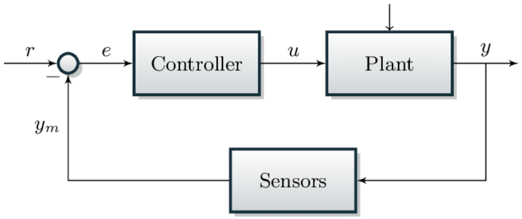


Controlli automatici

Sintesi per tentativi mediante il Luogo delle Radici

Prof. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

La sintesi per tentativi mediante LdR consente di progettare regolatori sulla base di un approccio «polinomiale» basato sull'uso del luogo delle radici.

Tale metodo ha come elemento fondamentale l'individuazione, sulla base delle specifiche del problema di controllo, di una **regione ammissibile** per i poli del sistema a ciclo chiuso.

La sintesi del regolatore ha come obiettivo quello di garantire che i poli del sistema a ciclo chiuso ricadano all'interno della regione ammissibile.

Viene denominata «per tentativi» in quanto in taluni casi può richiedere varie iterazioni

Vediamo attraverso quali passi si sviluppa.

A ciascun problema di controllo sono associate due tipologie di specifiche:

Le specifiche sul comportamento a regime

Le specifiche sul comportamento transitorio

Come **primo passo** nella sintesi mediante LdR si analizzano le specifiche sul comportamento a regime, e sulla base di queste si determinano due parametri:

Il **tipo di sistema di controllo che si deve realizzare** (tipo 0, tipo 1, …) ed in particolare il numero di poli nell'origine che devono eventualmente essere inseriti nel controllore.

Una eventuale **soglia minima per il guadagno statico** (eventualmente generalizzato) **del controllore**

In generale, nell'ambito di questa metodologia di progetto si va a ricercare un controllore espresso nella forma seguente

$$C(s) = \frac{K_C}{s^\nu} C'(s) \qquad\qquad C'(0) = 1$$

Come detto, l'analisi delle specifiche sul comportamento a regime ci consente di determinare il valore di ν ($\nu = 0, \nu = 1, \ldots$) (cioè il numero di poli nell'origine che devono essere inseriti nel controllore) ed un eventuale vincolo sul guadagno statico K_C del tipo:

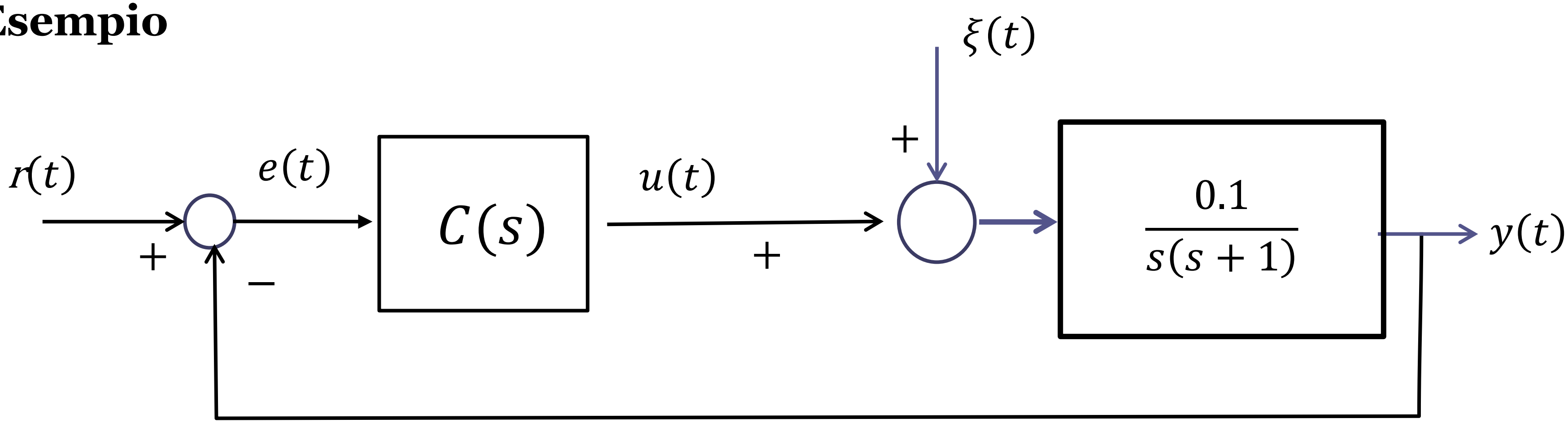
$$K_C \geq K_C^*$$

Quando risulta necessario inserire un polo nell'origine nel controllore, è altamente consigliato inserire contestualmente anche uno zero. Una scelta di primo tentativo per la posizione dello zero può essere quella di sovrapporlo ad uno dei poli del processo.

E' in genere conveniente sovrapporre lo zero del regolatore al polo del processo piu in bassa frequenza.

In generale un regolatore ben progettato ha sempre grado relativo nullo, cioè tanti zeri quanti poli.

Esempio



Progettare un regolatore in grado di garantire il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%
- S3. Sovraelongazione non superiore al 10%
- S4. Tempo di assestamento all' 1% non superiore a 1.5 secondi

Analizziamo le specifiche sul comportamento a regime.

- *S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %*
- *S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%*

La specifica S1 sarebbe compatibile con un sistema di controllo di tipo zero. In realtà il processo possiede un polo nell'origine quindi il sistema di controllo sarà sempre almeno di tipo 1, quindi (anche sulla base del primo enunciato del PMI) la specifica S1 viene garantita con errore nullo da qualunque controllore $C(s)$ che renda asintoticamente stabile il sistema a ciclo chiuso.

La specifica S2 è compatibile con un sistema di controllo in cui il regolatore non possiede poli nell'origine ($\nu = 0$). Sia K_C il guadagno statico del regolatore.

$$W_\zeta^y(0) = \frac{1}{K_C} \leq 0.02 \qquad \Rightarrow \qquad K_C \geq 50$$

Desumiamo pertanto con riferimento all'esempio di sintesi in esame che non devono essere inseriti dei poli nell'origine nel controllore ($\nu = 0$) e ricercheremo pertanto un controllore della forma

$$C(s) = K_C C'(s) \qquad\qquad C'(0) = 1$$

tenendo a mente che il guadagno statico K_C dovrà essere maggiore o uguale a 50

$$K_C \geq 50$$

La «parte dinamica» $C'(s)$ del regolatore, cioè una eventuale aggiunta di poli e zeri, va progettata per garantire il soddisfacimento delle specifiche sul comportamento transitorio avendo ovviamente cura di continuare a garantire la stabilita a ciclo chiuso del sistema di controllo.

