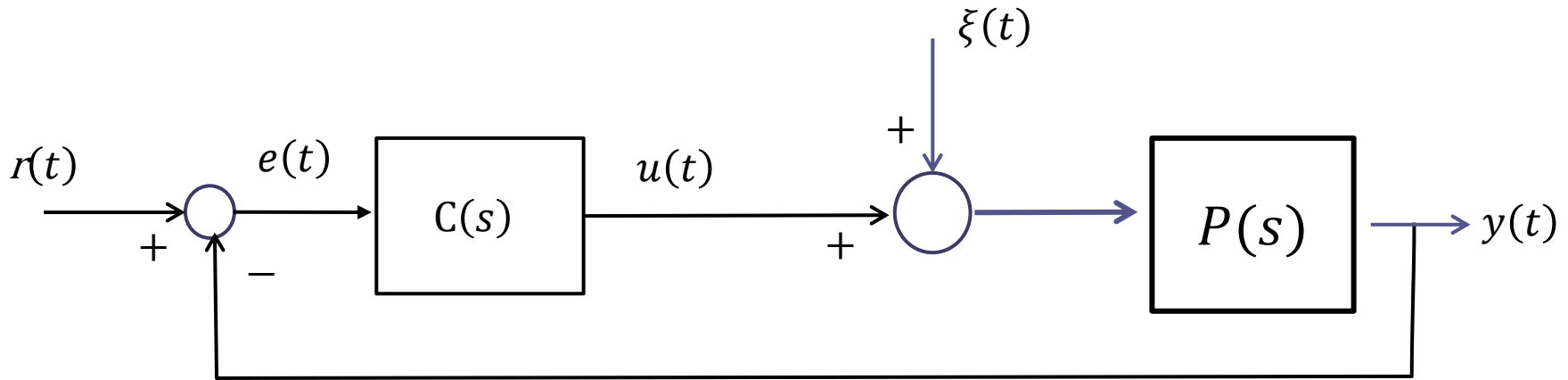


# Controlli automatici

Comportamento a regime dei sistemi di controllo – parte 2

**Ing. Alessandro Pisano**  
**apisano@unica.it**

## Sistemi di controllo di tipo uno



Lo schema in retroazione in Figura viene detto di **tipo 1** se **nel regolatore, oppure nel processo, è presente un polo nell'origine**

I due scenari sono equivalenti per quanto concerne la risposta al set-point, ma conducono a **comportamenti differenti per quanto concerne la risposta al disturbo**, e pertanto in tale ambito verranno trattati separatamente.

## Sistemi di controllo di tipo uno

**Comportamento a regime in risposta ad un set-point costante**  $r(t) = R^*$   
(con disturbo nullo)

In un sistema di controllo di tipo 1 sottoposto ad un set-point costante  $r(t) = R^* = \text{cost.}$  vale, in assenza di disturbo ( $\xi(t) = 0$ )

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^*$$

**Precisione statica**

La formula sopraripotata vale unicamente nel caso in cui il sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso.

**Il valore di regime dell'uscita coincide con il valore del set-point costante indipendentemente dai guadagni di regolatore e processo.**

## Sistemi di controllo di tipo uno

**Comportamento a regime in risposta ad un disturbo costante**  $\xi(t) = \Delta$

In un sistema di controllo di tipo 1 sottoposto ad un disturbo costante  $\xi(t) = \Delta = \text{cost.}$  valgono, in assenza di set point, le seguenti proprietà:

Se il polo in  $s = 0$  è contenuto nel regolatore si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Se invece il polo in  $s = 0$  è contenuto nel processo si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{\Delta}{\mu_C}$$

in cui:

$$\mu_C = C(0)$$

Guadagno statico del controllore

Se il polo in  $s = 0$  è contenuto nel regolatore, il sistema di controllo è in grado di operare la **reiezione completa a regime di un disturbo costante**. Il valore di regime dell'uscita dovuto alla sola presenza del disturbo è pari a zero indipendentemente dall'ampiezza  $\Delta$  del disturbo e dai guadagni di regolatore e processo

Se invece il polo in  $s = 0$  è contenuto nel processo, il disturbo altera il valore di regime dell'uscita. L'entità di tale effetto indesiderato dipende dal solo guadagno statico  $\mu_C$  del regolatore, e non anche dal guadagno statico (generalizzato) del processo come avveniva nei sistemi di controllo di tipo zero. **Aumentando il guadagno del controllore la precisione a regime migliora.**

## Sistemi di controllo di tipo uno

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di **set-point costante di ampiezza  $R^*$**  e **disturbo costante di ampiezza  $\Delta$**

Il **principio di sovrapposizione degli effetti** ci consente di affermare che in un sistema di controllo di tipo uno soggetto **simultaneamente** ad un set point costante di ampiezza  $R^*$  e ad un disturbo costante di ampiezza  $\Delta$  il valore di regime dell'uscita sarà

