in [c,d]$ CONSIDERO

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$$



E SI TROVA

CHE $$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

LA FORMULA SI PUÒ ESTENDERE AGLI INTEGRALI DOPPI GENERALIZZATI: RISULTA $$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy \right) dx$$ E SI TROVA CHE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy = e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = I e^{-x^2}$$

ESSENDO $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. QUINDI $$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(I e^{-x^2} \right) dx = I \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = I^2.$$

OSSERVAZIONE: L'INTEGRALE $\int_a^b e^{-t^2}\,dt$ NON È ELEMENTARE NEL SENSO CHE SI ESPRIME IN TERMINI DELLA FUNZIONE $\mathrm{erf}(x)$ CHE NON APPARTIENE ALL'INSIEME DELLE FUNZIONI ELEMENTARI. ANALOGIA CON

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$$

ESEMPIO: $\iint_\Omega \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$ CON $\Omega =$

$= \{(x,y) : x^2+y^2 \le R^2\} = \{(x,y) : |x| \le R$

E $y \in [-\sqrt{R^2-x^2}, \sqrt{R^2-x^2}]\}$. SI TROVA

$$\iint_\Omega \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy \right) dx.$$

POICHÉ $$\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy = \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\pi\rho^2$$

SI DEDUCE CHE $$\iint_\Omega \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-R}^{R} \left(\frac{1}{2}\pi (R^2-x^2) \right) dx = \int_0^R \pi (R^2-x^2)\,dx =$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

MA 12 DIC 2023

CAMBIAMENTO DI VARIABILE

ESEMPI: $\begin{cases} x = \xi - \xi_0 \\ y = \eta - \eta_0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x = -\xi \\ y = \eta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\xi \\ y = -\eta \end{cases}$

CI CONCENTRIAMO SU $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

CON $(\rho, \theta) \in \Omega = [0, R] \times [0, 2\pi]$

SI DIMOSTRA CHE SE $f \in C^0(\overline{B}_R(0,0))$

ALLORA $\displaystyle\iint_{\overline{B}_R(0,0)} f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \iint_\Omega f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\operatorname{abs}|DF|\,d\rho\,d\theta$$

DOVE $F(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$ E DF È

LA MATRICE JACOBIANA $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$

DUNQUE $|DF| = \rho$ E PERTANTO

$$\iint_{\overline{B}_R(0,0)} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_\Omega f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

ESEMPIO: $\displaystyle\iint_{\overline{B}_R(0,0)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy =$

$$= \iint_\Omega \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\int_0^R \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{3}\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

IN GENERALE, SE $(x,y) = F(\xi,\eta)$ CON $F \in C^1(\overline{\Omega})$ INVERTIBILE E CON $|DF| \neq 0$ IN $\overline{\Omega}$, SI HA CHE

$$\iint_{F(\Omega)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega f(F(\xi,\eta))\operatorname{abs}|DF|\,d\xi\,d\eta$$

UN'APPLICAZIONE AGLI INTEGRALI IMPROPRI:

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon(0,0)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_{\Omega_\varepsilon} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta$$

QUI $(x,y) = F(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$ E

$(\rho,\theta) \in \Omega_\varepsilon = [\varepsilon, +\infty) \times [0, 2\pi]$

$$\iint_{\Omega_\varepsilon} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = -\pi e^{-\rho^2}\Big]_\varepsilon^{+\infty}$$

$= \pi e^{-\varepsilon^2}$ QUINDI $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon(0,0)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \pi e^{-\varepsilon^2} = \pi.$$

RICORDANDO CHE $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = I^2$

ESSENDO $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, SI CONCLUDE CHE

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$. QUINDI $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

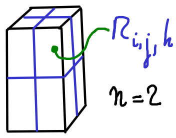
RAGION PER CUI SI DEFINISCE $\displaystyle\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

MA 12 DIC 2023

INTEGRALI TRIPLI

LA TEORIA È DEL TUTTO ANALOGA: SI PARTE DAL CASO $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$:
PRESA $f \in C^0(\overline{\Omega})$ SI DEFINISCE

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{|\Omega|}{n^3} \max_{R_{i,j,k}} f$$



LE PROPRIETÀ SONO LE STESSE DELL'INTEGRALE DOPPIO.

