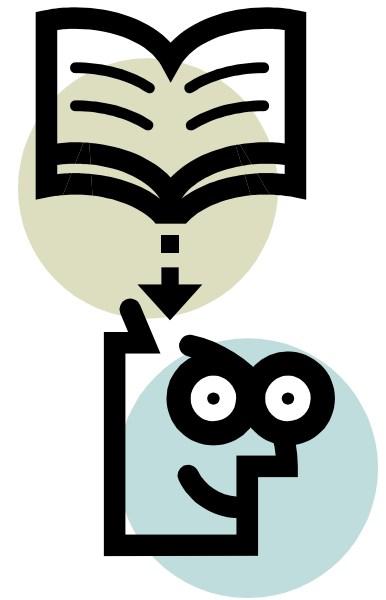


Operazioni a più cifre

Strategie inventate
o algoritmi
tradizionali?



Gli algoritmi tradizionali...

...Servivano a fare a mano calcoli lunghi e complessi

La tecnologia odierna ha reso superflui questi metodi

Vi sono strategie alternative di calcolo che:

- Sono più **semplici** e **veloci**;
- Spesso possono essere eseguite **a mente**;
- Contribuiscono alla costruzione del **senso del numero** nell'allievo

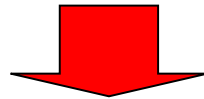
Esempio

"Maria ha un album da 114 figurine. Per ora ne ha raccolte 89. Quante figurine le mancano per completare l'album?"

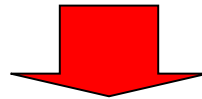
- 1) $89 + 11$ fa 100. $11 + 14$ fa 25.
- 2) Tolgo 14 e poi tolgo altri 11, in tutto 25
- 3) 89, 99, 109 e sono 20. 110, 111, 112, 113, 114 (conta sulle dita) e sono 25.

Calcolo: tre classi di strategie

Modellamento diretto

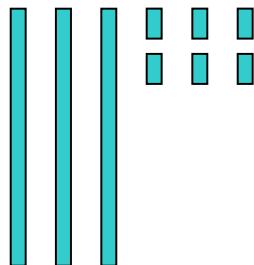
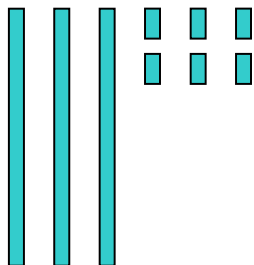
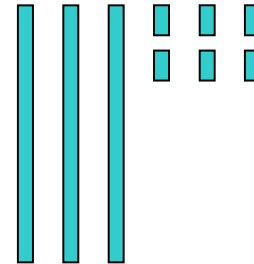
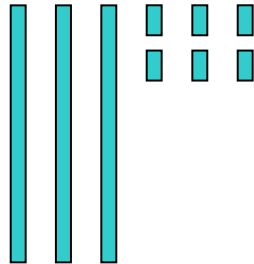
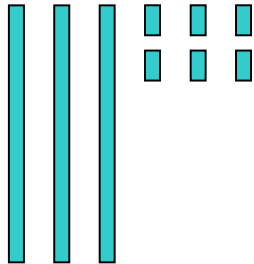


Strategie inventate

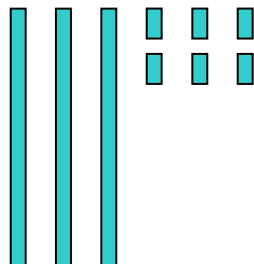
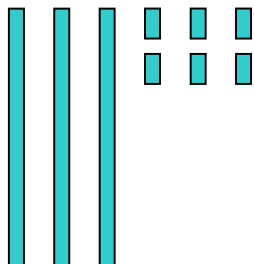


Algoritmi tradizionali

Modellamento diretto



36 x 7





Strategie inventate vs algoritmi tradizionali

- Le strategie inventate sono orientate al numero, gli algoritmi tradizionali orientati alla cifra (“disinsegnano” il valore posizionale)
- Le strategie inventate partono da sinistra, gli algoritmi tradizionali da destra
- Le strategie inventate sono flessibili, gli algoritmi tradizionali sono rigidi