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^*$$

Se il polo in  $s = 0$  è contenuto nel regolatore

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* + \frac{\Delta}{\mu_C}$$

Se il polo in  $s = 0$  è contenuto nel processo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^*$$

**Se il polo in  $s = 0$  è contenuto nel regolatore**

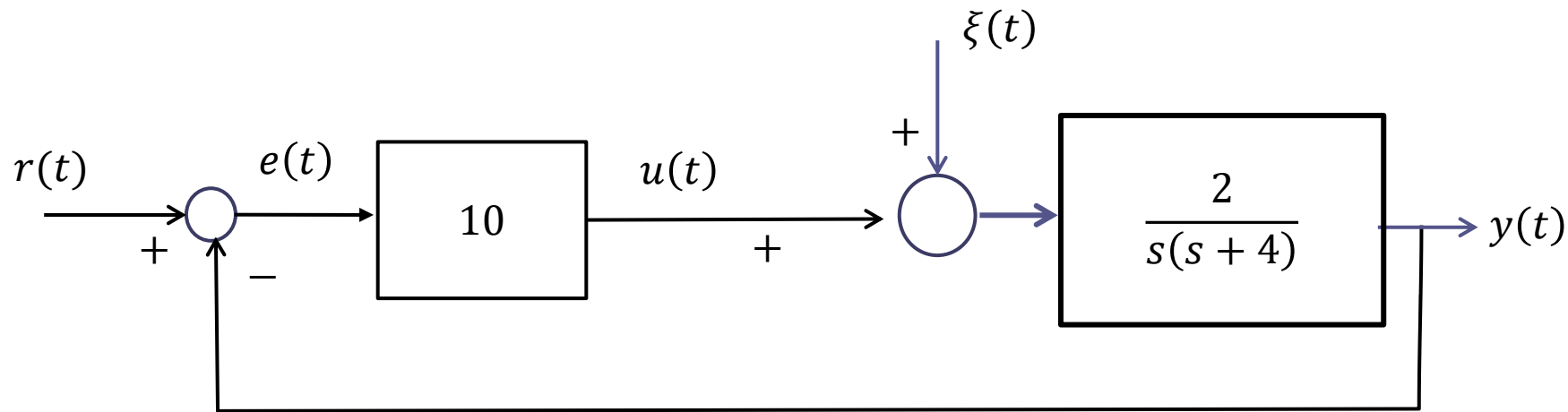
Tale relazione stabilisce una importante proprietà di **precisione statica robusta**

La relazione si conserva difatti indipendentemente dall'intervento di un disturbo costante di ampiezza sconosciuta, oltre che dai guadagni, e dalla struttura dinamica (poli e zeri), del regolatore e del processo

Essa è unicamente garantita dalla presenza del polo in  $s = 0$  **nel regolatore** (e dalla **concomitante stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo**).

**E' uno dei principali motivi della ampia diffusione dei regolatori PI.**

## Esempio



Dato il sistema di controllo in figura, valutare il comportamento di regime dell'uscita in presenza di un set point costante  $r(t) = 5$  e di un disturbo costante  $\xi(t) = 0.5$

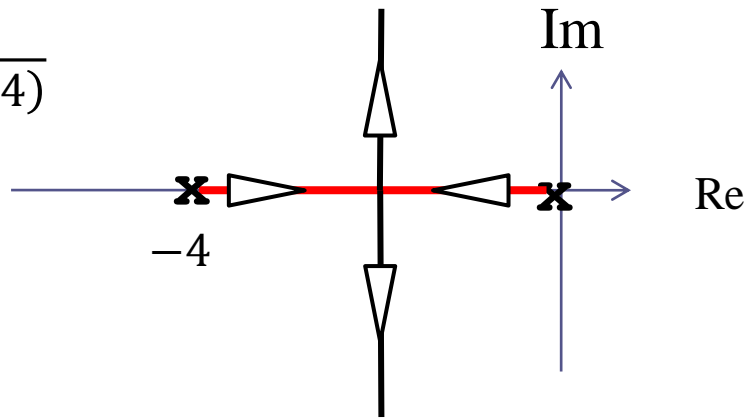
Verifichiamo preliminarmente la **stabilità a ciclo chiuso** del sistema di controllo

$$p_{car} = s(s + 4) + 20 = s^2 + 4s + 20$$



(regola di cartesio)

$$L(s) = \frac{2}{s(s + 4)}$$



Il LdR rivela come il sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso qualunque sia il valore del guadagno del controllore, e quindi (come mostrato sopra) lo sarà anche per  $\mu_C = 10$

E' un sistema di controllo di **tipo 1** in cui **il polo nell'origine è contenuto nel processo**.