UN DOMINIO $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ È SEMPLICE SE È DATO DA

$$\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in G \text{ E } z \in [\varphi(x,y), \psi(x,y)]\}$$

DOVE $G \subset \mathbb{R}^2$ È UN DOMINIO REGOLARE.
IN TAL CASO SI DIMOSTRA CHE $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$$= \iint_G \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

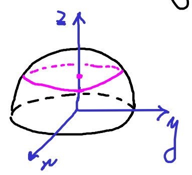
ESEMPIO: $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le R^2,\ 0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}\}$

$f \equiv 1$ COSICCHÉ $|\Omega| = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz =$

$$= \iint_G \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \right) dx\,dy = \iint_G \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3$$

I RUOLI DI (x,y) E DI z SI POSSONO SCAMBIARE:

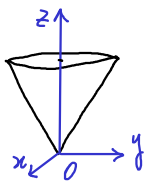


$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{z_1}^{z_2} \left(\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

SE Ω_z È REGOLARE E DIPENDE CON CONTINUITÀ DA z:
TIPICAMENTE $\Omega_z = \overline{B}_{R(z)}(0,0)$ CON $R(z)$ CONTINUA.

ESERCIZIO: APPLICARE ALLA SEMISFERA SUPERIORE

ESEMPIO: $\Omega = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{R}{h} z \le R\}$



$$|\Omega| = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz =$$

$= \int_0^h \left(\iint_{\Omega_z} dx\,dy \right) dz$ DOVE $\Omega_z = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{R}{h} z\}$ QUINDI $\iint_{\Omega_z} dx\,dy = |\Omega_z|$

$= \pi \frac{R^2}{h^2} z^2$ DA CUI $|\Omega| = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} z^2\,dz = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

GI 14 DIC 2023

INTEGRALI SUPERFICIALI E CURVILINEI

SE Σ È UNA SUPERFICIE REGOLARE DATA DA $\bar{z}=\bar{z}(u,v)$ PER $(u,v)\in\Omega$ REGOLARE, SI HA

$$\text{area}(\Sigma)=\iint_\Omega \|\xi_u\times\xi_v\|\,du\,dv$$

DEFINIZIONE: SE $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ È UNA FUNZIONE CONTINUA, SI PUÒ DEFINIRE L'INTEGRALE SUPERFICIALE

$$\int_\Sigma f\,d\Sigma=\iint_\Omega f(\bar{z}(u,v))\,\|\xi_u\times\xi_v\|\,du\,dv$$

NOTA: È SUFFICIENTE CHE IL DOMINIO DI f SIA UN APERTO CONTENENTE Σ.

ESEMPIO: LA CARICA q COLLOCATA IN (x,y,z) DETERMINA IL POTENZIALE $V(x',y',z')=$

$$\frac{kq}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}.$$

SE DISTRIBUISCO LA CARICA SU Σ CON DENSITÀ $\sigma(x,y,z)$ ALLORA IL POTENZIALE NEL PUNTO $(x',y',z')\notin\Sigma$ RISULTA $V(x',y',z')=$

$$=\int_\Sigma \frac{k\,\sigma(x,y,z)\,d\Sigma}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

ESERCIZIO: SVOLGERE L'INTEGRALE PONENDO $\sigma=$ COSTANTE E $\Sigma=$ SFERA $=\partial B_R(0,0,0)$.

SVOLGIMENTO: IL PROBLEMA HA SIMMETRIA RADIALE, QUINDI PRENDO $(x',y',z')=(0,0,z)$

$$V(0,0,z)=k\sigma\int_\Sigma \frac{d\Sigma}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z)^2}}$$

$$(x,y,z)=(R\sin\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta)$$

$$\|\xi_\theta\times\xi_\varphi\|=R^2\sin\theta$$

$$V(0,0,z)=$$

$$=k\sigma\iint_\Omega \frac{R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{\sqrt{R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+(R\cos\theta-z)^2}}$$

