Equazioni differenziali lineari di ordine n

Equazioni differenziali lineari di ordine n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_i(x) = coefficienti \\ b(x) = termine\ noto \end{array}\right\} \quad \text{Definiti in} \quad I \subseteq \Re$$

Se $b(x)=0$ *l'equazione si dice omogenea,*
altrimenti non omogenea

Equazioni differenziali lineari di ordine n

Teorema.

Se $y_1(x),\ldots,y_n(x),\ \ x\in I\subseteq R,$ *sono soluzioni particolari dell'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n allora* $c_1y_1+\ldots+c_ny_n$ *è soluzione*

L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n è

$$y_0(x)=c_1y_1(x)+\ldots+c_ny_n(x)$$

$y_1(x),\ldots,y_n(x),$ *sono n soluzioni linearmente indipendenti*

$c_1,\ldots,c_n,$ *sono n costanti arbitrarie*

Equazioni differenziali lineari di ordine n

Definizione

$y_1(x),\ldots,y_n(x),$ *sono funzioni linearmente indipendenti se*

$$c_1y_1+\ldots+c_ny_n=0\Rightarrow c_1=c_2=\ldots=c_n=0$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè n soluzioni, di un'equazione differenziale lineare di ordine n, siano linearmente indipendenti è che il determinante Wronskiano:

$$\begin{vmatrix} y_1 \ldots\ldots\ldots\ldots y_n \\ y_1' \ldots\ldots\ldots\ldots y_n' \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_1^{(n-1)} \ldots\ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Equazioni differenziali lineari di ordine n

Data l'equazione non omogenea

$$(1)\quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

e la sua omogenea associata:

$$(2)\quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

l'integrale generale di (1) è:

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x)$$

dove $y_0(x)$ *è l'integrale generale di* (2) *e* $\overline{y}(x)$ *è un integrale particolare di* (1)

Equazioni differenziali lineari di ordine n

omogenee a coefficienti costanti

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

$$a_1, \ldots, a_n \in \Re$$

A tale equazione si associa l'equazione caratteristica:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

che, per il teorema fondamentale dell'algebra, ha in C *n radici ciascuna contata con la propria molteplicità*

Equazioni differenziali lineari di ordine n omogenee a coefficienti costanti

$y = e^{\alpha x}$ *è soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea se* α *è soluzione dell'equazione caratteristica*

Infatti se $y = e^{\alpha x}$, $y' = \alpha e^{\alpha x}, \ldots\ldots, y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$

sostituendo nell'equazione differenziale si ha

$$e^{\alpha x}\left(\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}\alpha + a_n\right) = 0$$

$\Rightarrow e^{\alpha x}$ *è soluzione dell'eq omogenea se* α *è soluzione dell'equazione caratteristica*

Equazioni differenziali lineari di ordine n

1° *Caso*)

L'equazione caratteristica ammette n radici ***reali e distinte*** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *allora gli n integrali linearmente indipendenti* (*dell'equazione omogenea*) *sono*:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots\ldots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

e l'integrale generale è

$$y_o = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots\ldots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Es. $y'' - 5y' + 6y = 0$

Equazioni differenziali lineari di ordine n

2° *Caso*)

L'equazione caratteristica ammette radici reali e multiple
Per es. se λ_1 *è di molteplicità m , allora m integrali particolari (dell'equazione omogenea) sono*:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = xe^{\lambda_1 x}, \ldots\ldots, y_m = x^{m-1} e^{\lambda_1 x}$$

in generale per ogni radice λ_k *di molteplicità* m_k, *gli n integrali linearmente indipendenti sono*

$$e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, x^2 e^{\lambda_k x}, \ldots\ldots, x^{m_k - 1} e^{\lambda_k x},$$

$$k = 1,.., r, \qquad m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$$

Es. $\quad y''' + y'' = 0$

Equazioni differenziali lineari di ordine n

3° *Caso*)

L'equazione caratteristica ammette radici complesse coniugate:

$$\lambda = \alpha + i\beta \qquad \text{di molteplicità } m$$

$$\overline{\lambda} = \alpha - i\beta \qquad \text{di molteplicità } m$$

allora:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots\ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots\ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

sono soluzioni dell'equazione omogenea (*2m*)

Equazioni differenziali lineari di ordine n

Si arriva a tali soluzioni considerando gli integrali

$$x^k e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad x^k e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad k = 0,1,\ldots m-1$$

a cui vengono applicate le formule di Eulero

Es. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$