In base alle proprietà viste, la componente della uscita dovuta al set-point converge al valore del set point.

$$r(t) = 5$$

$$\xi(t) = 0$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = 5$$

Poiché il polo nell'origine è presente nel processo, la componente della uscita dovuta al disturbo converge al valore costante  $\frac{\Delta}{\mu_C}$ , in cui  $\Delta = 0.5$  è l'ampiezza del disturbo e  $\mu_C = 10$  è il guadagno statico del controllore

$$\begin{array}{l} r(t) = 0 \\ \xi(t) = 0.5 \end{array} \quad \rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_{\xi}(t) = \frac{\Delta}{\mu_C} = 0.05$$

Complessivamente quindi, deduciamo sulla base del principio di sovrapposizione degli effetti che la variabile di uscita tenderà al valore 5.05

$$W_r^y(s) = \frac{\frac{20}{s(s+4)}}{1 + \frac{20}{s(s+4)}} = \frac{20}{s(s+4) + 20}$$

FdT a ciclo chiuso fra set-point e uscita

$$W_\xi^y(s) = \frac{\frac{2}{s(s+4)}}{1 + \frac{20}{s(s+4)}} = \frac{2}{s(s+4) + 20}$$

FdT a ciclo chiuso fra disturbo e uscita

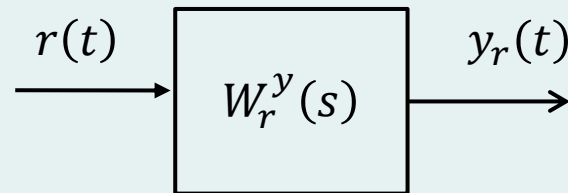
$$W_r^y(0) = 1 \quad W_\xi^y(0) = \frac{1}{\mu_c} = 0.1 \quad \text{Guadagni statici delle FdT a ciclo chiuso}$$

Poli a ciclo chiuso:  $p_{1,2} = -2 \pm j4$

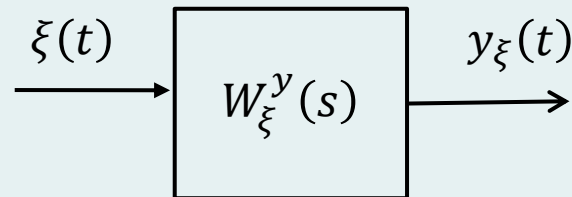
Smorzamento:  $\xi = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0.44$

Puls. naturale:  $\omega_n = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4.47 \text{ rad/sec}$

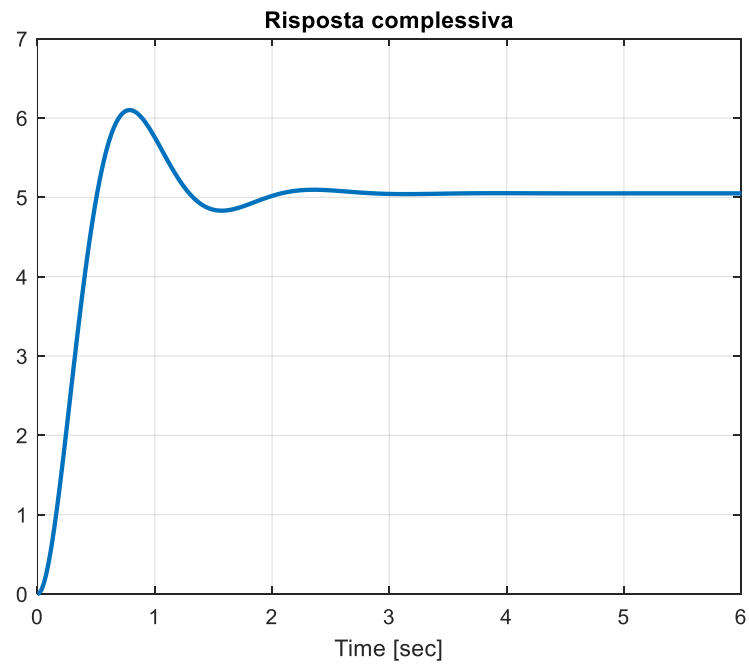
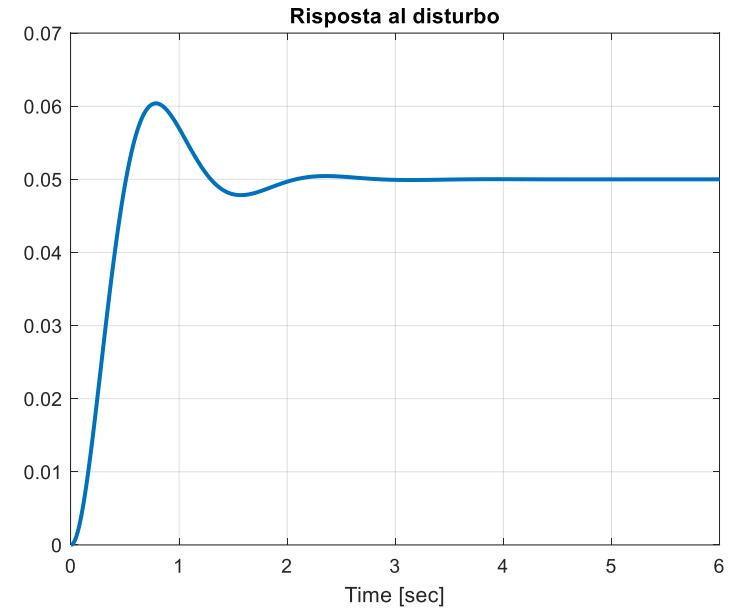
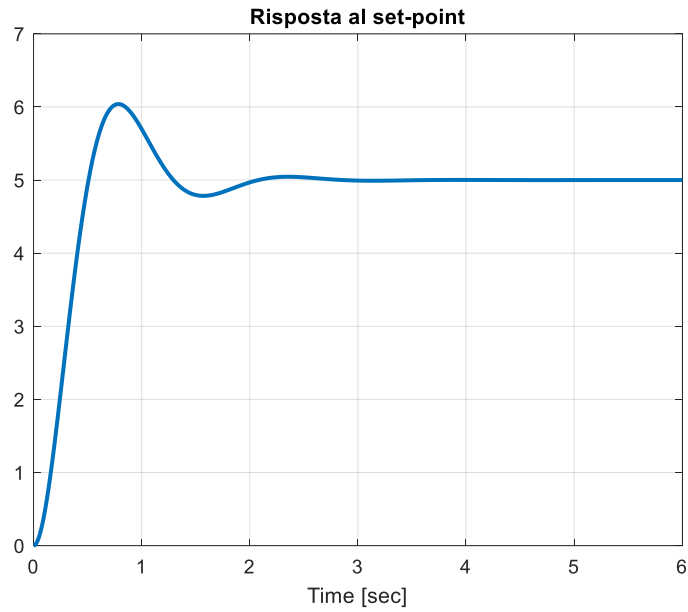
Le conclusioni tratte in merito al comportamento di regime dell'uscita potevano essere ricavate per via differente, senza ricorrere alle formule ma bensì applicando il T.F.R.G., che stabilisce come **il valore di regime della risposta al gradino di una FdT asintoticamente stabile sia pari al prodotto fra il suo guadagno statico e l'ampiezza del gradino in ingresso**