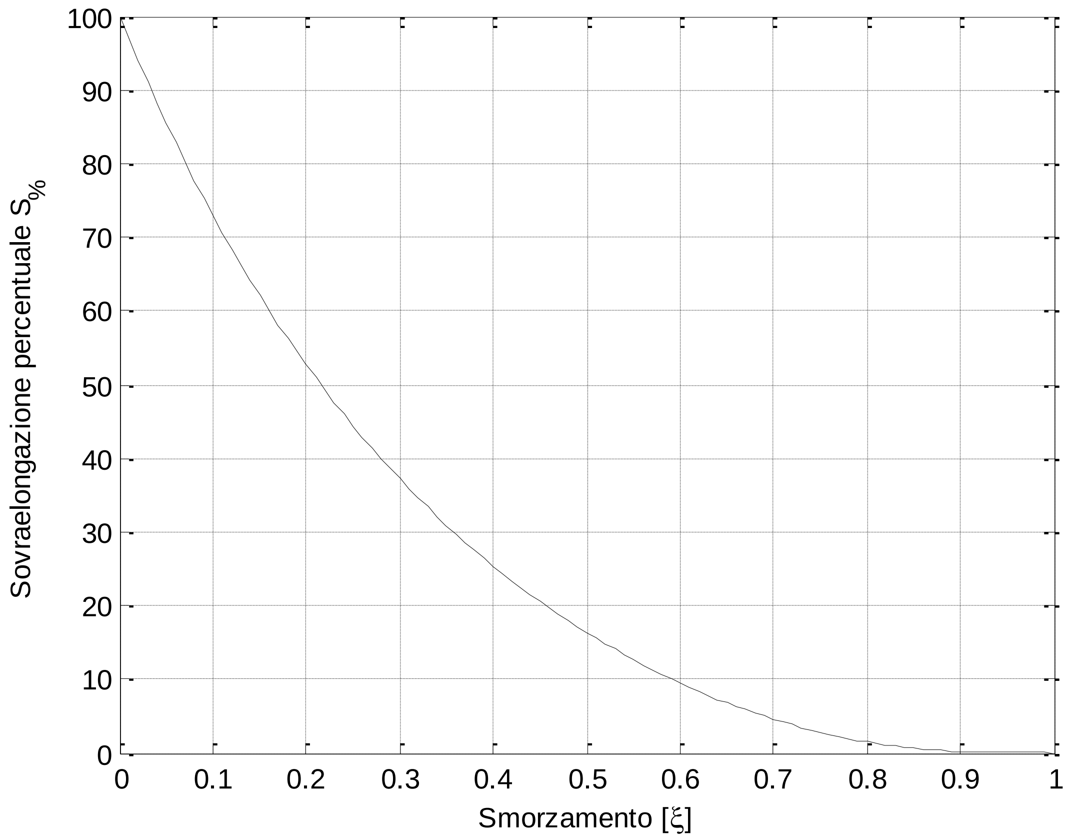
Le specifiche sul comportamento transitorio vengono «convertite» in una regione ammissibile del piano all'interno della quale devono essere vincolati i poli del sistema a ciclo chiuso.

Ora mettiamo temporaneamente da parte l’esempio e descriviamo in termini generali la procedura per l’individuazione della regione ammissibile in funzione delle varie tipologie di specifiche sul comportamento transitorio

Specifica sulla sovraelongazione

La regione ammissibile per i poli si determina sulla base del diagramma che mette in relazione la sovraelongazione con lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



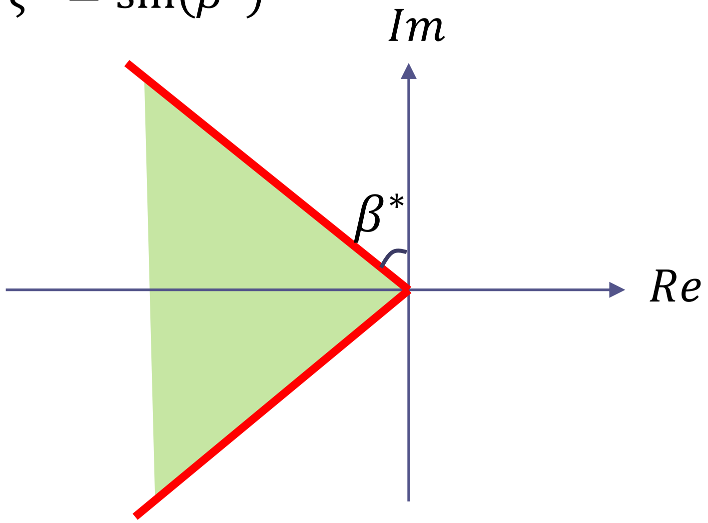

```
xi=0:0.01:1;
s=100*exp((-(xi*pi)./(sqrt(1-xi.^2))));
plot(xi,s,'k'),grid
xlabel('Smorzamento [\xi]')
ylabel('Sovraelongazione percentuale S_%')
```

$$S_{\%} \leq S^* \quad \Rightarrow \quad \xi \geq \xi^*$$

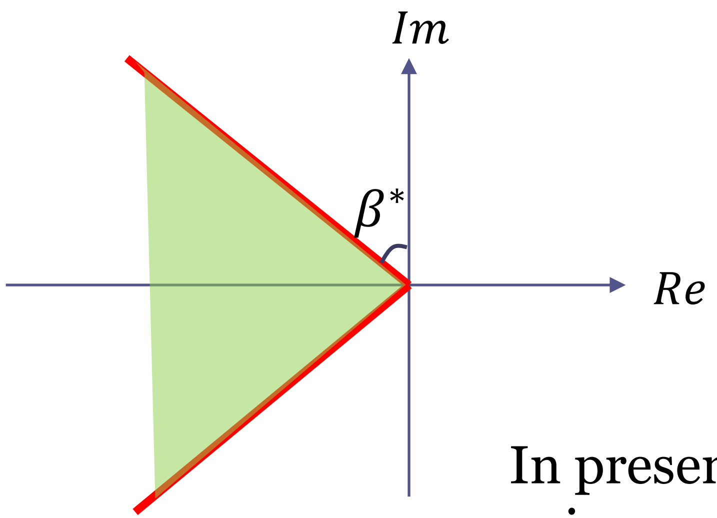
Per fare in modo che in un sistema di controllo la sovraelongazione percentuale sia minore o uguale di una certa soglia S^* è sufficiente garantire che la coppia di poli complessi coniugati **dominante** abbia uno smorzamento **maggiore o uguale di ξ^***, dove ξ^* può essere letto sul grafico o determinato analiticamente:

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 100e^{-\tan(\beta)\pi} \leq S^* \quad \Rightarrow \quad \beta \geq \beta^* = \tan^{-1}\left\{-\frac{1}{\pi}\ln\frac{S^*}{100}\right\}$$

$$\xi^* = \sin(\beta^*)$$



In termini grafici, ciò corrisponde a garantire che la coppia di poli complessi coniugati **dominante** ricada all'interno di una **regione ammissibile** come quella riportata nella figura a lato



Tale approccio assume che se il sistema a ciclo chiuso possieda al più una coppia di poli complessi coniugati **dominante**

In presenza di più coppie di poli complessi coniugati in cui non si possa individuarne una come dominante, si procede **per tentativi** restringendo progressivamente la regione ammissibile (cioè aumentando l'angolo β^*) fino ad ottenere un regolatore che, sottoposto a verifica sperimentale, soddisfi la specifica.

Se si riesce a fare in modo che nel sistema a ciclo chiuso vi siano unicamente poli reali negativi (e nessuno zero in bassa frequenza rispetto ai poli) la sovraelongazione sarà nulla indipendentemente dal numero dei poli e indipendentemente dal fatto che uno di questi sia dominante o meno.

Specifiche sul tempo di assestamento

La regione ammissibile per i poli a ciclo chiuso si determina sulla base delle relazioni che intercorrono fra i tempi di assestamento e la costante di tempo (eventualmente equivalente) dei poli dominanti a ciclo chiuso

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi\omega_n}$$ «costante di tempo equivalente»

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \dfrac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2}$	$3\ \tau_{eq}$	$3.9\ \tau_{eq}$	$4.6\tau_{eq}$
$F(s) = \dfrac{\mu}{(\tau s+1)}$	$3\ \tau$	$3.9\ \tau$	$4.6\ \tau$
$F(s) = \dfrac{\mu}{(\tau s+1)^2}$	$4.7\ \tau$	$5.8\ \tau$	$6.6\ \tau$

Le relazioni inserite nelle seguenti tabelle approssimate sono conservative rispetto a quelle delle tabelle «rigorose» presenti nella slide precedente, e quindi possono essere impiegate in alternativa per semplicità

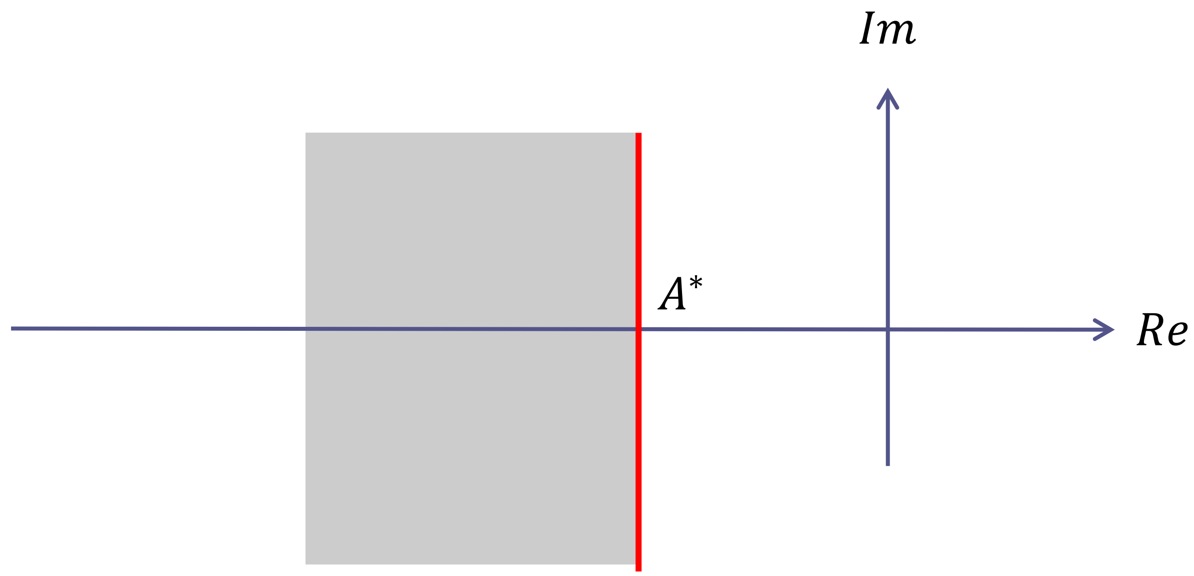
Tabelle approssimate

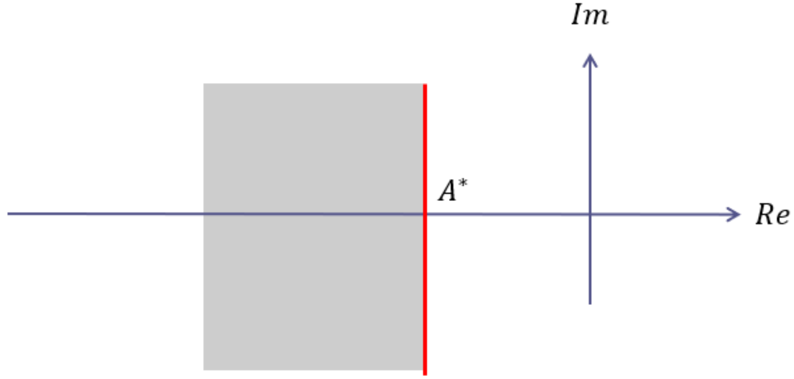
$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi \omega_n}$$ «costante di tempo equivalente»

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n + \omega_n^2}$	$3\ \tau_{eq}$	$4\ \tau_{eq}$	$5\ \tau_{eq}$
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)}$	$3\ \tau$	$4\ \tau$	$5\ \tau$
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)^2}$	$5\ \tau$	$6\ \tau$	$7\ \tau$

La scelta di quale formula impiegare va fatta i funzione del numero di poli presenti nella FdT a ciclo chiuso, una volta che siano stati rimossi quelli trascurabili, e della loro tipologia (reali o complessi coniugati)

In tutti i casi, si ottiene una regione ammissibile come quella mostrata in figura, ed i poli a ciclo chiuso dovranno essere collocati alla sinistra di una retta verticale



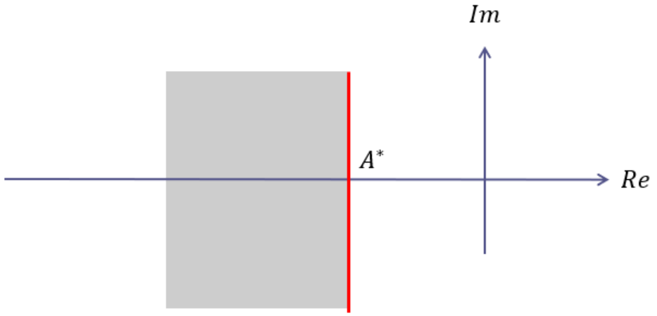


$$T_{a5\%} \leq T^* \quad \Rightarrow \quad A^* = \begin{cases} -\dfrac{3}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con un polo dominante reale o con una coppia di poli dominanti CC} \\ -\dfrac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con due poli dominanti reali} \end{cases}$$

$$T_{a2\%} \leq T^* \quad \Rightarrow \quad A^* = \begin{cases} -\dfrac{4}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con un polo dominante reale o con una coppia di poli dominanti CC} \\ -\dfrac{6}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con due poli dominanti reali} \end{cases}$$

$$T_{a1\%} \leq T^* \quad \Rightarrow \quad A^* = \begin{cases} -\dfrac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con un polo dominante reale o con una coppia di poli dominanti CC} \\ -\dfrac{7}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con due poli dominanti reali} \end{cases}$$

