

Equazioni differenziali ordinarie

1

Equazioni differenziali ordinarie

- *Equazioni differenziali del 1° ordine a variabili separabili,*
- *Equazioni differenziali lineari del 1° ordine*
- *Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari:*
 - *Equazione di Bernoulli*
 - *Equazione di Clairaut*
- *Problema di Cauchy per le eq. diff. del 1° ordine in forma normale,*
- *Equazioni differenziali lineari di ordine $n \geq 2$*

2

Equazioni differenziali ordinarie di ordine n

Definizione

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ si definisce *equazione differenziale ordinaria di ordine n*, un'equazione in cui compaiono la funzione incognita $y = y(x)$, $x \in I$, e le sue derivate fino all'ordine n:

$$g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Con $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$, ..., $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$
e g funzione reale.

3

Equazioni differenziali ordinarie di ordine n

Se g è un polinomio in cui $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ sono di primo grado, allora l'equazione si dice

equazione differenziale *lineare*

(l'ordine dell'equazione è dato dall'ordine massimo di derivazione che compare)

4

Equazioni differenziali ordinarie di ordine n

$y = y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale di ordine n se, $y(x)$ insieme alle sue derivate soddisfa l'equazione, cioè

$$g(y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I$$

Un'equazione differenziale è in **forma normale** se è esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

altrimenti si dice in **forma non-normale**

5

Equazioni differenziali ordinarie di ordine n

Integrare un'equazione differenziale significa trovare tutte le soluzioni. L'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale di ordine n dipende da n parametri reali: le costanti c_1, c_2, \dots, c_n :

$$y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad \text{INTEGRALE GENERALE}$$

Fissando i parametri c_1, c_2, \dots, c_n si ottiene una soluzione particolare dell'equazione differenziale e viene chiamata **INTEGRALE PARTICOLARE**.

Nel caso di un'eq. diff. del 1° ordine: $g(x, y, y') = 0$

$$y = y(x, c)$$

6

Equazioni differenziali ordinarie di ordine n

Nel caso di un'eq. diff. del 1° ordine:

$$g(x, y, y') = 0 \quad \text{forma non normale}$$

$$y' = f(x, y) \quad \text{forma normale o esplicita}$$

$$y = y(x, c) \quad \text{integrale generale}$$

7

Equazioni differenziali ordinarie di ordine n

NOTA Non sempre ogni soluzione dell'equazione differenziale data è anche un integrale particolare: ci sono casi di equazioni differenziali che ammettono anche **INTEGRALI SINGOLARI**, cioè integrali non ottenibili per nessun valore della costante c .

8

Equazioni differenziali a variabili separabili

$$y' = f(x)g(y)$$

Con $f(x)$ e $g(y)$ funzioni continue

se $\exists y_0 : g(y_0) = 0 \Rightarrow y = y_0$ è soluzione

9

Equazioni differenziali a variabili separabili

Se $g(y) \neq 0 \quad \forall y$, allora si divide l'equazione per $g(y)$ e si integra:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x), \quad \text{ma} \quad y' = \frac{dy}{dx},$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

$$G(y) = F(x) + c, \quad c = \text{costante}$$

10

Equazioni differenziali a variabili separabili

Esempio. Integrare la seguente equazione differenziale

$$y' = 2x + 2xy^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x(1 + y^2) \quad g(y) = 1 + y^2 \neq 0 \quad \forall y$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int 2x dx$$

$$\arctg y = x^2 + c$$

$$y = \operatorname{tg}(x^2 + c) \quad \text{Integrale generale}$$

11

Equazioni differenziali a variabili separabili

Esempio. Risolvere $y' = xy^2$

$y = 0$ è soluzione

se $y \neq 0$:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int x dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{x^2 + 2c} \quad \text{Integrale generale}$$

$$y = 0 \quad \text{Integrale singolare}$$

12

Equazioni differenziali lineari del 1° ordine

$$y' + a(x)y = b(x)$$

con $a(x)$ e $b(x)$ funzioni continue in I .

Se $b(x)=0$ allora $y' + a(x)y = 0$ si dice *omogenea*

13

Equazioni differenziali lineari del 1° ordine

Teorema

Tutte le soluzioni dell'eq. diff. lineare del 1° ordine non omogenea

$$y' + a(x)y = b(x)$$

sono date da

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} b(x) dx + c \right)$$

con $A(x)$ primitiva di $a(x)$

14

Equazioni differenziali lineari del 1° ordine

Dimostrazione

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, cioè $A'(x) = a(x)$

Moltiplicando entrambi i membri dell'eq. diff. per il fattore $e^{A(x)}$ si ha

$$e^{A(x)} y'(x) + e^{A(x)} a(x) y(x) = e^{A(x)} b(x)$$

cioè

$$\frac{d}{dx} (e^{A(x)} y(x)) = e^{A(x)} b(x)$$

15

Equazioni differenziali lineari del 1° ordine

Integrando membro a membro si ha

$$e^{A(x)} y(x) = \int e^{A(x)} b(x) dx + c$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} b(x) dx + c \right)$$