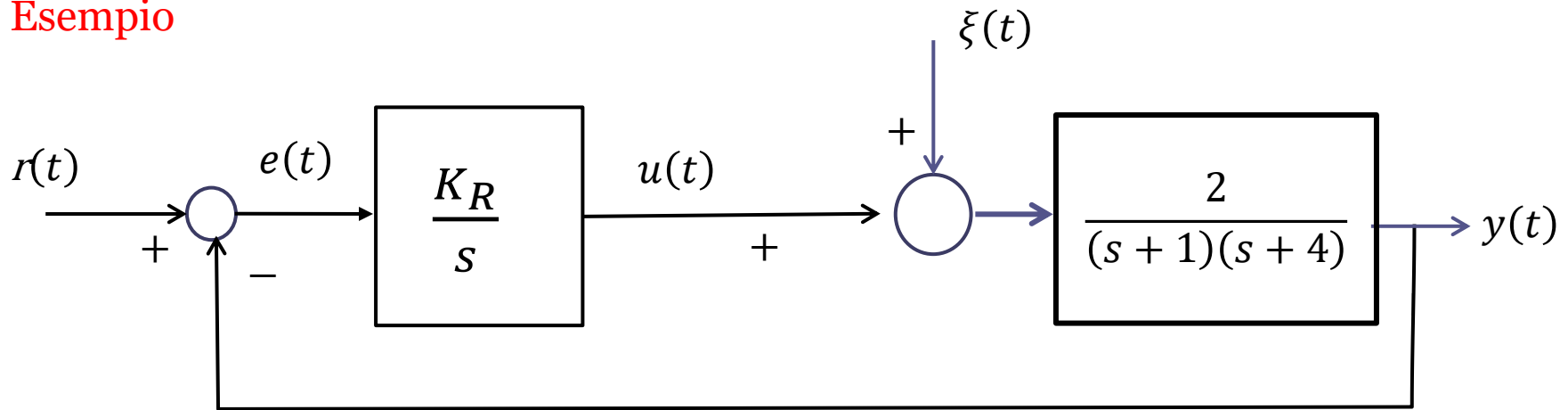
$$\begin{array}{l} r(t) = 5 \\ \xi(t) = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = 5 \cdot W_r^y(0) = 5$$



$$\begin{array}{l} r(t) = 0 \\ \xi(t) = 0.5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_\xi(t) = 0.5 \cdot W_\xi^y(0) = 0.05$$



## Esempio

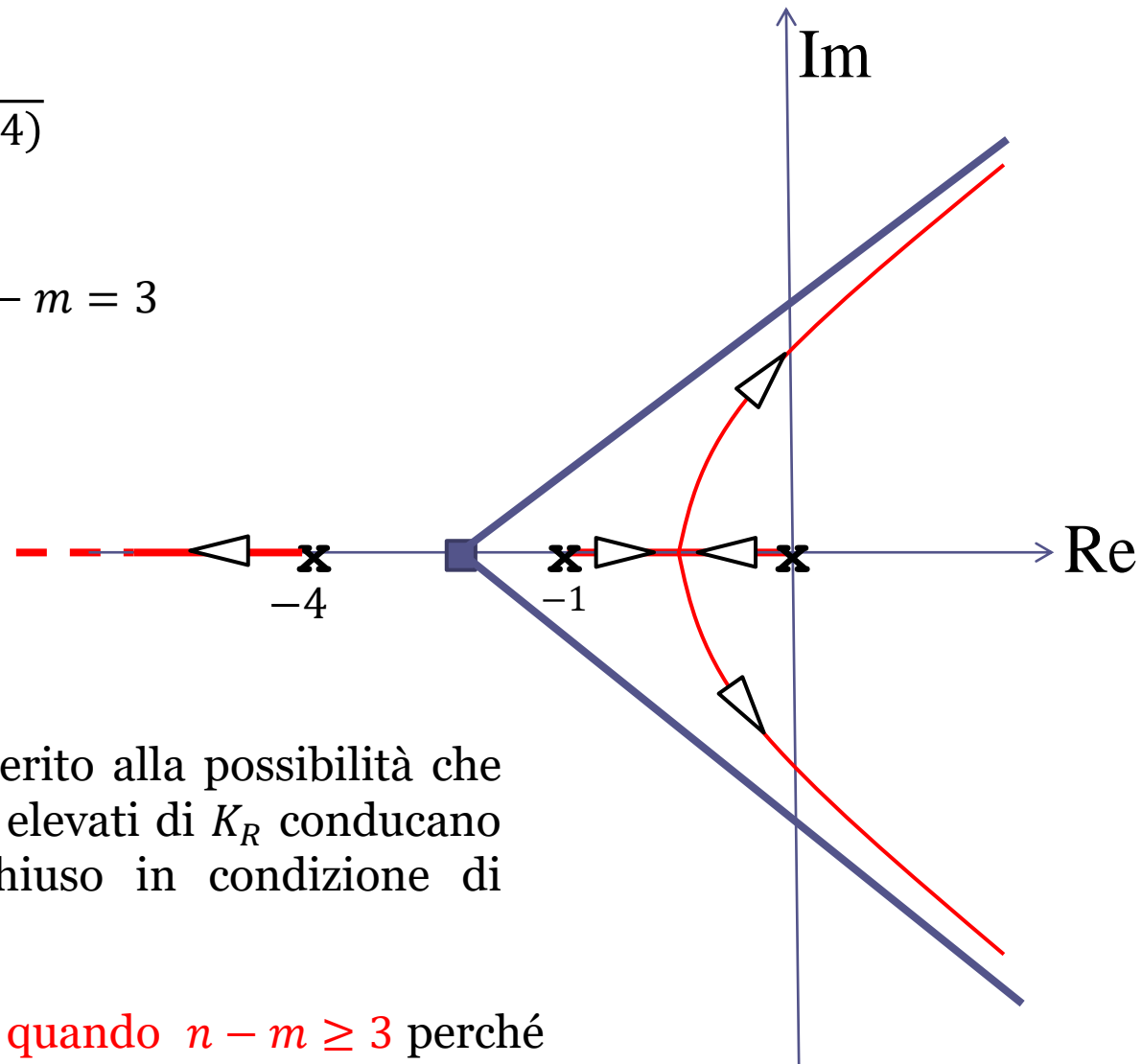


Dato il sistema di controllo in figura, valutare il comportamento di regime dell'uscita in presenza di un set point costante  $r(t) = 2$  e di un disturbo costante  $\xi(t) = 10$  in corrispondenza dei seguenti valori per il guadagno  $K_R$ :

$$K_R = 1 \quad K_R = 5 \quad K_R = 20.$$

$$L(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+4)}$$

$$x_s = -\frac{5}{3} \quad n - m = 3$$



Il LdR ci allerta in merito alla possibilità che valori eccessivamente elevati di  $K_R$  conducano il sistema a ciclo chiuso in condizione di instabilità.

**Cio avviene sempre** quando  $n - m \geq 3$  perché una parte degli asintoti del LdR converge verso il semipiano destro.

Il polinomio caratteristico è:

$$P_{car}(s) = s(s+1)(s+4) + 2K_r = s^3 + 5s^2 + 4s + 2K_r$$

Ricordiamo il seguente risultato:

$P(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$  è un polinomio di Hurwitz (cioè ha tutte le radici a parte reale negativa) se e solo se:

1. Tutti i coefficienti hanno segno concorde
2.  $a_1a_2 > a_3a_0$

Si ricava pertanto:  $4 \cdot 5 > 2K_r$        $K_r < K_r^{cr} = 10$

Il polinomio caratteristico è un polinomio di Hurwitz se  $K_R = 1$  e se  $K_R = 5$ , ma non più quando  $K_R = 20$ , valore del guadagno in corrispondenza del quale il sistema a ciclo chiuso è **instabile**.

Si avrà pertanto che la proprietà di **precisione statica robusta**, che stabilisce che il valore di regime dell'uscita coincide con l'ampiezza del set point costante anche in presenza di un disturbo costante di ampiezza qualunque:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$$

sarà **soddisfatta** quando  $K_R = 1$  e  $K_R = 5$ , ma **non più** quando  $K_R = 20$

**Procediamo per altra via, senza impiegare la formula ma ricorrendo al T.F.R.G.**

FdT a ciclo  
chiuso e  
relativi  
guadagni  
statici

$$W_r^y(s) = \frac{\frac{2K_R}{s(s+1)(s+4)}}{1 + \frac{2K_R}{s(s+1)(s+4)}} = \frac{2K_R}{s(s+1)(s+4) + 2K_R}$$

$$W_r^y(0) = 1$$

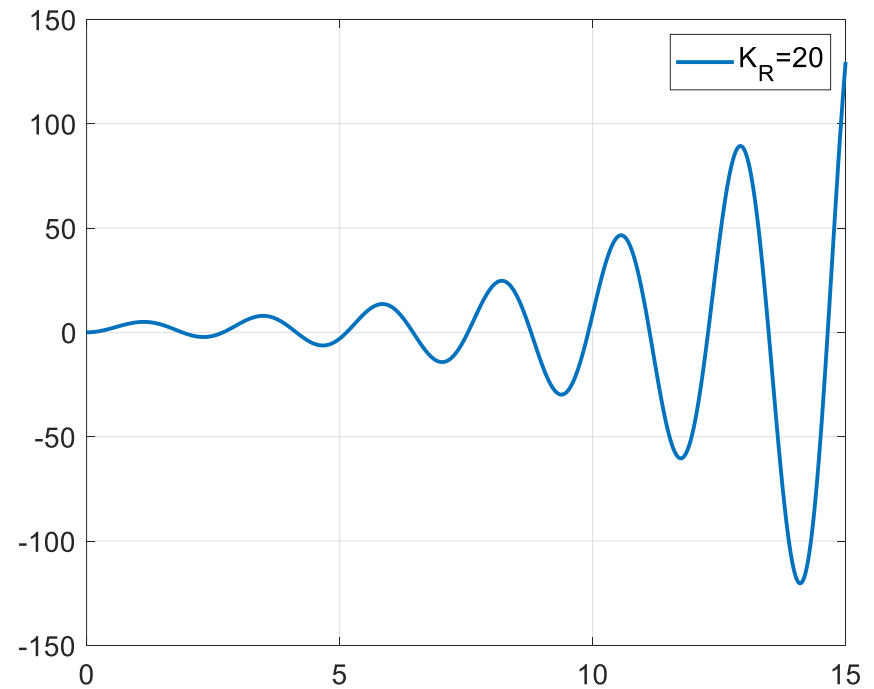
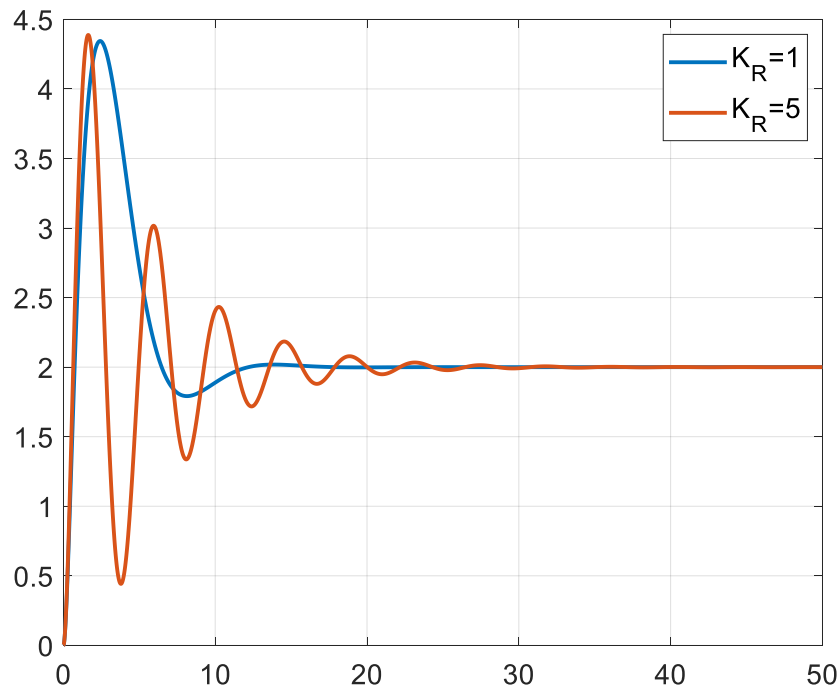
$$W_\xi^y(s) = \frac{\frac{2}{(s+1)(s+4)}}{1 + \frac{2K_R}{s(s+1)(s+4)}} = \frac{2s}{s(s+1)(s+4) + 2K_R}$$

$$W_\xi^y(0) = 0$$

**T.F.R.G.**  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2 \cdot W_r^y(0) + 10 \cdot W_\xi^y(0) = 2$

## Verifichiamo mediante simulazione i risultati ottenuti

### Risposte compressive



```
clc
s=tf('s');
Kr=1;
Wry=2*Kr/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);
Wdy=2*s/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);

[yr1,t1]=step(Wry,0:0.01:50);
[yd1,t1]=step(Wdy,0:0.01:50);

Kr=5;
Wry=2*Kr/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);
Wdy=2*s/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);

[yr5,t5]=step(Wry,0:0.01:50);
[yd5,t5]=step(Wdy,0:0.01:50);

figure
plot(t1,2*yr1+10*yd1,t5,2*yr5+10*yd5,'LineWidth',2),grid
legend('K_R=1','K_R=5','FontSize',15)
set(gca,'FontSize',15)

Kr=20;
Wry=2*Kr/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);
Wdy=2*s/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);

[yr20,t20]=step(Wry,0:0.01:15);
[yd20,t20]=step(Wdy,0:0.01:15);
figure
plot(t20,2*yr20+10*yd20,'LineWidth',2),grid
legend('K_R=20','FontSize',15)
set(gca,'FontSize',15)
```

## Principio del modello interno (PMI)

Un principio di validità generale che caratterizza in maniera semplice e compatta il comportamento **a regime** dei sistemi di controllo per quanto concerne le proprietà di **inseguimento di un set-point non-vanishing** e di **reiezione dei disturbi non-vanishing** (cioè di set-point e segnali disturbanti che non tendano asintoticamente a zero)

Introduciamo una terminologia:

diremo che una Funzione di Trasferimento “**contiene il modello**” di un certo segnale  $x(t)$  se fra i poli della FdT vi sono tutti i poli della Trasformata di Laplace  $X(s)$  del segnale

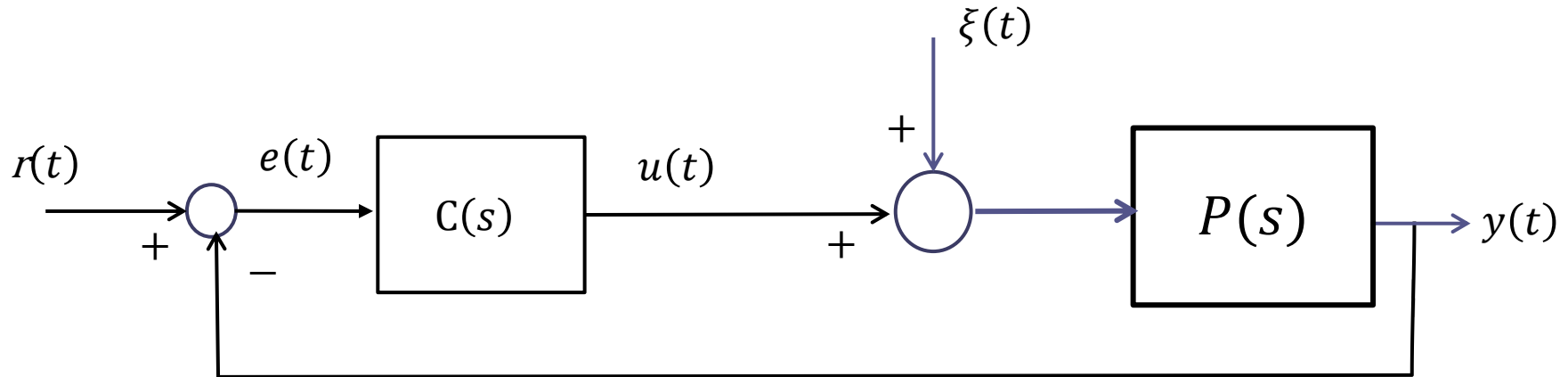
Esempi:

Una FdT “contiene il modello” di un segnale **costante**  $x(t) = C = cost.$  se fra i suoi poli è presente almeno un polo in  $s = 0$

Una FdT “contiene il modello” di un segnale **a rampa**  $x(t) = C t$  ( $C = cost$ ) se fra i suoi poli sono presenti almeno due poli in  $s = 0$

Una FdT «contiene il modello» di un segnale **sinusoidale**  $x(t) = X \cos(\omega t + \phi)$  se fra i suoi poli sono inclusi i due poli complessi coniugati e immaginari puri  $\pm j \omega$ . Deve quindi essere presente a denominatore il termine  $s^2 + \omega^2$

I due seguenti enunciati si applicano al sistema in Figura nell'ipotesi che questo sia **asintoticamente stabile a ciclo chiuso**



**Enunciato 1** (*inseguimento di un set-point non vanishing*).

L'uscita  $y_r(t)$  ottenuta con un set-point  $r(t)$  *non vanishing* qualunque (e con disturbo  $\xi(t)$  nullo) converge asintoticamente al set-point se e solo se la **FdT a ciclo aperto**  $C(s)P(s)$  contiene il modello del set-point

**Enunciato 2** (*reiezione di disturbi non vanishing*).

L'uscita  $y_\xi(t)$  ottenuta con un disturbo  $\xi(t)$  *non vanishing* qualunque (e con riferimento  $r(t)$  nullo) converge a zero se e solo se la **FdT del regolatore**  $C(s)$  contiene il modello del disturbo.