Versione semplificata della procedura di calcolo di A^*

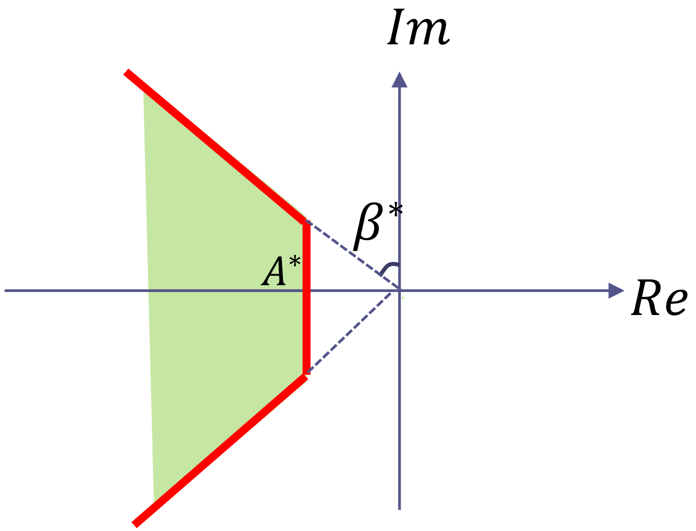


$$T_{a5\%} \leq T^* \;\Rightarrow\; A^* = \begin{cases} -\dfrac{3}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\dfrac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

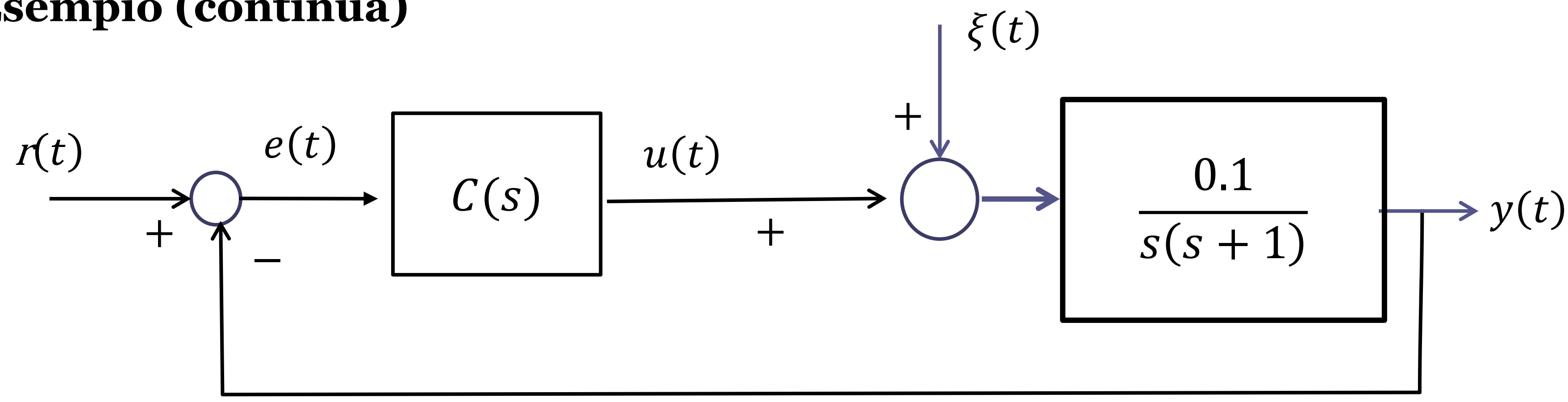
$$T_{a2\%} \leq T^* \;\Rightarrow\; A^* = \begin{cases} -\dfrac{4}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\dfrac{6}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

$$T_{a1\%} \leq T^* \;\Rightarrow\; A^* = \begin{cases} -\dfrac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\dfrac{7}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

In un problema di controllo in cui sia presente una specifica sulla sovraelongazione ed una specifica sul tempo di assestamento, la regione ammissibile sarà pertanto complessivamente del tipo



Esempio (continua)



Progettare un regolatore in grado di garantire il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%
- S3. Sovraelongazione non superiore al 5%
- S4. Tempo di assestamento all' 1% non superiore a 1.5 secondi

L'analisi delle specifiche sul comportamento a regime ci ha portato a concludere che il controllore C(s) non deve possedere poli nell'origine ($\nu = 0$), e che il relativo guadagno statico deve essere maggiore o uguale di 50

$$C(s) = K_C C'(s) \qquad K_C \geq 50 \qquad C'(0) = 1$$

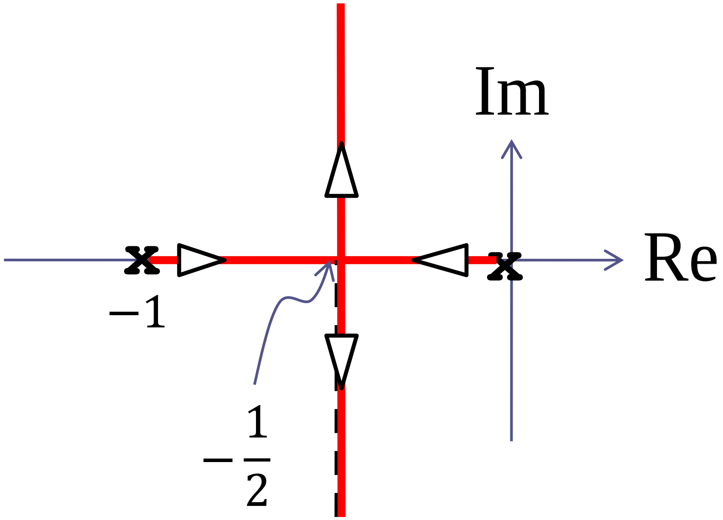
Iniziamo dalla soluzione più semplice.

Verifichiamo se un **controllore proporzionale** $C(s) = K_C$ con guadagno $K_C \geq 50$ è in grado di soddisfare le specifiche sul transitorio.

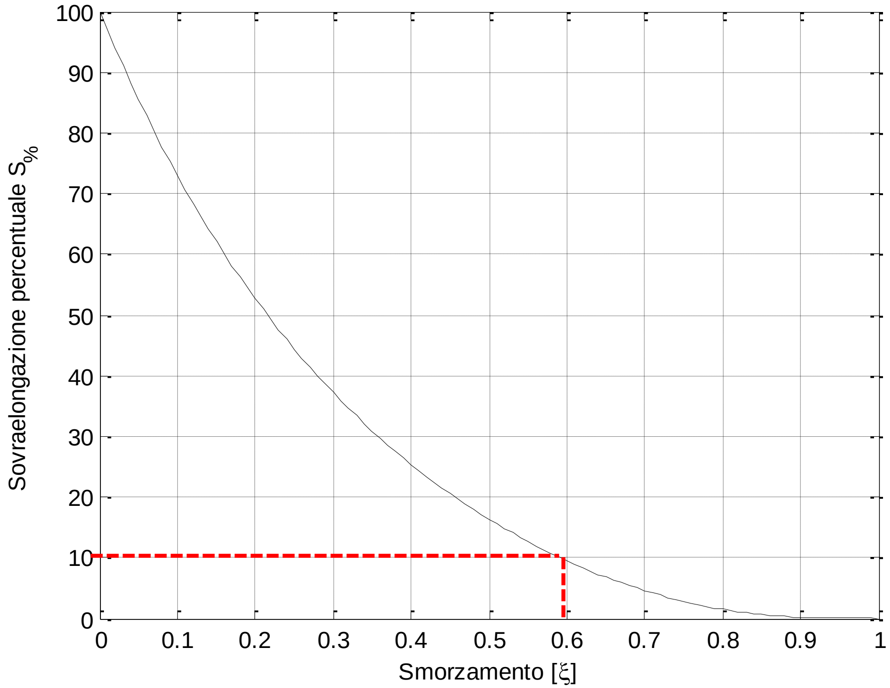
Tracciamo il LdR:

$$L(s) = \frac{0.1}{s(s+1)}$$

A ciclo chiuso sono presenti due poli che possono essere reali negativi o complessi coniugati



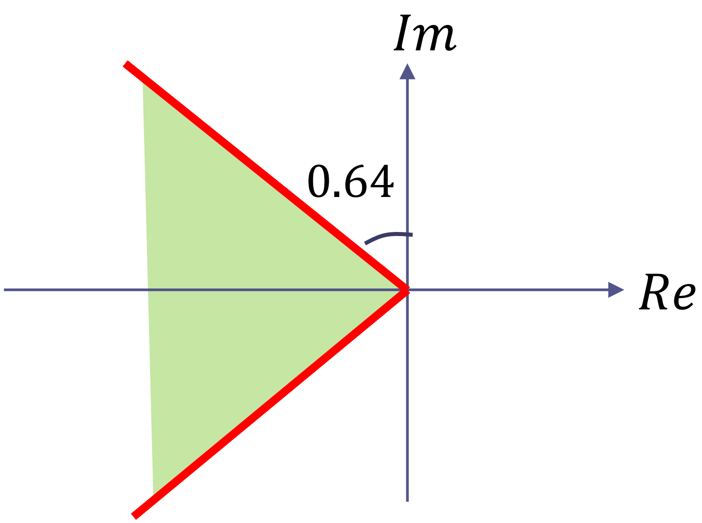
- S3. Sovraelongazione non superiore al 10%

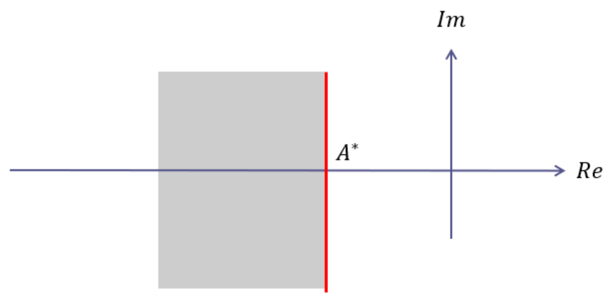


$S_{\%} \leq 10 \Rightarrow \xi \geq 0.6$

$$\beta \geq \beta^* = \tan^{-1}\left\{-\frac{1}{\pi}\ln\frac{S^*}{100}\right\} = 0.64\, rad$$

Ovviamente: $\sin(0.64) = 0.6$





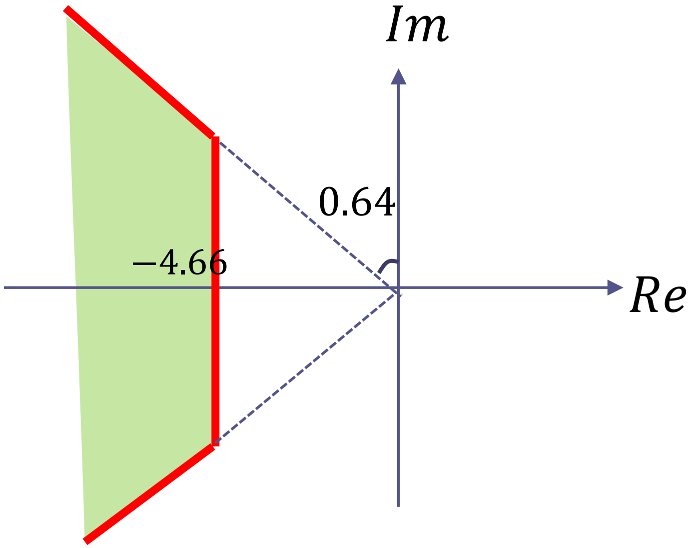
- S4. Tempo di assestamento all' 1% non superiore a 1.5 secondi

$$T_{a1\%} \leq T^* \Rightarrow A^* = \begin{cases} -\dfrac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\dfrac{7}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

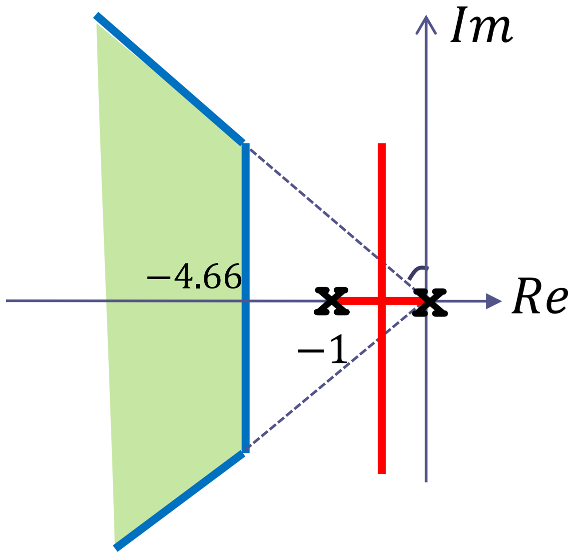
Poiché a ciclo chiuso si hanno due poli, si deve far riferimento alla formula:

$$A^* = -\frac{7}{T^*} = -4.66$$

La regione ammissibile è complessivamente la seguente



Sovrapponendo la regione ammissibile ed il LdR appare chiaro come impiegando un controllore proporzionale risulta impossibile fare in modo che i poli a ciclo chiuso ricadano all'interno della regione ammissibile.



Dobbiamo indagare una struttura alternativa per il controllore.

$$C(s) = K_C C'(s) \qquad C'(0) = 1$$

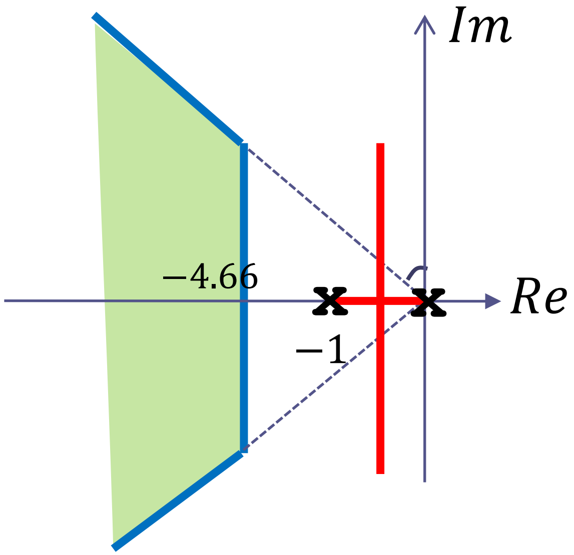
Una scelta frequente nell'ambito della sintesi mediante LdR prevede l'inserimento nella parte dinamica $C'(s)$ del regolatore di una o più coppie polo-zero

$$C(s) = K_C \frac{p}{z}\frac{s-z}{s-p} \qquad C'(s) = \frac{p}{z}\frac{s-z}{s-p} \qquad C'(0) = 1$$

Se non inserissimo il termine $\frac{p}{z}$ nella definizione del controllore il suo guadagno statico non sarebbe più pari a K_C.

