Problema di Cauchy

Problema di Cauchy

Sia $f : R^2 \supseteq D \to R$, *con* D *aperto*, $(x_0, y_0) \in D$

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ *Problema di Cauchy*

$y = y(x)$ *è detta soluzione (locale) del Problema di Cauchy se è definita ed è derivabile in un intorno del punto* x_0, *tale che in tale intorno*

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Problema di Cauchy

Esempio

$$\begin{cases} y' = y - 1 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

$$y' - y = -1 \quad y = e^{\int 1\,dx}\left[\int e^{-\int 1\,dx} \cdot (-1)\,dx + c\right]$$

$$y = e^{x}\left(\int e^{-x} \cdot (-1)\,dx + c\right) = e^{x}\left(e^{-x} + c\right)$$

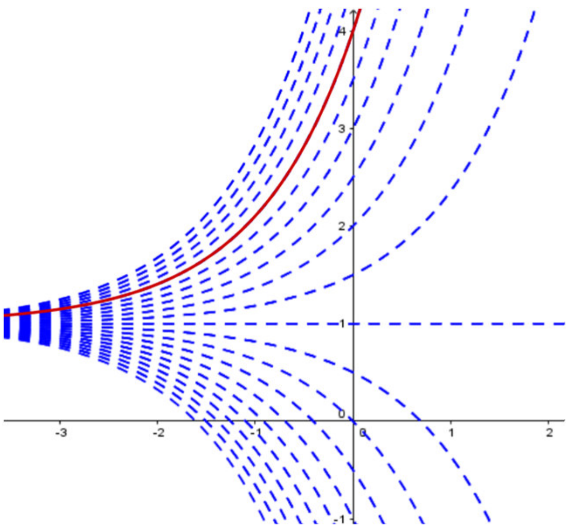
Problema di Cauchy

$$y = 1 + c \cdot e^{x}$$

$$y(0) = 4$$

$$4 = 1 + c \cdot e^{0}$$

$$c = 3$$



Problema di Cauchy

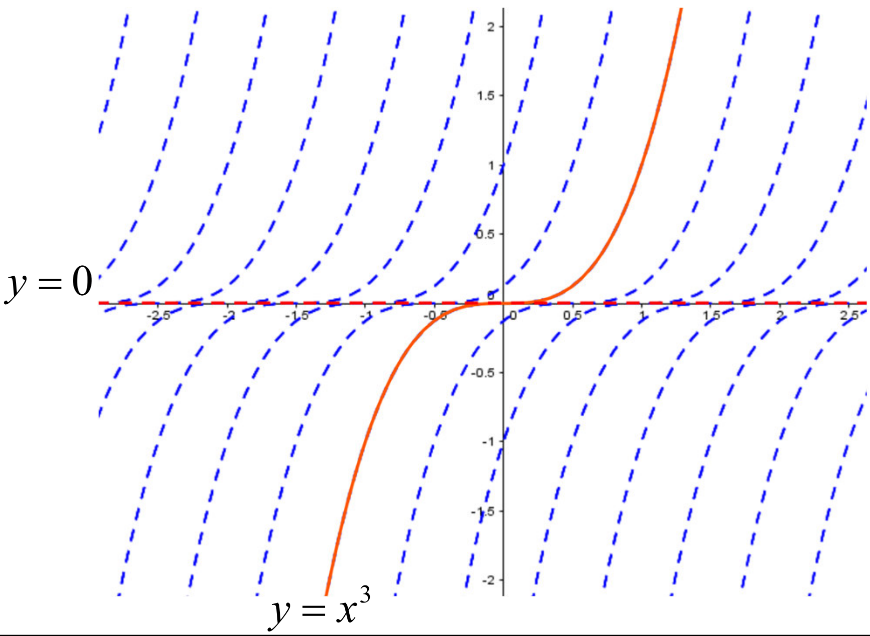
$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad y = 0 \quad \textit{è soluzione}$$

Se $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dx \qquad \qquad \int \frac{dy}{y^{2/3}} = \int dx$$

$$y = \left(\frac{x+c}{3}\right)^3 \qquad \qquad y = \frac{x^3}{27} \quad \textit{altra soluzione}$$

Problema di Cauchy



Problema di Cauchy

TEOREMA di PEANO

Se $f(x,y)$ è continua in un aperto $D \subseteq R^2$ e $(x_0, y_0) \in D$, allora esiste almeno una soluzione del problema di CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Problema di Cauchy

Teorema di CAUCHY (*di esistenza e unicità locale*)

Sia $f: D \subseteq R^2 \to R$, con D aperto. Se:

1. *f è continua in D*
2. *f è localmente LIPSCHITZIANA in D rispetto a y e uniformemente in x, allora*

$\forall\ (x_0, y_0) \in D,\ \exists\ I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ nel quale è definita la soluzione $y(x)$ del Problema di Cauchy e tale soluzione è unica.

Problema di Cauchy

Definizione:

Si dice che $f(x, y)$ è localmente LIPSCHITZIANA in D rispetto a y e uniformemente in x, se ogni punto di D ha un intorno K in cui vale:

$| f(x,y_1)-f(x,y_2) | \leq L_K |y_1-y_2|$

la costante L_K può dipendere dall'intorno

Problema di Cauchy

Corollario: *Sia $f(x,y)$ una funzione definita in un intorno del punto (x_o,y_o). Se $f(x,y)$ e la sua derivata parziale $f_y(x,y)$ sono continue nell'intorno del punto, allora f è localmente Lipschitziana rispetto a y, uniformemente in x.*

(cioè esiste un'unica funzione $y= y(x)$ continua e derivabile nell'intorno del punto (x_o, y_o), soluzione del problema di Cauchy.)