Se $b(x)=0$ allora $y(x) = ce^{-A(x)}$

16

Equazioni differenziali lineari del 1° ordine

Esempio Integrare la seguente equazione differenziale

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

$$a(x) = 2x \Rightarrow A(x) = x^2, \quad b(x) = xe^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-x^2} \left(\int e^{x^2} xe^{-x^2} dx + c \right)$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + c \right) \quad \text{Integrale generale}$$

17

Equazioni differenziali lineari del 1° ordine

Esercizi Integrare le seguenti equazioni differenziali

$$(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg}x$$

$$y' + \cos(x) \cdot y = 0$$

18

Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari

Equazione di Bernoulli

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \text{ con } \alpha \neq 0,1$$

$a(x)$, $b(x)$ funzioni continue, $\alpha \neq 0,1$ altrimenti si ricade nelle eq. lineari.

(Se $\alpha > 0$ allora $y=0$ è una soluzione: *integrale singolare*)

Se y è diverso da zero, si divide tutto per y^α :

$$y'y^{-\alpha} + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

19

Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari

Equazione di Bernoulli

Posto: $z(x) = y^{1-\alpha}$

Si ha: $z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

e sostituendo nella eq. precedente si ottiene un'equazione differenziale lineare del primo ordine rispetto a z .

$$z'(x) + (1-\alpha)a(x)z(x) = (1-\alpha)b(x)$$

20

Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari

Esercizio . Integrare la seguente eq diff

$$y' - y = xy^2$$

$y = 0$ è soluzione

se $y \neq 0$:

$$y'y^{-2} - y^{-1} = x \Rightarrow z(x) = y^{-1}, \quad z' = -y^{-2}y'$$

$$z' + z = -x, \quad \text{Eq diff. lineare in } z(x)$$

$$\Rightarrow z(x) = e^{-x} \left(-\int x e^x dx + c \right)$$

21

Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari

$$\text{Quindi } z(x) = e^{-x} (-x e^x + e^x + c) \Rightarrow z = -x + 1 + c e^{-x}$$

Ed essendo $z(x) = y^{-1}$ si ha

$$y(x) = z^{-1} \Rightarrow y = \frac{1}{-x + 1 + c e^{-x}}$$

$$y = 0 \quad \text{Integrale singolare}$$

$$y = \frac{1}{-x + 1 + c e^{-x}} \quad \text{Integrale generale}$$

22

Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari

Esercizio

$$y' - 2y = \sqrt{y} \cdot \operatorname{sen} x$$

23

Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari

Equazione di Clairaut

$$y = xy' + g(y')$$

con g funzione derivabile.

*Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine
in forma **non normale**.*

24

Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari

Equazione di Clairaut

Derivando rispetto a x primo e secondo membro dell'eq. differenziale si ha:

$$y' = y' + xy'' + g'(y')y''$$

$$y''[x + g'(y')] = 0$$

25

Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari

$$1) \quad y'' = 0 \rightarrow y' = c$$

sostituendo nell'equazione diff. di partenza

$$i) \quad y = cx + g(c)$$

ottengo una famiglia di rette al variare di c

26

Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari

Equazione di Clairaut

$$2) \quad x + g'(y') = 0$$

Posto $t = y'$ dalla precedente si ricava:

$$ii) \quad \begin{cases} x(t) = -g'(t) \\ y(t) = -tg'(t) + g(t) \end{cases}$$

Tale soluzione è un **INTEGRALE SINGOLARE**

ed è l'involuppo della famiglia di rette (i)

27

Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari

Esercizio

$$y = \frac{x(y')^3 - 1}{(y')^2}$$

Si ha $y = xy' - (y')^{-2}$ *Equazione di Clairaut*

$$y' = y' + xy'' + 2(y')^{-3} y'' \Rightarrow y''(x + 2(y')^{-3}) = 0$$

$$\begin{aligned} y'' &= 0 \\ x + 2(y')^{-3} &= 0 \end{aligned}$$

28

Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari

da $y'' = 0$ si ottiene $y' = c \Rightarrow$

$$y = cx - \frac{1}{c^2} \quad \text{famiglia di rette}$$

da $x + 2(y')^{-3} = 0$ ponendo $y' = t$ si ottiene

$$\begin{cases} x = -2t^{-3} \\ y = tx - 2t^{-2} \Rightarrow y = -4t^{-2} \end{cases} \quad \text{Integrale singolare o} \\ \text{curva involuppo del} \\ \text{fascio di rette}$$

29

Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari

Equazione di Clairaut

$$y = xy' - \text{sen}(y')$$

La soluzione è

$$y = cx - \text{sen}(c) \quad \text{fascio di rette}$$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = t \cos t - \text{sent} \end{cases} \quad \text{Integrale singolare o} \\ \text{curva involuppo del} \\ \text{fascio di rette}$$

30

Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari

Graficamente:

