

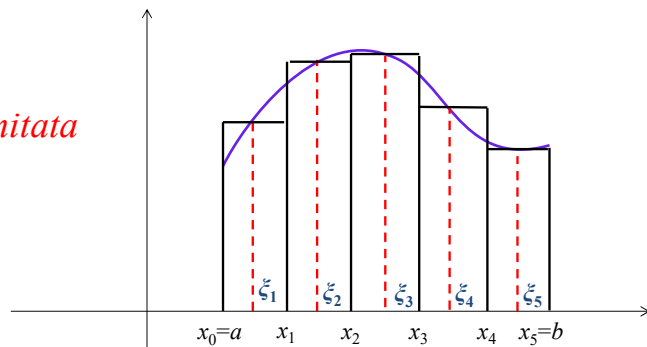
Calcolo integrale per funzioni di una variabile

1

Calcolo integrale

Integrale definito

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, *limitata*



Costruiamo la somma di Cauchy-Riemann

$n=5$

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)$$

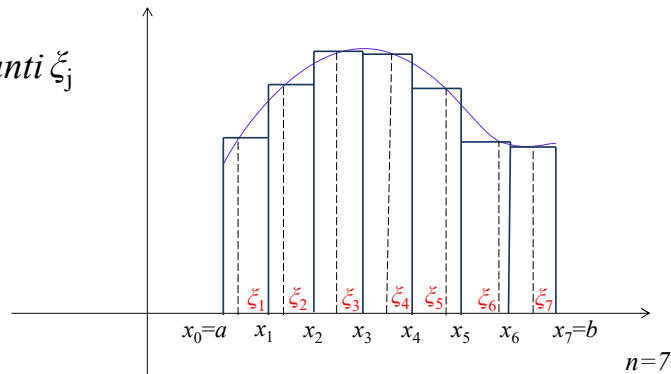
Dove la suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ è individuata dai punti

$$(a = x_0), x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, (x_n = b), \quad x_j = a + jh, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

2

Integrale definito

La scelta dei punti ζ_j
è arbitraria



All'aumentare dei punti della suddivisione di $[a,b]$ aumenta il numero degli addendi della somma di Cauchy-Riemann e diminuisce il valore assoluto di tali addendi.

3

Integrale definito

Definizione

Si dice che la funzione $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, **limitata**, è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$, se detta S_n una sua qualsiasi somma di Cauchy-Riemann, esiste finito il limite di S_n , per $n \rightarrow \infty$, e tale limite non dipende dalla scelta dei punti ζ_j . Allora si pone

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$$

Si legge «integrale da a a b in dx »

$f(x)$ si chiama funzione integranda e x è la variabile d'integrazione ed è una variabile muta:

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{ha lo stesso significato di} \quad \int_a^b f(x) dx$$

4

Integrale definito, interpretazione geometrica

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_I f(x)dx, \quad \int_a^b f$$

$I = [a, b]$ è il dominio di integrazione, a e b sono gli estremi di integrazione.

Se $f(x)$ è positiva allora $\int_a^b f(x)dx$ rappresenta l'area del «sottografico» di $f(x)$.

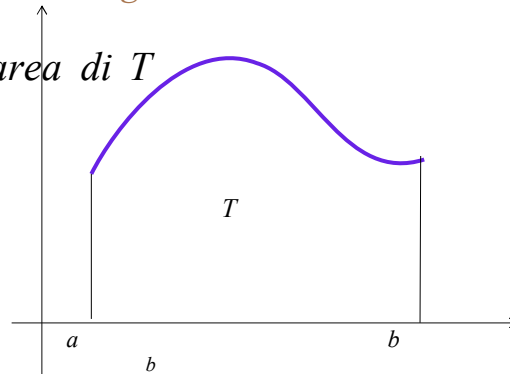
Infatti la somma S_n rappresenta un'approssimazione dell'area del «trapezoide T » individuato da f :

$$T : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

5

Integrale definito, interpretazione geometrica

Se $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \text{area di } T$



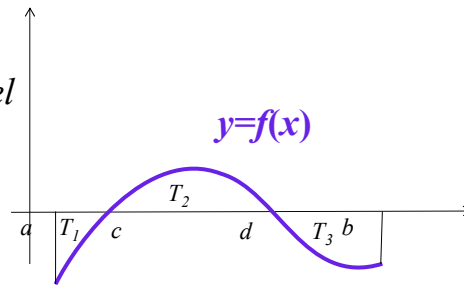
Se in $[a, b]$, f cambia segno allora $\int_a^b f(x)dx$ è sempre un numero ma non rappresenta più l'area del sottografico di f .

Osservazione $\int_a^b f(x)dx$ è un numero, non dipende da x .

6

Integrale definito, interpretazione geometrica

Se f cambia segno in $[a,b]$,
e si vuole calcolare l'area del
sottografico di f , allora si
deve suddividere l'intervallo
in tanti intervalli in cui
 f assume segno costante:



$$(\text{area del sottografico di } f) = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^b f(x)dx$$

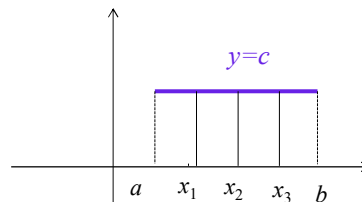
7

Integrale definito

L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann in
 $I=[a,b]$ si indica con $R(I)$ o $R([a,b])$.