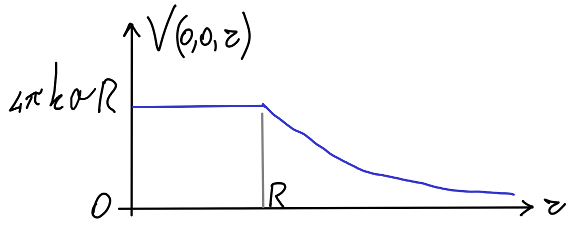
DOVE $(\theta,\varphi)\in\Omega=[0,\pi]\times[0,2\pi]$ DUNQUE

$$V(0,0,z)=k\sigma\iint_\Omega\frac{R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{\sqrt{R^2-2Rz\cos\theta+z^2}}=$$

$$=2\pi k\sigma\int_0^\pi\frac{R^2\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{R^2-2Rz\cos\theta+z^2}}=$$

$$=2\pi k\sigma R\left[\frac{1}{z}\sqrt{R^2-2Rz\cos\theta+z^2}\right]_0^\pi=$$

$$=\frac{2\pi k\sigma R}{z}\left(R+z-|R-z|\right)=\begin{cases}4\pi k\sigma R, & z\in(0,R]\\[4pt] \dfrac{4\pi k\sigma R^2}{z}, & z\in(R,+\infty)\end{cases}$$



GI 14 DIC 2023

FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE ORIENTABILE

ORIENTABILE: IL VERSORE NORMALE $\hat{n} = \dfrac{\xi_u \times \xi_v}{\| \xi_u \times \xi_v \|}$ È CONTINUO SU Σ

DATO UN CAMPO $\overline{F}(x,y,z) = \hat{i}\, X(x,y,z) + \hat{j}\, Y(x,y,z) + \hat{k}\, Z(x,y,z)$ CONTINUO SU DI UN APERTO G CHE CONTIENE Σ, SI PUÒ DEFINIRE $\displaystyle\int_\Sigma \overline{F} \cdot \overline{n}\, d\Sigma$ IL FLUSSO DI $\overline{F}$ ATTRAVERSO LA SUPERFICIE Σ ORIENTATA DA $\hat{n}$:

$$\int_\Sigma \overline{F} \cdot \overline{n}\, d\Sigma = \iint_\Omega \overline{F}(\overline{\varepsilon}(u,v)) \cdot \hat{n}(u,v)\, \| \xi_u \times \xi_v \|\, du\, dv$$

$$= \iint_\Omega \overline{F}(\overline{\varepsilon}(u,v)) \cdot (\xi_u \times \xi_v)\, du\, dv$$

ESEMPIO: $\overline{F}(\overline{z}) = f(\overline{z}) \cdot \overline{z}$ CON $f(\overline{z})$ CONTINUA

$\Sigma = \partial B_R(0,0,0)$ RAPPRESENTATA DA

$\overline{\varepsilon}(\vartheta, \varphi) = (R \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi,\ R \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi,\ R\cos\vartheta)$

COSICCHÉ

$$\xi_\vartheta = R\,(\cos\vartheta\cos\varphi,\ \cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi,\ -\operatorname{sen}\vartheta)$$
$$\xi_\varphi = R\,(-\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi,\ \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi,\ 0)$$

QUINDI $\xi_\vartheta \times \xi_\varphi = R^2 \operatorname{sen}\vartheta\, \hat{z} = R^2 \operatorname{sen}\vartheta \dfrac{\overline{\varepsilon}}{\|\overline{\varepsilon}\|}$

DOVE $\|\overline{\varepsilon}\| = R$ QUINDI $\xi_\vartheta \times \xi_\varphi = R \operatorname{sen}\vartheta\, \overline{\varepsilon}$

SI TROVA $\displaystyle\int_\Sigma \overline{F} \cdot \overline{n}\, d\Sigma = \iint_\Omega f\, \overline{z} \cdot (R \operatorname{sen}\vartheta\, \overline{\varepsilon})\, d\vartheta\, d\varphi$

$$= R^3 \iint_\Omega f(\vartheta,\varphi) \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

PONIAMO CHE $f = \dfrac{c}{z^3}$ E OTTENIAMO

$$\int_\Sigma \overline{F} \cdot \overline{n}\, d\Sigma = R^3 \iint_\Omega \frac{c}{R^3} \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= c \iint_\Omega \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi c$$

GI 14 DIC 2023

ANALOGHE DEFINIZIONI QUANDO IL DOMINIO DI INTEGRAZIONE È UNA CURVA γ REGOLARE

① <u>INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE</u>

$$\int_\gamma f\, d\ell = \int_\gamma f\, ds$$ CON f CONTINUA IN UN APERTO CONTENENTE γ: SI DEFINISCE PONENDO

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\bar{z}(t)) \cdot \|v(t)\|\, dt$$

ESSENDO γ RAPPRESENTATA DA $\bar{z} = \bar{z}(t)$ E $v(t) = \bar{z}'(t)$ PER $t \in [a,b]$.

<u>ESEMPIO:</u> FILO DI MASSA M CON DENSITÀ $\lambda = \lambda(\bar{z})$ CONTINUA. RISULTA

$$M = \int_\gamma d\lambda = \int_\gamma \lambda(\bar{z})\, ds = \int_a^b \lambda(\bar{z}(t))\, \|v(t)\|\, dt$$

② <u>INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE</u>

DATO UN CAMPO $\bar{F}(x,y,z)$ CONTINUO IN UN INTORNO DI γ ORIENTATA DA $t=a$ A $t=b$, SI DEFINISCE

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{\ell} = \int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{z}$$ PONENDO

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{z} = \int_a^b \bar{F}(\bar{z}(t)) \cdot v(t)\, dt, \quad v(t) = \bar{z}'(t)$$

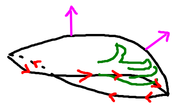
<u>ESEMPIO:</u> LAVORO DI $\bar{F}$ LUNGO γ DA $\bar{z}(a)$ A $\bar{z}(b)$

NOTA: $$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{z} = -\int_{-\gamma} \bar{F} \cdot d\bar{z}$$ DOVE $-\gamma$ È PARAMETRIZZATA DA $\bar{z} = \bar{z}(a+b-t)$

MA 19 DIC 2023

$$\boxed{\text{TEOREMA DEL ROTORE}}$$

CONSIDERIAMO UN CAMPO $\bar{F}(x,y,z) = X(x,y,z)\,\hat{\imath} + Y(x,y,z)\,\hat{\jmath} + Z(x,y,z)\,\hat{k}$ DI CLASSE C^1 IN UN APERTO $G \subset \mathbb{R}^3$, E UNA SUPERFICIE REGOLARE $\Sigma \subset G$ ORIENTATA DAL VERSORE NORMALE $\hat{n}(x,y,z)$. IL CONTORNO DI Σ SI INDICA CON $\partial\Sigma$ ED È ORIENTATO CON LA REGOLA DELLA MANO DESTRA. ALLORA

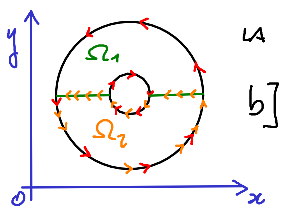


$$\int_{\partial\Sigma} \bar{F} \cdot d\bar{\ell} = \int_\Sigma \operatorname{rot} \bar{F} \cdot d\bar{\Sigma} = \int_\Sigma \operatorname{rot} \bar{F} \cdot \hat{n}\, d\Sigma$$

DOVE $$\operatorname{rot} \bar{F} = \bar{\nabla} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ X(x,y,z) & Y(x,y,z) & Z(x,y,z) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\hat{k}$$

SVOLGIAMO LA DIMOSTRAZIONE NEL CASO $\bar{F}(x,y) = X(x,y)\,\hat{\imath}$ (SI NOTI CHE $\operatorname{rot}(\lambda_1 \bar{F}_1 + \lambda_2 \bar{F}_2) = \lambda_1 \operatorname{rot} \bar{F}_1 + \lambda_2 \operatorname{rot} \bar{F}_2$) E $\Sigma = \Omega \subset \mathbb{R}^2$ DOMINIO REGOLARE ORIENTATO DA $\hat{n} = \hat{k}$ E AVENTE LA FORMA $\Omega = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y \in [\varphi(x), \psi(x)]\}$. SI TROVA $\operatorname{rot} \bar{F}(x,y,z) =$



$$= -\frac{\partial X}{\partial y}(x,y)\,\hat{k}$$ QUINDI $$\int_\Sigma \operatorname{rot} \bar{F} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = -\iint_\Omega \frac{\partial X}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy$$