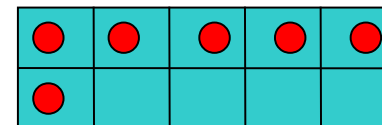
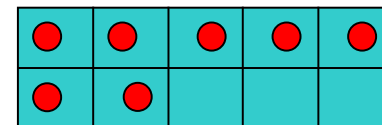
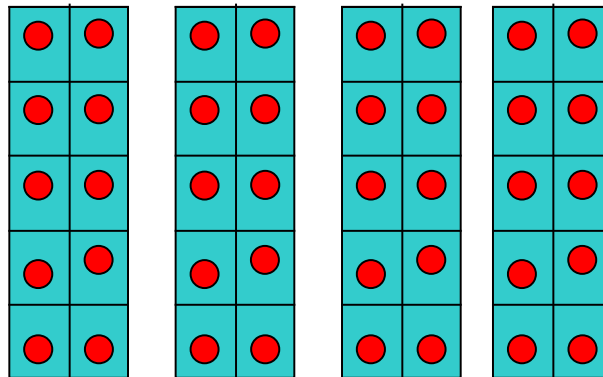
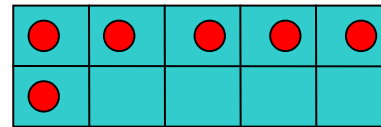
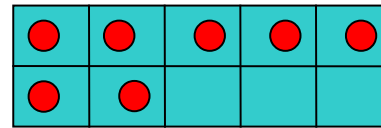


Benefici delle strategie inventate

- Facilitano l'apprendimento della numerazione posizionale in base 10
- Riducono la probabilità di errore
- Riducono la necessità di ripetere i concetti
- Forniscono le basi per il calcolo mentale e le stime
- Sono molto più veloci
- Danno vantaggi nei problemi, e non danno svantaggi nei test standardizzati

Addizione: primo addendo a due cifre, secondo addendo a una cifra

- “Tommaso ha letto 47 pagine del suo libro. Legge altre 6 pagine. Quante pagine ha letto in tutto?”



Addizione: addendi a due cifre

- **Aggiungo le decine, aggiungo le unità, poi metto insieme**

46 + 38: 40 + 30 fa 70, 6 + 8 fa 14, 70 + 14 fa 84

$$\begin{array}{r} 46 + \\ 38 \\ \hline 70 \\ 14 \\ \hline 84 \end{array}$$

- **Aggiungo le decine e poi aggiungo le unità**

46 + 38: 46 + 30 fa 76. Devo aggiungere 8. 76 + 4 fa 80, più altri 4 fa 84

$$\begin{array}{r} 46 + 38 \\ \longrightarrow \\ 76 + 8 \\ \longrightarrow \\ 80, 84 \end{array}$$

Addizione: addendi a due cifre

- **Arrotondo alla decina**

46 + 38: prendo 2 da 46 e li aggiungo al 38 per fare 40. Ora ho $44 + 40 = 84$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 46 + 38 \\ \hline 44 + 40 \\ \hline 84 \end{array}$$

- **Uso un numero "simpatico" e compenso**

46 + 38: 46 + 40 fa 86. In questo modo ne ho 2 di troppo, quindi fa 84.

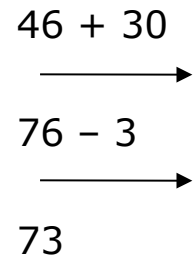
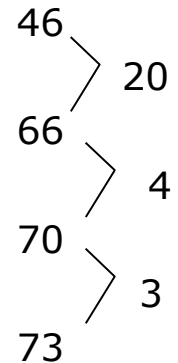
$$\begin{array}{r} 46 + 38 \\ \longrightarrow \\ 46 + 40 \\ \longrightarrow \\ 86 - 2 \\ = 84 \end{array}$$

Sottrazione: modello intuitivo del “counting up”

- “Samuele ha 46 figurine dei calciatori. Giocando con gli amici ne vince di nuove. Ora ha 73 figurine. Quante figurine ha vinto Samuele?”
- “Giovanna conta i suoi pennarelli. Alcuni sono rotti, alcuni no. In tutto i pennarelli sono 73. 46 non sono rotti. Quanti pennarelli sono rotti?”