$R(I)$ non è vuoto, infatti ogni funzione costante $y=c$ è
integrabile su qualunque intervallo $[a,b]$ e si ha

$$\int_a^b c \, dx = c(b-a)$$



Per qualunque suddivisione di $[a,b]$ si ha

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n c = (b-a)c$$

$c+c+\dots+c$ (n volte)

8

Integrale definito, classi di funzioni integrabili

Teorema.

Se $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile.

Teorema.

Se $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona e limitata, allora è integrabile.

Teorema.

Se $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata in $[a,b]$ con un numero finito di punti di discontinuità, allora è integrabile.

Questo teorema si può estendere alle funzioni limitate con una infinità numerabile di punti di discontinuità, cioè i punti di discontinuità possono essere infiniti ma non devono essere «troppi».

9

La funzione di Dirichlet su $[a,b]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 0 & \text{se } x \in [a,b] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

è limitata e non è integrabile secondo Riemann (i punti di discontinuità sono «troppi»: tutto $[a,b]$)

Infatti se si scelgono i punti ξ_j razionali si ha

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n 1 \cdot (x_j - x_{j-1}) = (b - a)$$

Se invece si scelgono i punti ξ_j irrazionali si ha

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n 0 \cdot (x_j - x_{j-1}) = 0$$

10

Integrale definito, proprietà

Siano f e g integrabili in $[a,b]$, allora:

1. **Linearità dell'integrale:** se α e β sono costanti la funzione $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile e si ha

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

2. **Additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione:**

Se $a \leq s \leq b$ allora f è integrabile anche su $[a,s]$ e $[s,b]$ e:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^s f(x) dx + \int_s^b f(x) dx$$

11

Integrale definito, proprietà

3. **Positività e monotonia:**

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

In particolare

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Per convenzione, se $a < b$ si pone $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

12

Teorema della media integrale

i) Sia f limitata e integrabile secondo Riemann in $[a,b]$

Allora

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Dove $m = \inf_{[a,b]} f$ e $M = \sup_{[a,b]} f$

ii) Se f è continua su $[a,b]$ $\exists x_0 \in (a,b)$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(x_0)$$

(valor medio integrale di f su $[a,b]$)

13

Teorema della media integrale

Dimostrazione

i) Essendo $f(x)$ limitata si ha

$$m \leq f(x) \leq M$$

Integrando membro a membro su $[a,b]$:

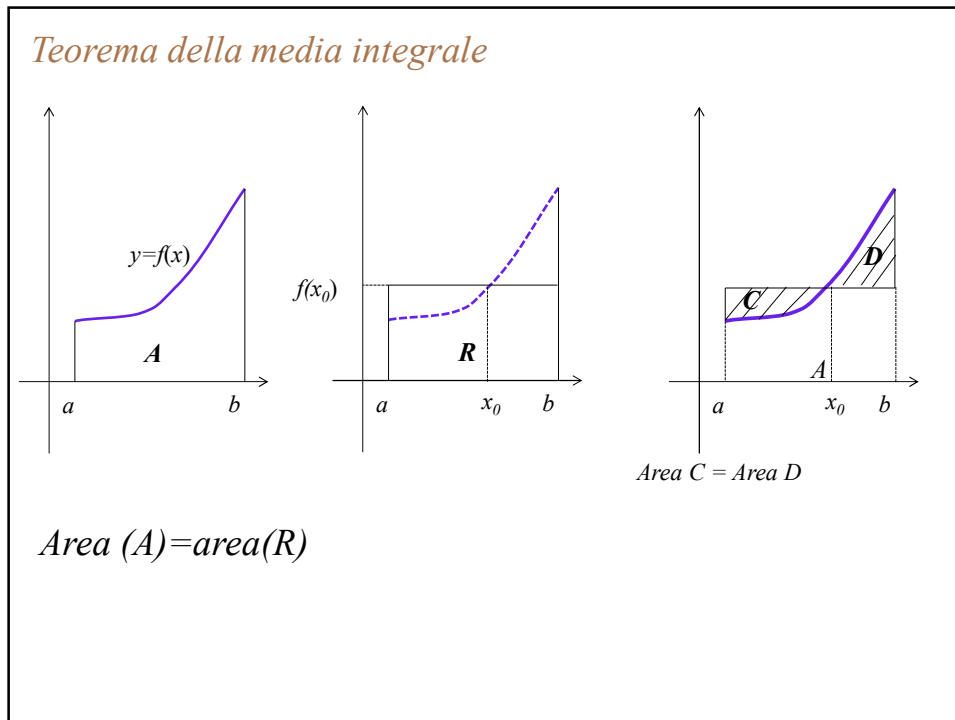
$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

ii) Indichiamo con y_0 il valore $y_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

che è un valore compreso tra m ed M .

Essendo f continua, per il teorema dei valori intermedi, esisterà $x_0 \in (a,b)$: $f(x_0) = y_0$ cioè la tesi

14



15



16