$\bar{\xi}_u = \hat{\imath}$, $\bar{\xi}_v = \hat{\jmath}$

$u = x \quad v = y$

$\bar{\xi}_u \times \bar{\xi}_v = \hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$

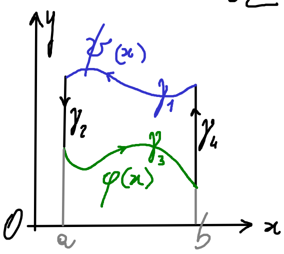
MA 19 DIC 2023

USANDO LA FORMULA DI RIDUZIONE, TROVIAMO

$$-\iint_\Omega \frac{\partial X}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = -\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial X}{\partial y}(x,y)\,dy\right)dx =$$

$$= -\int_a^b \Big(X(x,\psi(x)) - X(x,\varphi(x))\Big)\,dx.$$

D'ALTRO CANTO, $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} \bar F\cdot d\bar\ell = \int_{\gamma_1} \bar F\cdot d\bar\ell + \int_{\gamma_2}\bar F\cdot d\bar\ell +$



$$+\int_{\gamma_3} \bar F\cdot d\bar\ell + \int_{\gamma_4} \bar F\cdot d\bar\ell$$

$$\gamma_4: \begin{cases} x=b\\ y=t\end{cases} \quad t\in[\varphi(b),\psi(b)]$$

$$v_4(t) = \left(x_4'(t),\, y_4'(t)\right) = (0,1) = \hat\jmath$$

$\bar F\cdot v_4(t) = X(x,y)\,\hat\imath\cdot\hat\jmath = 0$ QUINDI $\displaystyle\int_{\gamma_4} \bar F\cdot d\bar\ell = 0$

E SIMILMENTE $\displaystyle\int_{\gamma_2} \bar F\cdot d\bar\ell = 0.$

$$\gamma_3: \begin{cases} x=t\\ y=\varphi(t)\end{cases} \quad t\in[a,b],\quad v_3(t) = (1,\varphi'(x))$$

$\bar F\cdot v_3(t) = X(t,\varphi(t))\,\hat\imath\cdot v_3(t) = X(t,\varphi(t))$ QUINDI

$$\int_{\gamma_3} \bar F\cdot d\bar\ell = \int_a^b X(t,\varphi(t))\,dt = \int_a^b X(x,\varphi(x))\,dx$$

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $\displaystyle\int_{\gamma_1} \bar F\cdot d\bar\ell = -\int_a^b X(x,\psi(x))\,dx$

$$\gamma_1: \begin{cases} x=a+b-t\\ y=\psi(a+b-t)\end{cases} \quad v_1(t) = \left(-1,\, -\psi'(a+b-t)\right)$$

$\boxed{\text{FORMULE DI GAUSS-GREEN}}$

L'UGUAGLIANZA $\displaystyle -\iint_\Omega \frac{\partial X}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy =$

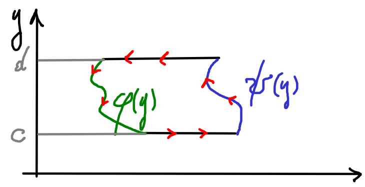
$$= -\int_a^b \Big(X(x,\psi(x)) - X(x,\varphi(x))\Big)\,dx \quad \text{SI}$$

SCRIVE ANCHE

$$-\iint_\Omega \frac{\partial X}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} X\,dx$$

SIMILMENTE SI DIMOSTRA CHE

$$\iint_\Omega \frac{\partial X}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} X\,dy$$



 MA 19 DIC 2023

CAMPI CONSERVATIVI E POTENZIALE

LEMMA: DATO UN CAMPO $\bar{F}(x,y,z)$ CONTINUO IN UN APERTO CONNESSO $G \subset \mathbb{R}^3$, LE SEGUENTI TRE CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI:

1) RISULTA $\oint_\gamma F \cdot d\bar{l} = 0$ PER OGNI CURVA CHIUSA $\gamma \subset G$.

2) RISULTA $\int_{\gamma_1} \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int_{\gamma_2} \bar{F} \cdot d\bar{l}$ PER OGNI COPPIA DI CURVE $\bar{z} = \bar{z}_1(t)$, $\bar{z} = \bar{z}_2(t)$ TALI CHE $\bar{z}_1(a) = \bar{z}_2(a)$ E $\bar{z}_1(b) = \bar{z}_2(b)$, $t \in [a,b]$.

3) ESISTE UNA $u \in C^1(G)$ TALE CHE $\nabla u = F$ IN G (SI DICE CHE u È IL POTENZIALE DI $\bar{F}$)

SE TALI CONDIZIONI SI VERIFICANO, SI DICE CHE IL CAMPO $\bar{F}$ È CONSERVATIVO.

L'EQUIVALENZA $1 \Leftrightarrow 2$ SEGUE DAL FATTO CHE, POSTO $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ SI HA $\oint_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{l} =$

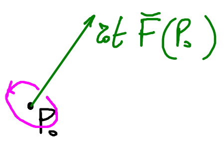
$$= \int_{\gamma_1} \bar{F} \cdot d\bar{l} + \int_{-\gamma_2} \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int_{\gamma_1} \bar{F} \cdot d\bar{l} - \int_{\gamma_2} \bar{F} \cdot d\bar{l}$$

$2 \Rightarrow 3$: SI FISSA $P_0 \in G$ E SI DEFINISCE $u(x,y,z) = \int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{l}$ CON $\gamma : \bar{z} = \bar{z}(t)$, $t \in [a,b]$, $\bar{z}(a) = P_0$ E $\bar{z}(b) = (x,y,z)$. SI VERIFICA CHE $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = X(x,y,z)$ ECCETERA.

$3 \Rightarrow 2$ SE ESISTE u TALE CHE $\nabla u = \bar{F}$ ALLORA PER OGNI $\gamma \subset G$ RISULTA $\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{l} = u(\bar{z}(b)) - u(\bar{z}(a))$

CONDIZIONE NECESSARIA

SE $\bar{F} \in C^1(G)$ È CONSERVATIVO, ALLORA $\operatorname{rot} \bar{F} = \bar{0}$ IN G. DIMOSTRAZIONE: SE IN UN PUNTO $P_0 \in G$ RISULTA $\operatorname{rot} \bar{F}(P_0) \neq \bar{0}$ IL CAMPO NON È CONSERVATIVO. INFATTI PER CONTINUITÀ IL $\operatorname{rot} \bar{F}(x,y,z)$ È VICINO A $\operatorname{rot} \bar{F}(P_0)$ PER $\|(x,y,z) - P_0\| < \delta$ OPPORTUNO. PRENDO UNA CIRCONFERENZA γ GIACENTE IN UN PIANO PERPENDICOLARE A $\operatorname{rot} \bar{F}(P_0)$ E DI DIAMETRO MINORE DI δ:



PER IL TEOREMA DI STOKES HO CHE $\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int_\Sigma \operatorname{rot} \bar{F}(x,y,z) \cdot \hat{n} \, d\Sigma$

$$> \frac{1}{2} \pi r^2 \|\operatorname{rot} \bar{F}(P_0)\|$$

MA 19 DIC 2023

ESERCIZIO: POSTO $\bar{F}(x,y,z) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,\hat{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\hat{j}$ PER $x^2+y^2 > 0$, VERIFICARE CHE $\text{rot}\,\bar{F} = \bar{0}$ PER OGNI (x,y,z). PRESA γ:

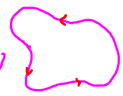
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases}$$

VERIFICATE CHE $\oint_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{l} = 2\pi \neq 0$.

CONDIZIONE SUFFICIENTE

DATO $\bar{F} \in C^1(G)$ IRROTAZIONALE, ESSO È CONSERVATIVO SE SI PUÒ USARE IL TEOREMA DI STOKES QUALUNQUE SIA LA CURVA CHIUSA

$\gamma \subset G$

γ 

$$\oint_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int_\Sigma \text{rot}\,\bar{F} \cdot d\bar{\Sigma} = 0$$