Metodo di integrazione delle funzioni razionali fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx, \qquad N(x), D(x) \;\; \textit{polinomi in } x$$

1°*caso:* $\quad grado(N(x)) < grado(D(x))$

a) $D(x)$ *ha radici* *reali semplici*: *si determinano le radici del denominatore* $D(x)$ *e lo si scompone in fattori*

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Esercizio $\quad \int \frac{1}{x^2 - 3x + 2}dx$

$D(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

Si devono cercare 2 costanti A e B (in quanto 2 sono i fattori semplici in cui è scomposto il polinomio $D(x)$*):*

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x - A - 2B}{(x-2)(x-1)}$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Per il principio di identità dei polinomi, i polinomi a numeratore del $1°$ *e dell'ultimo membro, sono uguali se sono uguali i rispettivi coefficienti cioè*

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=-1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

e quindi

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx=\int \frac{1}{x-2}dx-\int \frac{1}{x-1}dx=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+c$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

b) $D(x)$ *ha radici* <u>*reali multiple*</u>

Esercizio

$$\int \frac{1}{x^3-x^2}dx$$

si ha $D(x)=x^3-x^2=x^2(x-1)$:

una radice semplice $(x=1)$ *e una radice multipla di molteplicità* 2 *(radice doppia* $x=0$*) si devono cercare* 3 *costanti*:

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{(A+C)x^2 + (-A+B)x - B}{x^2(x-1)}$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B = 0 \Rightarrow \\ -B = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} A = -1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{array}$$

$$\int \frac{1}{x^3 - x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int -\frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{1}{x} + c$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

c) $D(x)$ *ha radici* *complesse coniugate e semplici*

Esercizio

$$\int \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1}\,dx$$

$D(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$

3 radici: $x = -1$ *reale semplice*

$x = \mp i$ *complesse coniugate*

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 & A=\frac{1}{2} \\ B+C=0 \Rightarrow & B=-\frac{1}{2} \\ A+C=1 & C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

E quindi si ottiene

$$\int \frac{1}{x^3+x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{2}arctgx + c$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Non consideriamo il caso di radici complesse multiple

2°*caso:* $grado(N(x)) \geq grado(D(x))$

In questo caso si deve eseguire la divisione tra il polinomio a numeratore $(N(x))$ *e il polinomio a denominatore* $(D(x))$:

$$N(x) = D(x)q(x) + r(x)$$

$q(x) =$ *quoziente della divisione*
$r(x) =$ *resto della divisione*

Integrazione delle funzioni razionali fratte

$$\Rightarrow \frac{N(x)}{D(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{D(x)}$$

con $r(x)$ *un polinomio di grado inferiore a quello di* $N(x)$:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx = \int q(x)dx + \int \frac{r(x)}{D(x)}dx$$

Integrale di funzione razionale intera (polinomio)

Integrale di funzione razionale fratta (caso 1)

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Esercizio

$$\int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2}dx \qquad grado(N(x))=5 > grado\ (D(x)) = 4$$

Effettuando la divisione tra i due polinomi si ottiene

$q(x)=x$, $\quad r(x)= -x^3-x+1$

$$\Rightarrow \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} = x - \frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^2}$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

$$\frac{x^3+x-1}{x^4+x^2}=\frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=$$

$$\frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+C=1 \\ B+D=0 \\ A=1 \\ B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \\ D=1 \end{cases}$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Si ha

$$\int \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}dx=\int xdx-\int \frac{x^3+x-1}{x^4+x^2}dx=$$

$$\int xdx-\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{1}{x^2}dx-\int \frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}-\ln|x|-\frac{1}{x}-arctgx+c$$

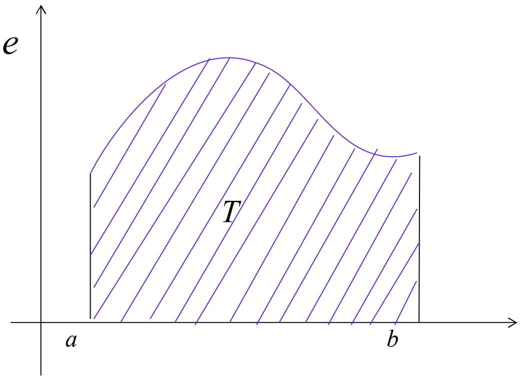
Applicazioni dell'integrale definito

Calcolo dell'area di una figura piana

Sia $T = \{(x, y) \in R^2 : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$

Con f(x) funzione continua e
$f(x) \ge 0\ \ in\,[a,b]$

$$area(T) = \int_a^b f(x)dx$$



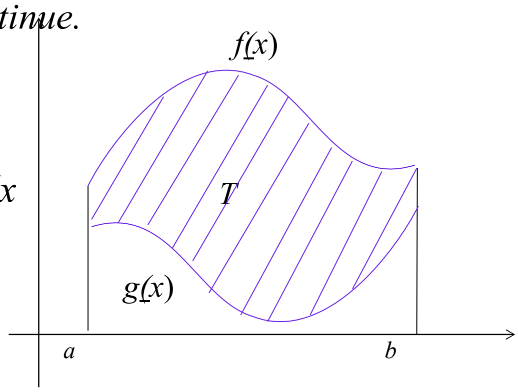
Applicazioni dell'integrale definito

Calcolo dell'area di una figura piana

Sia $T = \{(x, y) \in R^2 : a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$

Con f(x) e g(x) funzione continue.

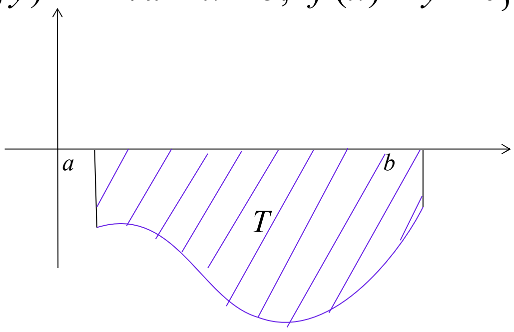
$$area(T) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



Applicazioni dell'integrale definito

Calcolo dell'area di una figura piana

Se $f(x) \leq 0$ *cioè* $T = \{(x,y) \in R^2 : a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq 0\}$



Allora:

$$area(T) = -\int_a^b f(x)dx$$

Calcolare l'area della regione

$$T = \{(x,y) \in R^2 : 1 \leq x \leq e,\ 0 \leq y \leq \ln x\}$$

Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra l'asse delle x, il grafico della funzione $y=xe^x$ *con* $x \in [-1,1]$

Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra le due parabole di equazione $y = x^2 - 3x + 2$ *e* $y = -x^2 + x + 2$