Sottrazione “counting up”: operandi a due cifre

- **Aggiungo decine per avvicinarmi al minuendo, poi unità**
 $73 - 46$: $46 + 20$ fa 66 ($+ 30$ sarebbe troppo). Più altri 4 fa 70 , più altri 3 fra 73 . Quindi: 20 più altri 7 cioè 27 .
- **Aggiungo decine fino a superare il minuendo, poi torno indietro**
 $73 - 46$: $46 + 30$ fa 76 . Ma 30 sono 3 di troppo, quindi fa 27 .



$$30 - 3 = 27$$

Sottrazione: modello intuitivo del “take away”

- “Alla ricreazione 73 bambini erano in cortile. Al suono della campanella i 46 bambini di seconda sono rientrati. Quanti bambini sono rimasti fuori?”

Sottrazione “take away”: operandi a due cifre

- **Sottraggo decine in più, poi riaggiungo**
 $73 - 46: 73 - 50 \rightarrow 23 + 4 \rightarrow 27$
- **Aggiungo al minuendo, se necessario**
 $73 - 46 \rightarrow 76 - 46 \rightarrow 30 - 3 \rightarrow 27$

Sottrazione “take away”: operandi a due cifre

- **Sottraggo decine da decine, poi tolgo le unità**

73 - 46: 70 - 40 fa 30. Ne tolgo 6 e fa 24. Rimetto i 3 che avevo tolto: 27.

$$\begin{array}{r} 70 - 40 \\ \longrightarrow \\ 30 - 6 \\ \longrightarrow \\ 24 + 3 = \\ 27 \end{array}$$

- **Sottraggo le decine, poi le unità**

73 - 46: 73 - 40 fa 33. Ne devo togliere 6: meno 3 fa 30, meno altri 3 fa 27.

$$\begin{array}{r} 73 - 40 \\ \longrightarrow \\ 33 - 3 \\ \longrightarrow \\ 30 - 3 = \\ 27 \end{array}$$

Errori nell'addizione in colonna

Errori nell'addizione in colonna (Fuson, 1990). Riporto non eseguito (a); riporto eseguito ma non calcolato (b); riporto eseguito sempre sulla colonna più a sinistra (c); allineamento sbagliato nella versione estesa dell'algoritmo (d); cifre usate più volte o ignorate quando gli addendi hanno un numero diverso di cifre (e, f).

$$\begin{array}{r} \text{(a)} \\ 5 \ 6 \ 8 + \\ 7 \ 7 \ 8 = \\ \hline 12 \ 13 \ 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(b)} \\ 5 \ 6 \ 8 + \\ 7 \ 7 \ 8 = \\ \hline 2 \ 3 \ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(c)} \\ 1 \ 6 \ 8 + \\ 1 \ 5 \ 6 = \\ \hline 4 \ 1 \ 4 \end{array}$$

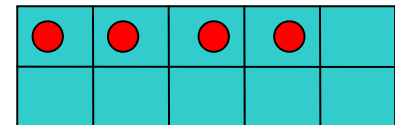
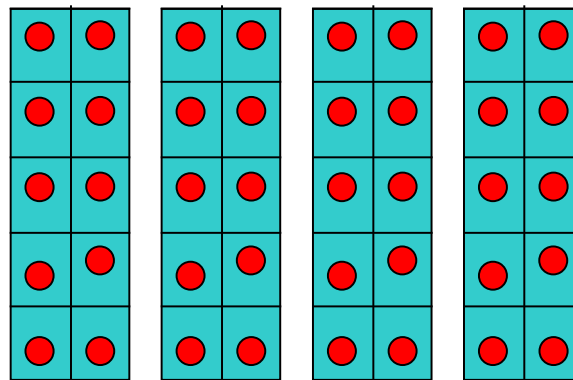
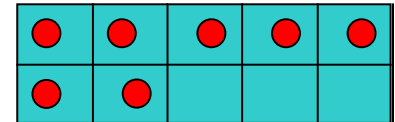
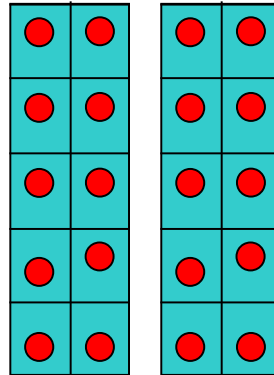
$$\begin{array}{r} \text{(d)} \\ 8 \ 7 + \\ 3 \ 9 = \\ \hline 1 \ 6 + \\ \hline 1 \ 1 = \\ \hline 2 \ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(e)} \\ 6 \ 3 + \\ \hline 2 = \\ 8 \ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(f)} \\ 6 \ 3 + \\ \hline 2 = \\ 5 \end{array}$$

