Approssimazione di funzioni con polinomi

Polinomio di Taylor

Data una funzione f derivabile n volte in x_0, esiste uno e un solo polinomio $T_n(x)$ di grado $\leq n$ con la proprietà che

$$T_n(x_0) = f(x_0),\ T_n'(x_0) = f'(x_0), \ldots, T^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Tale polinomio si chiama polinomio di Taylor ed è

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Polinomio di centro x_0 e grado n

Approssimazione di funzioni con polinomi

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Se $x_0 = 0$ $T_n(x)$ è detto polinomio di Mac Laurin di grado n.

L'errore che si commette quando si approssima $f(x)$ con $T_n(x)$:

è dato da: $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

Approssimazione di funzioni con polinomi

$a) R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ $\quad$ *per* $x \to x_0$, $\quad$ *Formula di Peano*

cioè $\quad \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$

$b)$ Se f *è derivabile* $n+1$ *volte in* (a,b) *escluso al più* x_0,

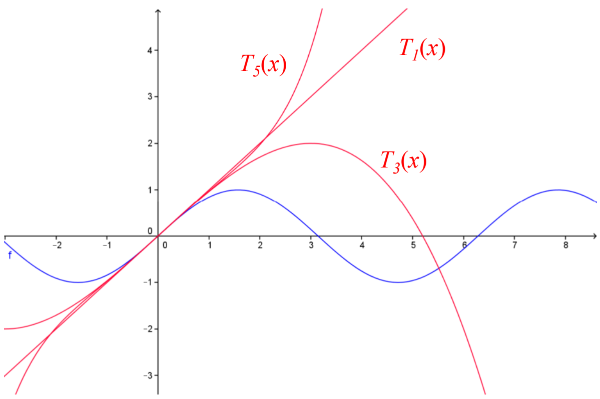
$\forall x \in (a,b),\ \exists c$ *compreso tra* x *e* x_0 :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$ *Formula di Lagrange*

Approssimazione di funzioni con polinomi

Esempio.

y=sinx in x=0, $T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ *solo potenze dispari*



$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

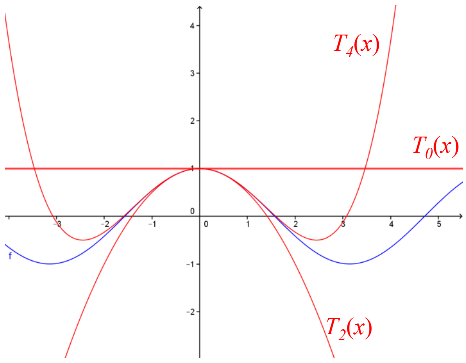
$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Approssimazione di funzioni con polinomi

Esempio

y=cosx in x=0 $\qquad T_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ *solo potenze pari*

$$T_0(x)=1$$



$$T_2(x)=1-\frac{x^2}{2!}$$

$$T_4(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

Approssimazione di funzioni con polinomi

Analogamente in $x_0=0$, si ottiene

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+R_{2n+1}(x)$$

Approssimazione di funzioni con polinomi

Esercizio
Scrivere il polinomio di Mac Laurin di grado 2 che approssima $f(x)=ln(1-3x)$

Uso della formula di Taylor e Mac Lauri nel calcolo dei limiti

Esercizio
Utilizzando la formula di Mac Laurin calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)$$