Ricerca di un integrale particolare per un'equazione differenziale lineare di ordine n non omogenea

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{(n-1)} y' + a_n y = b(x)}$$

Eq. diff. lineari a coefficienti costanti

L'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + \overline{y}\,(x)}$$

Dove:

- $\boldsymbol{y_0(x)}$ *è la soluzione dell'omogenea associata ;*
- $\boldsymbol{\overline{y}\,(x)}$ *è un integrale particolare della non omogenea;*

Equazioni differenziali ordinarie di ordine n

Calcolo di $\bar{y}(x)$: Metodo della somiglianza

1. $b(x) = P_m(x)e^{\gamma x}$ *polinomio di grado* m

   a) γ *non è radice dell'eq. caratteristica*

   $$\bar{y}(x) = Q_m(x)e^{\gamma x}$$

   b) γ *è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità* k

   $$\bar{y}(x) = x^k Q_m(x)e^{\gamma x}$$

Equazioni differenziali ordinarie di ordine n

2. $b(x) = P_m(x)e^{\gamma x}cos(\mu x)$ o $b(x) = P_m(x)e^{\gamma x}sen(\mu x)$

   a) $\gamma \pm i\mu$ *non sono radici dell'eq. caratteristica*

   $$\bar{y}(x) = [Q_m(x)\cos(\mu x) + R_m(x)\sin(\mu x)]\, e^{\gamma x}$$

   b) $\gamma \pm i\mu$ *è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità* k

   $$\bar{y}(x) = x^k[Q_m(x)\cos(\mu x) + R_m(x)\sin(\mu x)]\, e^{\gamma x}$$

Esempio $y'' - 2y' + 2y = x^2$

L'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$\boxed{y(x) = y_o(x) + \bar{y}\,(x)}$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i$$

$$y_o(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

$b(x) = x^2 \Rightarrow m = 2,\ \gamma = 0$ *non è soluzione dell'eq caratteristica*,

$$\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$$

5

Se $\bar{y}(x)$ *è soluzione della nostra equazione differenziale non omogenea, allora sostituendo* $\bar{y}(x), \bar{y}'(x), \bar{y}''(x)$ *nell'equazione differenziale si deve avere un'identità.*

Calcoliamo $\bar{y}'(x), \bar{y}''(x)$

$$\bar{y}' = 2ax + b, \quad \bar{y}'' = 2a$$

Sostituendo nell'eq diff si ha

$$2a - 4ax - 2b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$$

$$\Rightarrow 2ax^2 + (2b - 4a)x + 2a - 2b + 2c = x^2$$

6

Per il principio di identità dei polinomi si ha

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 4a = 0 \\ 2a - 2b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Perciò $\bar{y}(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}$

E quindi l'integrale generale dell'eq completa è

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + \frac{x^2 + 2x + 1}{2}$$