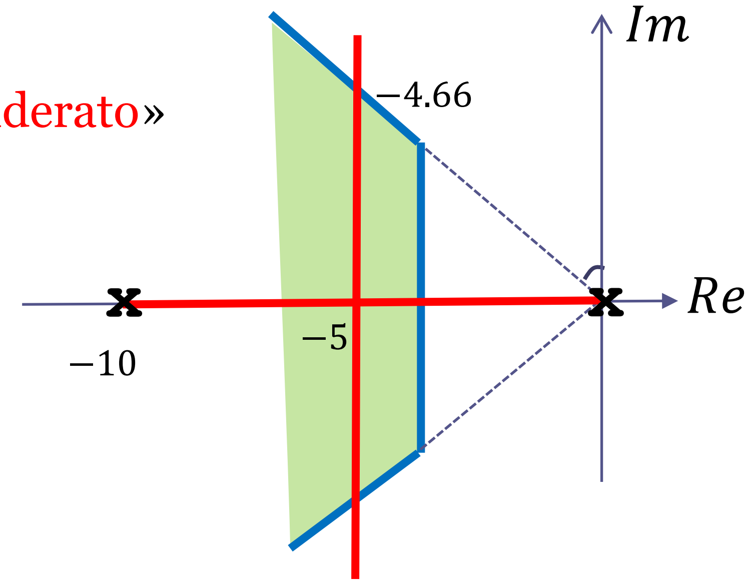
Una scelta altrettanto frequente prevede che lo zero del regolatore venga sovrapposto ad uno dei poli del processo in modo da «cancellarlo» e «sostituirlo» con un polo che abbia una collocazione maggiormente vantaggiosa per quanto concerne l'andamento del LdR. Cancellare mediante uno zero del controllore uno dei poli del processo è in generale sempre una scelta conveniente in quanto riduce l'ordine della FdT a ciclo aperto L(s).

Riguardando il LdR e la regione ammissibile appare chiaro che il principale fattore limitante sia dovuto alla presenza del polo in -1 , per effetto del quale il punto doppio va a collocarsi nel punto -0.5 (a metà strada fra i due poli)



Se il polo in -1 fosse invece collocato più in alta frequenza, in particolare in -10, si avrebbe un punto doppio in -5, e quindi i rami del luogo verrebbero «attratti» all'interno della regione ammissibile

LdR «desiderato»

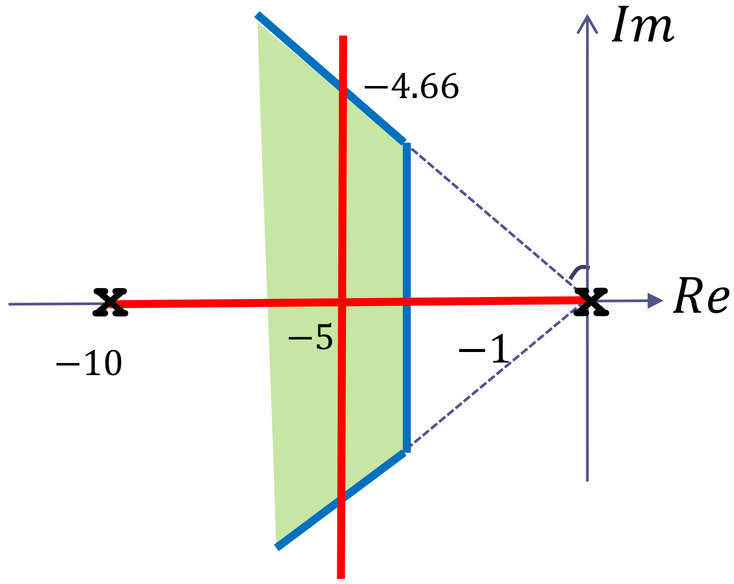


E'possibile ottenere il LdR «desiderato» cancellando con uno zero del regolatore il polo del processo in −1 e inserendo un polo in −10 ($z = -1, p = -10$)

$$C(s) = K_C\, 10\frac{s+1}{s+10} \qquad C'(s) = 10\frac{s+1}{s+10} \qquad C'(0) = 1$$

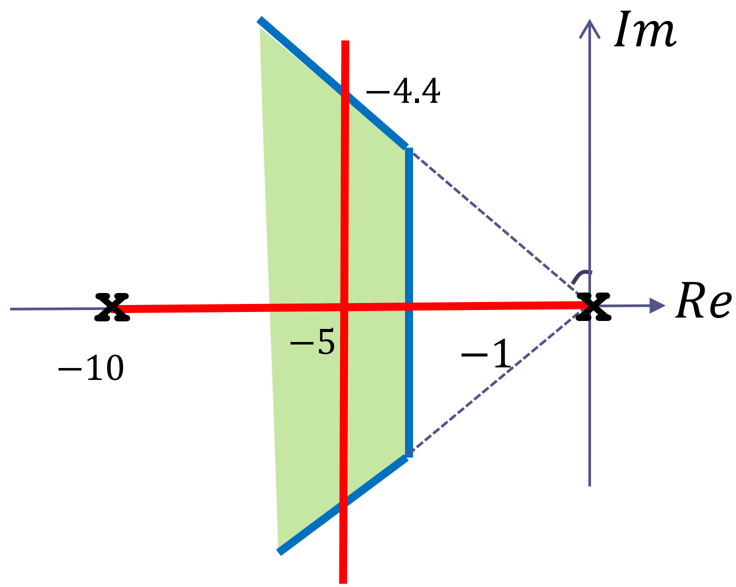
$$L(s) = 10\frac{\cancel{s+1}}{s+10}\frac{0.1}{s\cancel{(s+1)}} = \frac{1}{s(s+10)}$$

Cancellazione polo-zero



Utilizzando un regolatore $C(s) = K_C\, 10\frac{s+1}{s+10}$ i poli a ciclo chiuso possono essere collocati, mediante una opportuna scelta di K_C, sulle traiettorie dei rami del LdR.

Utilizzando un regolatore $C(s) = K_C\ 10\frac{s+1}{s+10}$ i poli a ciclo chiuso possono essere collocati, mediante una opportuna scelta di K_R, sulle traiettorie dei rami del LdR.

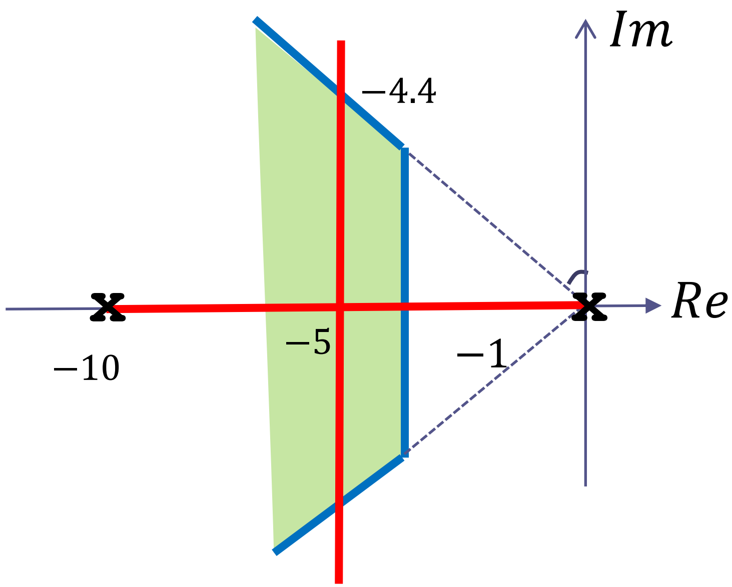


Il valore del guadagno K_C associato al punto doppio in -5 si determina facilmente operando la taratura del punto doppio, e vale 20 ($fatelo\ come\ esercizio$). Tale valore non è compatibile con il vincolo sul guadagno statico del controllore derivante dalle specifiche a regime. Dobbiamo pertanto utilizzare un valore più elevato, nella fattispecie un valore ≥ 50, che inevitabilmente condurrà alla presenza nella FdT a ciclo chiuso di poli complessi coniugati.

Possiamo scegliere $K_C = 50$ e «dormire tranquilli» in merito alla risoluzione di questo esercizio ?

Possiamo scegliere $K_C = 50$ e «dormire tranquilli» in merito alla risoluzione di questo esercizio ?

No



Vi è difatti il rischio che in corrispondenza del minimo valore consentito per il guadagno statico del controllore, pari a 50, i due rami del luogo delle radici siano gia usciti dalla regione ammissibile.

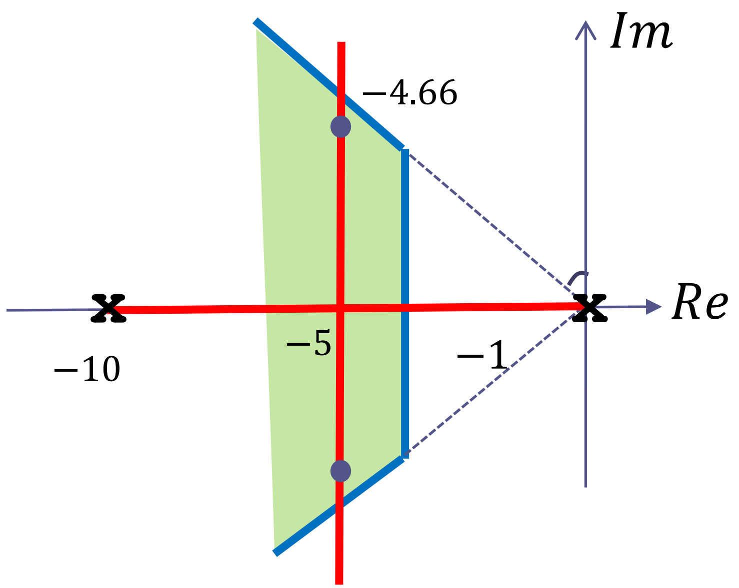
Per verificare se ciò avvenga o meno, calcoliamo i poli a ciclo chiuso in corrispondenza del valore $K_C = 50$ (sappiamo gia che sono complessi coniugati, e che la loro parte reale è pari a -5) e verifichiamo se il valore del loro smorzamento risulti maggiore di 0.6

$$P_{car}(s) = s(s+10) + \mathrm{K_C} = \mathrm{s}^2 + 10\mathrm{s} + \mathrm{K_C} \qquad \mathrm{K_C} = 50$$

$$P_{car}(s) = \mathrm{s}^2 + 10\mathrm{s} + 50$$

$$p_{1,2} = -5 \pm j\,5 \qquad \xi = \frac{5}{\sqrt{5^2+5^2}} = 0.7071 \qquad \xi > 0.6$$

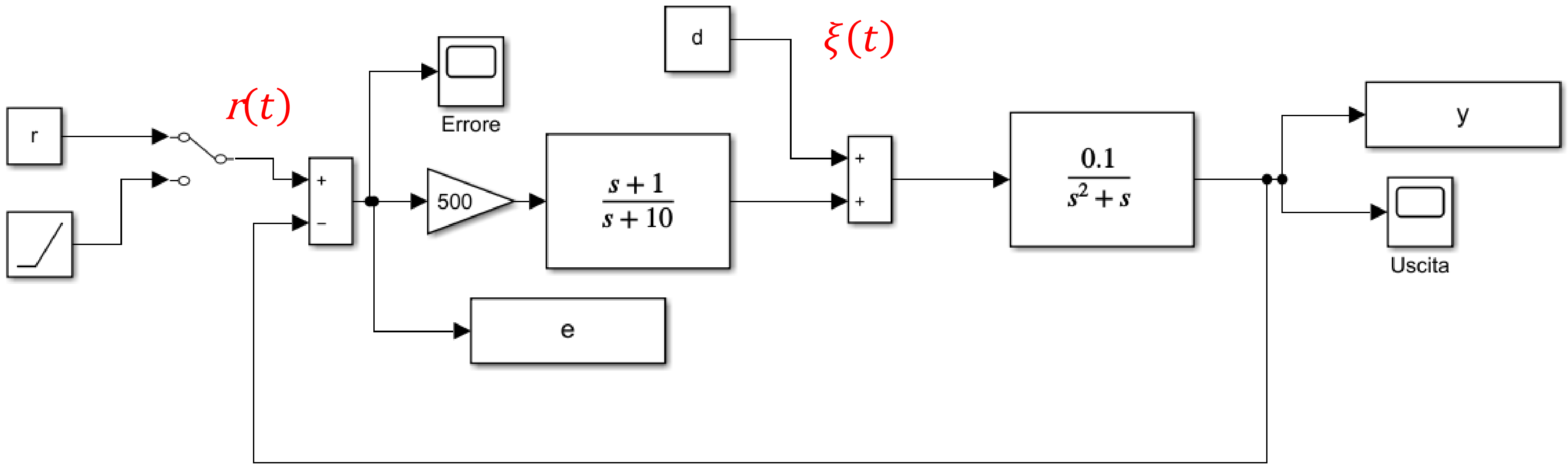
Lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati conseguente alla scelta $\mathrm{K_C} = 50$ rientra all'interno della regione ammissibile.



Quindi il seguente regolatore risolve il problema di progetto

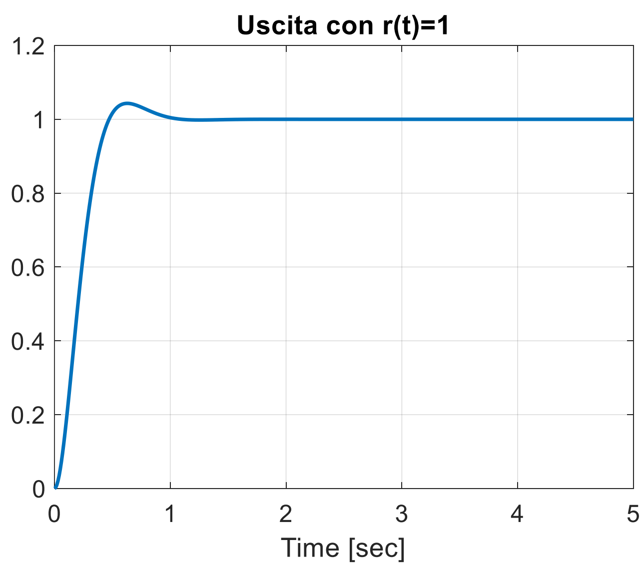
$$\boxed{C(s) = 500\,\frac{s+1}{s+10}}$$

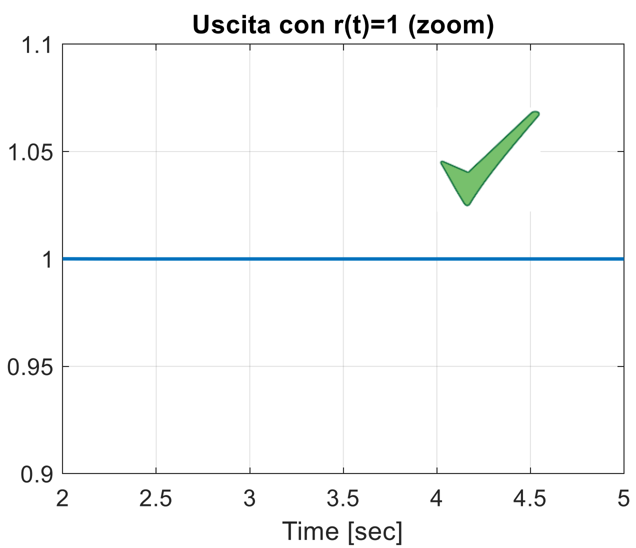
File: SintesiLdR01.slx



- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %

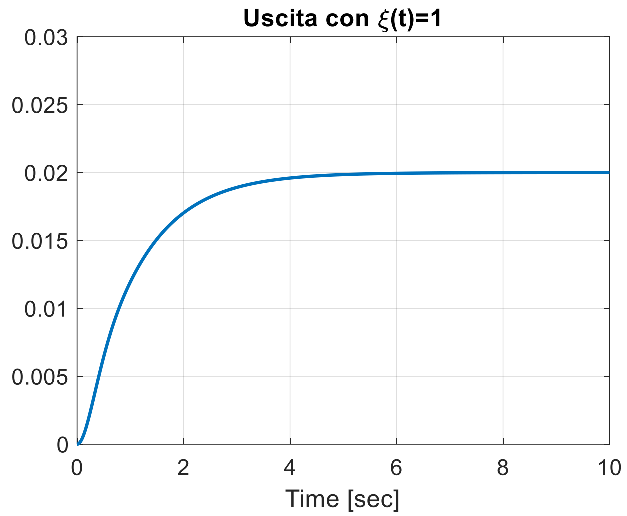
$r(t) = 1$





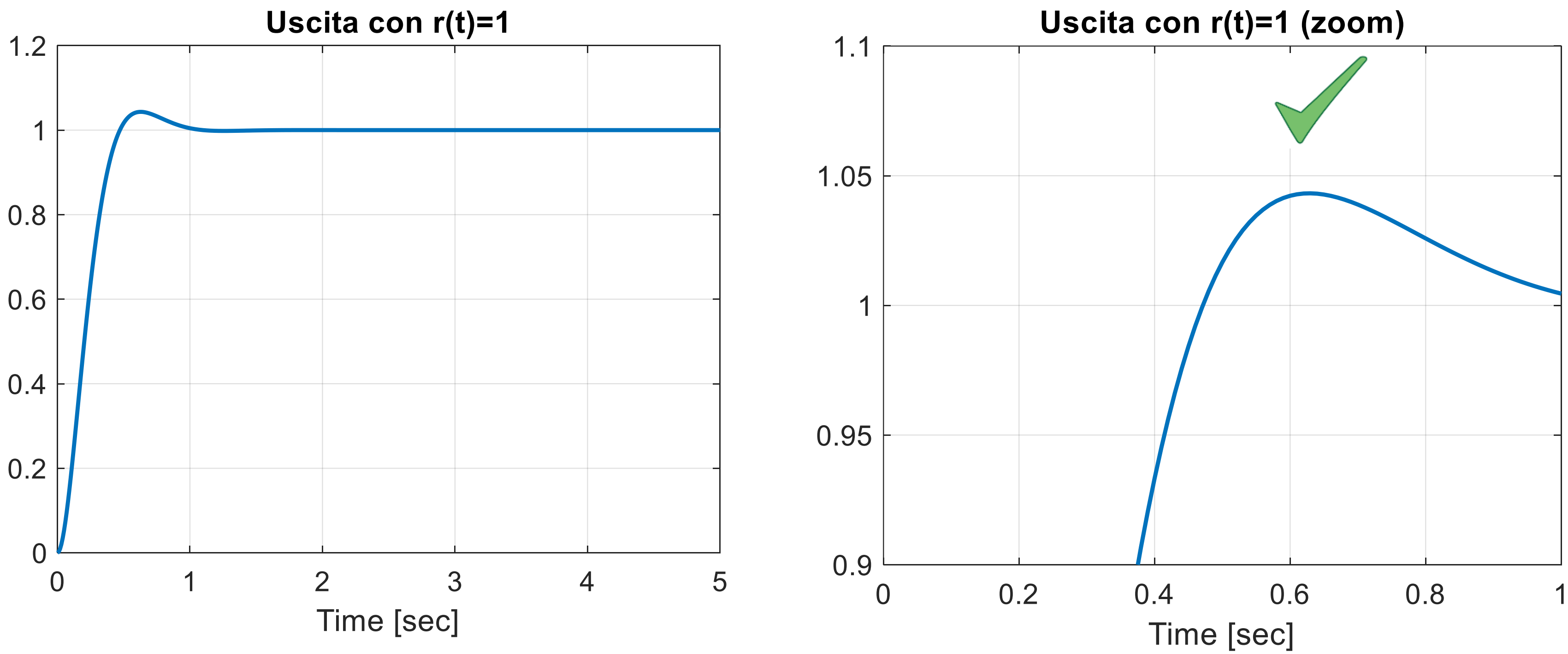
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%

$\xi(t) = 1$



- S3. Sovraelongazione non superiore al 10%

$r(t) = 1$



- S4. Tempo di assestamento all' 1% non superiore a 1.5 secondi

$r(t) = 1$