L'algoritmo tradizionale per l'addizione (1)

Iniziare con i
modelli



L'algoritmo tradizionale per l'addizione (2)

Registrare ogni passo:

358 +

276

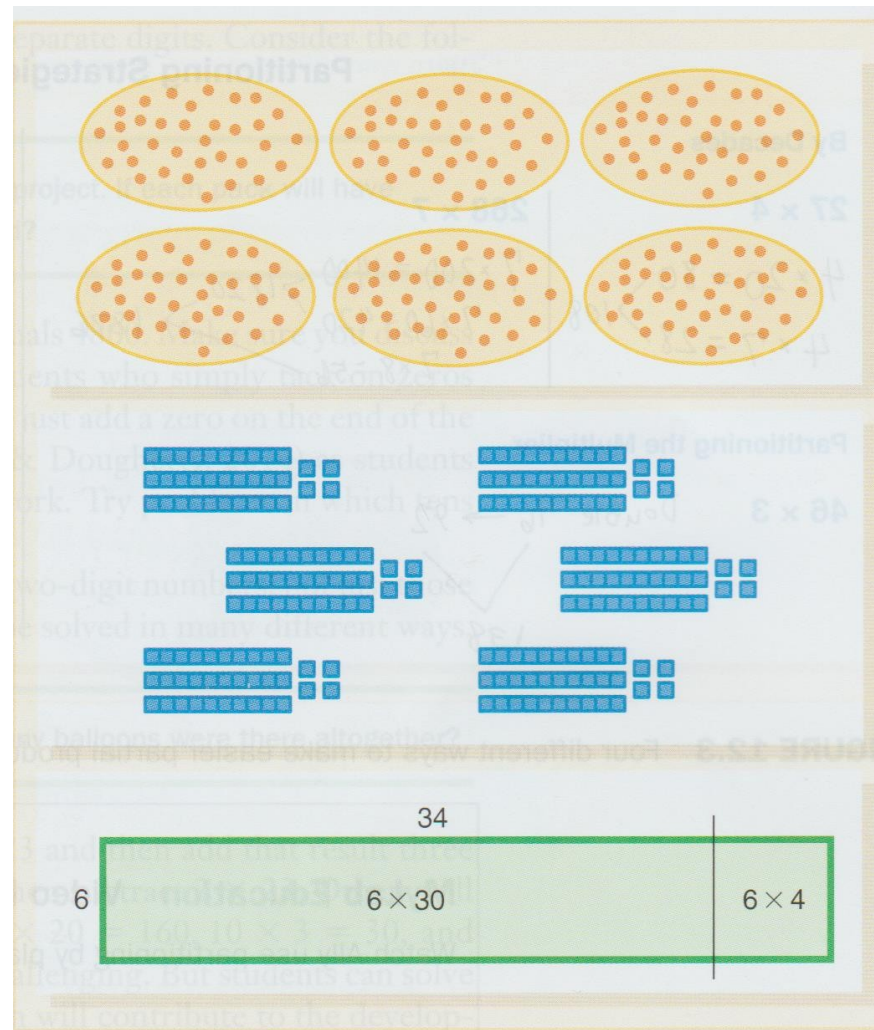
500

120

14

634

Moltiplicazione: rappresentazione dei fattori



Moltiplicazione: moltiplicatore a una cifra

Strategie col numero completo

- $63 \times 5 = 63 + 63 + 63 + 63 + 63$ (si usano poi strategie per l'addizione a più cifre)

The image shows handwritten mathematical work on a whiteboard. On the left, the multiplication 63×5 is calculated using repeated addition. The steps are:

$$\begin{array}{r} 63 \\ + 63 \\ \hline 126 \\ + 63 \\ \hline 189 \\ + 63 \\ \hline 252 \\ + 63 \\ \hline 315 \end{array}$$

On the right, a tree diagram illustrates the same process. It starts with three instances of 63. The first two 63s are grouped together with a bracket labeled 126. The second two 63s are grouped together with a bracket labeled 126. These two 126s are then grouped together with a bracket labeled 189. Finally, the 189 and the remaining 63 are grouped together with a bracket labeled 315.

