Integrale indefinito

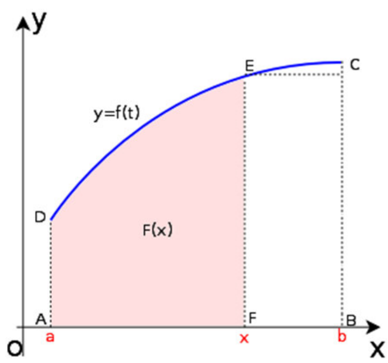
Funzione integrale

Definizione

Sia f una funzione integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[a,b]$ *e* $x\in[a,b]$, *si definisce*

FUNZIONE INTEGRALE di f, l'integrale definito:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$



Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f continua in $[a,b]$, *allora la funzione integrale*

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ *è di classe* $C^1([a,b])$

$$F'(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b]$$

Dimostrazione

Scriviamo il rapporto incrementale di $F(x)$:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right]=\frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)dt\right]$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Per il Teorema della media integrale applicato ad f in $[x,x+h]$, $\exists x(h)\in(x,x+h)$:

$$\frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)dt\right]=f(x(h))$$

Si è ottenuto $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x(h))$

Ed essendo f continua in $[a,b]$ *si ha la tesi*:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(x(h))=f(x)$$

Integrale indefinito

Osservazione

L'ipotesi di continuità per f è fondamentale per la derivabilità di F.
Infatti se f è solo integrabile non si può affermare che F è derivabile.

Esempio

$$f(x) = segn\ x = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = |x|$$

$f(x)$ è integrabile ma non è continua, $F(x)$ è continua ma non è derivabile in $x=0$.

Integrale indefinito

Definizione

Una funzione F(x), *derivabile in* $[a,b]$, *si chiama* *PRIMITIVA di* $f(x)$ se

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Esempio

Una primitiva di $f(x)$= cos x è la funzione $F(x)$=sin x.

Se $f(x)= x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$

Integrale indefinito

Se *F* (*x*) *è una primitiva di f* (*x*) *lo è anche F* (*x*)+*c*

Infatti $\left(F(x)+c\right)' = F'(x) = f(x)$

Definizione

La famiglia di tutte le primitive di una funzione $f(x)$ *continua in* $[a,b]$ *è detta INTEGRALE INDEFINITO e si indica*:

$$\int f(x)dx$$

quindi

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Integrale indefinito

Corollario del Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia *f* (*x*) *una funzione continua su* $[a,b]$ *e F* (*x*) *una primitiva di f. Allora*

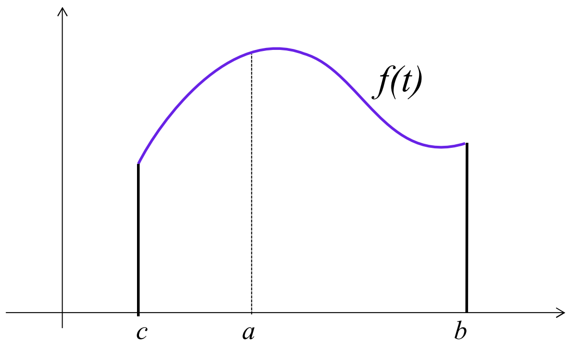
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

Esempio

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Dimostrazione
Consideriamo una funzione f(t) definita in un intervallo [c,b]



L'area del sottografico della funzione f con $x \in [a,b]$ è dato da:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt$$

Ma poiché $F(x) = \int_c^x f(t)dt$

allora

$$F(a) = \int_c^a f(t)dt \quad e \quad F(b) = \int_c^b f(t)dt$$

Per cui

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Questo è il <u>*legame*</u> *tra l'integrale definito* $\int_a^b f(x)dx$

e l'integrale indefinito $\int f(x)dx$.

$\int_a^b f(x)dx$ *è un numero reale*

$\int f(x)dx$ *è un insieme di funzioni*

Integrale indefinito, proprietà

Dalle proprietà delle derivate si ottiene:

$i)$ $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$

$ii)$ $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, \qquad c = costante$

Integrale indefinito

Integrali indefiniti immediati

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \alpha \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \qquad \alpha = -1$$

$$\int e^{x} dx = e^{x} + c,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + c$$

Integrazione per sostituzione

Sia F una primitiva di f in un intervallo I, ossia

F'(t)=f(t) $\forall\ t \in I$

Sia t=g(x) una funzione derivabile con derivata continua

in [a,b] : g([a,b])$\subset$*I,*

dal teorema della derivata di una funzione composta

$$D[F(g(x)] = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Integrazione per sostituzione

Integrando otteniamo

$$\int D[F(g(x)] = \int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx$$

Ossia

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + c$$

Integrali indefiniti immediati

Esercizio

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x)dx = -\ln|\cos x| + c$$

- $\int \sin x \cos^2 x\, dx = -\int -\sin x \cos^2 x dx = \dfrac{\cos^3 x}{3} + c$

- $\int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + c$

- $\int \dfrac{1}{(1+x^2)arctgx} dx = \int \dfrac{1}{(1+x^2)} \dfrac{1}{arctgx} dx = \ln(arctgx) + c$

Integrazione per parti

Siano f e g due funzioni derivabili con derivata continua, si ha

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$f(x) =$ *fattore finito*

$g'(x)dx =$ *fattore differenziale*

L'ipotesi che le derivate di f e g siano continue assicura che gli integrali siano ben definiti.

Integrazione per parti

Dimostrazione

Consideriamo la formula di derivazione di un prodotto

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integrando membro a membro si ha

$$\int [f(x)g(x)]' dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

essendo $f \cdot g$ *una primitiva della sua derivata* $[f \cdot g]'$
si ottiene la tesi

Integrazione per parti

Esercizio

Utilizzando il metodo di integrazione per parti calcolare

- $\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c$

- $\int \ln x dx = \int 1\cdot \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$

Integrazione per parti

- $\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$

$$e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x dx\right) \Rightarrow$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} = \frac{e^x\left(\sin x - \cos x\right)}{2} + c$$

- $\int \cos^2 x dx = \int \cos x\cdot\cos x dx = \cos x\sin x + \int \sin^2 x dx =$

$$\cos x\sin x + \int\left(1-\cos^2 x\right)dx = \cos x\sin x + x - \int \cos^2 x dx \Rightarrow$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{\cos x\sin x + x}{2} + c$$

Integrazione per sostituzione esercizi

Esercizio
Utilizzando il metodo di integrazione per sostituzione calcolare

- $\int e^{\sqrt{x}} dx$ *con la sostituzione* $x = t^2, \quad t \geq 0$

- $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

Integrazione per sostituzione

Se l'integrale è definito:

$$\int_a^b f(x)dx$$

e si effettua la sostituzione x=g(t), supponendo che

$$x = a \Rightarrow c = g^{-1}(a)$$

$$x = b \Rightarrow d = g^{-1}(b)$$

si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

Integrazione per sostituzione

Esercizio
Calcolare

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \quad \textit{con la sostituzione } x=\sin t$$