Moltiplicazione: moltiplicatore a una cifra

- **Strategie di suddivisione**
- 1) Per decine o centinaia: $27 \times 4 = (20 \times 4) + (7 \times 4)$
- $268 \times 7 = (200 \times 7) + (60 \times 7) + (8 \times 7)$
- 2) Suddividere il moltiplicatore: $46 \times 3 = \text{due volte } 46 (92) + 46 = 138$
- 3) Altre suddivisioni: 27×8 . 25×4 fa 100, quindi 25×8 fa 200. 2×8 fa 16, quindi ottengo 216.

Partitioning Strategies for Multiplication

By Decades

27×4

$4 \times 20 = 80$
 $4 \times 7 = 28$ $\rightarrow 108$

268×7

$7 \times 200 = 1400$
 $7 \times 60 = 420$
 $7 \times 8 = 56$ $\rightarrow 1820$ $\rightarrow 1876$

By Tens and Ones

27×4

$10 \times 4 = 40$
 $10 \times 4 = 40$
 $7 \times 4 = 28$ $\rightarrow 80$ $\rightarrow 108$

Partitioning the Multiplier

46×3 Double $46 \rightarrow 92$

$\rightarrow 138$

Other Partitions

27×8

$25 \times 4 \rightarrow 100$
so $25 \times 8 \rightarrow 200$
 $2 \times 8 = 16$ $\rightarrow 216$

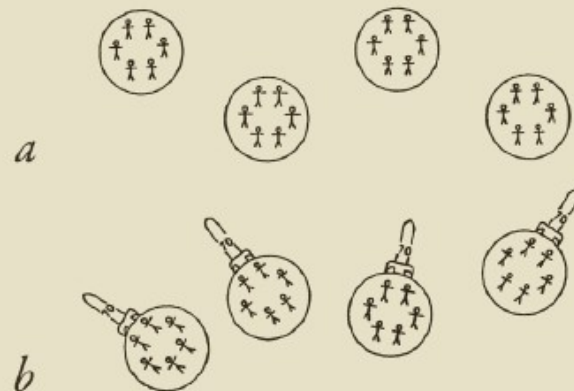
ATTIVITÀ 6.3 ✂

Obiettivo: Far scoprire strategie di scomposizione per la moltiplicazione a più cifre.

Materiali: Nessuno (oppure materiali strutturati per il modellamento diretto, se la classe non ha mai lavorato su questo tipo di problema).

Svolgimento: L'insegnante racconta la seguente storia: "C'erano quattro pianeti, e ognuno di questi pianeti aveva sei astronauti che l'esploravano", e disegna alla lavagna la figura riprodotta in FIG. 6.8a. Poi prosegue: "A un certo punto su ogni pianeta atterra un'astronave con altri settanta astronauti", e disegna alla lavagna la FIG. 6.8b. "Quanti astronauti c'erano su ogni pianeta? E quanti astronauti c'erano in tutto?". I bambini risolvono il problema; alla fine, l'insegnante coordina una discussione per far condividere le strategie usate e istituzionalizza la conoscenza costruita facendo scrivere il fatto aritmetico $76 \times 4 = 304$ sul quaderno o alla lavagna.

FIGURA 6.8



L'algoritmo tradizionale per la moltiplicazione: difficoltà

- I fattori vanno correttamente incolonnati
- Nell'eseguire le moltiplicazioni in croce, il **moltiplicando** è la corrispondente cifra del **moltiplicatore** del prodotto principale
- Quando una moltiplicazione parziale dà un prodotto a due cifre, occorre separare la multiunità più bassa dalla successiva (riporto)
- Il riporto va **aggiunto** alla moltiplicazione in croce successiva (si cambia operazione a metà del passaggio!)
- I prodotti in croce vanno scritti in parte **a fianco** di cifre già scritte, in parte **sotto**, incolonnandoli correttamente

Errori nella moltiplicazione in colonna

TABELLA 6.2

Errori nella moltiplicazione in colonna (Lampert, 1986). Nel prodotto unità per decine, si aggiunge la cifra del moltiplicatore anziché quella del riporto (a); si scrivono i due prodotti uno a fianco all'altro sulla stessa riga, senza eseguire il riporto (b); si procede da sinistra a destra, riportando la cifra delle unità nella colonna a destra, anziché quella delle decine nella colonna a sinistra (c).

$$\begin{array}{r} \text{(a)} \\ 86 \times \\ \quad 3 = \\ \hline 278 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(b)} \\ 86 \times \\ \quad 3 = \\ \hline 2418 \end{array}$$

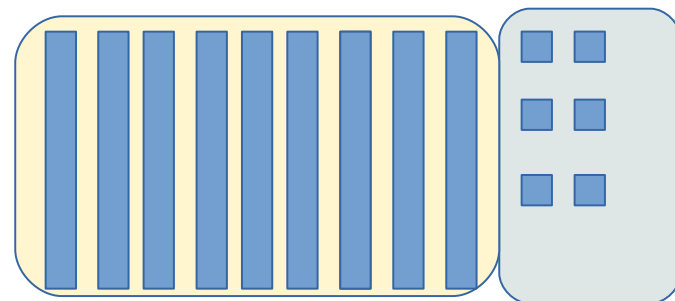
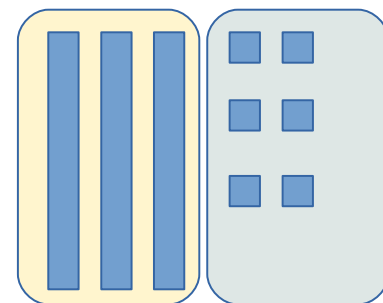
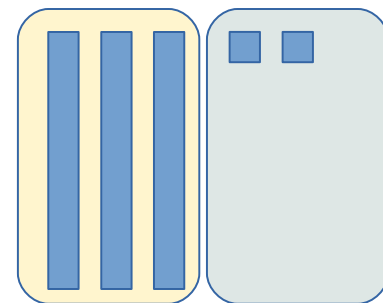
$$\begin{array}{r} \text{(c)} \\ 86 \times \\ \quad 3 = \\ \hline 222 \end{array}$$

L'algoritmo tradizionale per la moltiplicazione

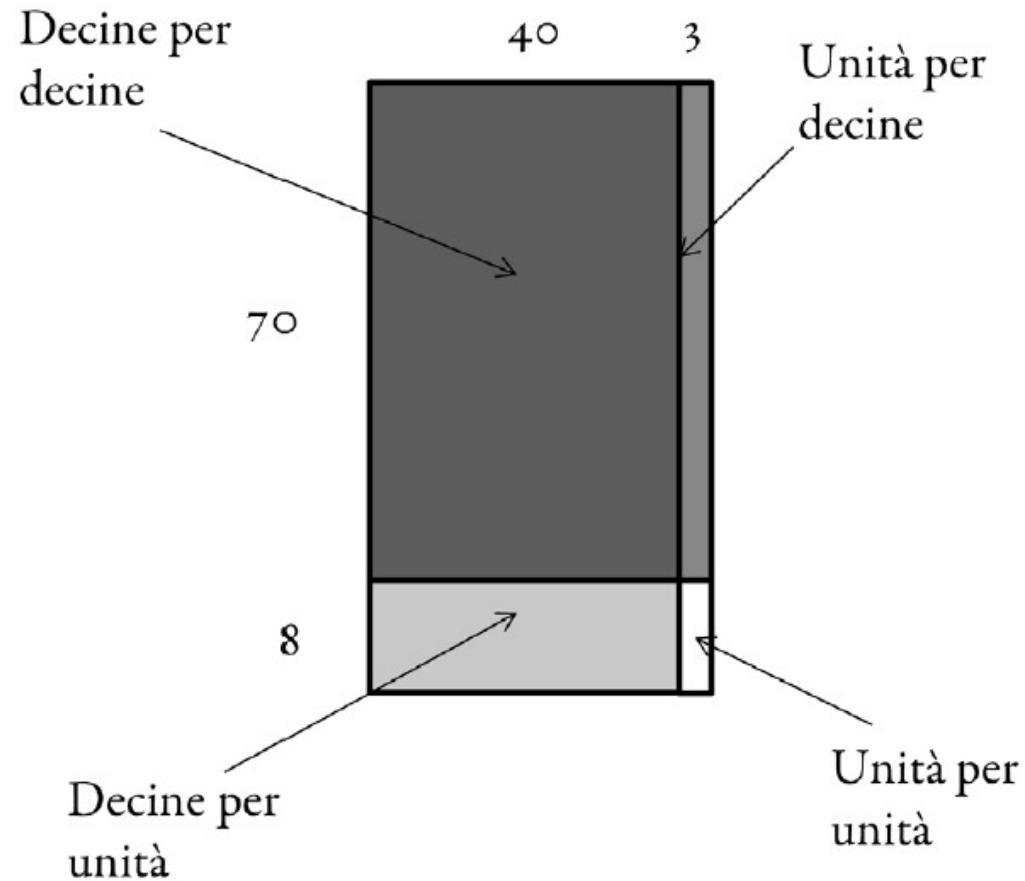
1. Usare il modello dell'area
2. Utilizzare uno schema di registrazione con i prodotti parziali, anziché col riporto
3. Passare da moltiplicandi a 2 cifre a moltiplicandi a 3 cifre, mantenendo il moltiplicatore a 1 cifra

L'algoritmo tradizionale: moltiplicatore a una cifra

1. Iniziare con una moltiplicazione semplice senza riporto, come 32×3 .
2. Far incolonnare i fattori, e far calcolare il prodotto mediante strategie.
3. Far rappresentare il fattore a due cifre con i BAM su un tappetino delle decine e unità.
4. Far moltiplicare le unità richiamando il fatto aritmetico di base 2×3 .
5. Rappresentare il prodotto delle unità sia sul tappetino, sia nella moltiplicazione in colonna, scrivendo il numero 6 nel posto appropriato.
6. Ripetere con le decine
7. Ripetere con una moltiplicazione col riporto (ancora con moltiplicando a 2 cifre, moltiplicatore a 1 cifra)



Moltiplicazione: moltiplicatore a due cifre



La “moltiplicazione accessibile” di Fuson

$$78 = 70 + 8$$

$$\underline{\times 43} = \underline{40 + 3}$$

$$2800 = 40 \times 70$$

$$320 = 40 \times 8$$

$$210 = 3 \times 70$$

$$\underline{24 = 3 \times 8}$$

$$3354$$

Divisione: strategia del fattore mancante

Supponiamo di voler calcolare $3129 : 46$. Debbo cercare di capire quante volte il 46 sta nel 3129 trovando quante copie di un insieme di 46 oggetti posso togliere via da un insieme di 3129. A questo traguardo si arriva per approssimazioni successive. Poiché è facile vedere che $46 \times 100 = 4600$, se ne conclude che $46 \times 50 = 2300$. Togliendo via 50 copie del mio insieme da 46 dall'insieme da 3129, rimarranno $3129 - 2300 = 829$ oggetti. Da questi, posso togliere ancora $46 \times 10 = 460$ oggetti, e me ne rimangono 369. Siccome ho già calcolato che $46 \times 50 = 2300$, 46×5 farà 230, quindi togliendo altre 5 copie avremo $369 - 230 = 139$. Usando una strategia del tipo “raddoppia e aggiungi uno”, si vede che $46 \times 3 = 138$, per cui posso togliere ancora tre copie, e mi rimarrà un solo oggetto. Il quoziente della divisione sarà dunque $50 + 10 + 5 + 3 = 68$, con resto 1.

Divisione: l'algoritmo tradizionale col divisore a una cifra

1. Iniziare con una divisione semplice come $496 : 4$.
2. Farla scrivere in forma standard.
3. Far rappresentare il dividendo con i BAM su un tappetino delle centinaia, decine e unità.
4. Partire con le centinaia e far calcolare la divisione $400 : 4$.
5. Rappresentare il quoziente sia sul tappetino, sia nella divisione in colonna, scrivendo il numero 1 nel posto appropriato.
6. Ripetere con le decine e poi con le unità, smembrando la decina nelle unità costituenti una volta calcolato che 9 decine diviso per 4 fa 2 decine col resto di 1.