I due enunciati implicano, come caso particolare, alcune delle proprietà dimostrate nelle sezioni precedenti

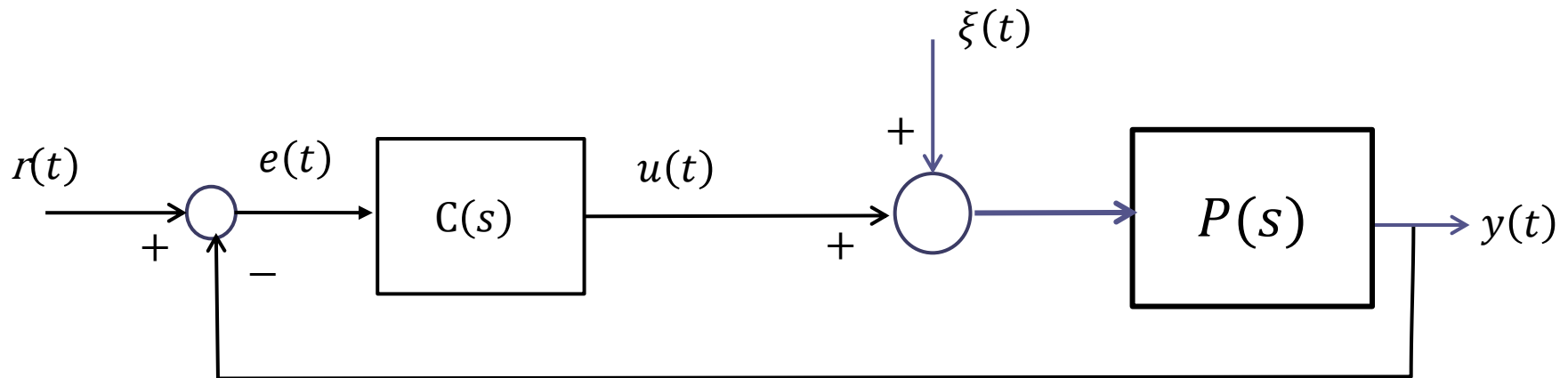
- la reiezione di un disturbo costante è garantita se e solo se il regolatore  $C(s)$  contiene un polo in  $s = 0$
- la precisione statica è garantita se e solo se il regolatore  $C(s)$  oppure il processo  $P(s)$  contiene un polo in  $s = 0$  (in altri termini, se nella FdT a ciclo aperto  $C(s)P(s)$  è presente almeno un polo nell'origine)

La capacità di «inseguire» asintoticamente un set-point a rampa (avere cioè l'uscita che tende asintoticamente a sovrapporsi alla rampa di set-point) è garantita se e solo se nella FdT a ciclo aperto  $C(s)P(s)$  sono presenti almeno due poli in  $s = 0$  (sistema di tipo 2)

**E' errore frequente concludere che un certo sistema in retroazione possiede determinate proprietà di precisione a regime basandosi sulla sola presenza del necessario numero di poli nell'origine e **trascurando di verificare la stabilità a ciclo chiuso**. Tale omissione conduce a conclusioni del tutto errate circa il comportamento del sistema.**

## Sistemi di controllo di tipo due

Nell'ambito delle diverse possibili casistiche di sistemi di controllo di tipo due, analizziamo quella con maggior rilevanza pratica, che è quella in cui è presente **un polo nell'origine nel regolatore, ed un polo nell'origine nel processo**



Analizziamo il comportamento di regime del sistema di controllo in risposta a un set-point caratterizzato da una componente costante e da una componente a rampa

$$r(t) = R_0 + R_1 t$$

e un disturbo costante

$$\xi(t) = \Delta_0$$

Analizziamo separatamente il contributo delle 3 componenti

## Componente costante del set-point

$$r(t) = R_0$$

**PMI (1° enunciato)**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R_0$$

## Componente costante del disturbo

$$\xi(t) = \Delta_0$$

**PMI (2° enunciato)**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Se in un sistema di controllo di tipo 2 in cui il regolatore ed il processo hanno un polo nell'origine a testa intervengono simultaneamente un set point costante ed un disturbo costante il valore di regime dell'uscita coincide con il valore del set point (**precisione statica robusta**, come nei sistemi di tipo 1 con il polo nell'origine nel controllore)

## Componente a rampa del set-point

$$r(t) = R_1 t \quad \text{PMI (1° enunciato)} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

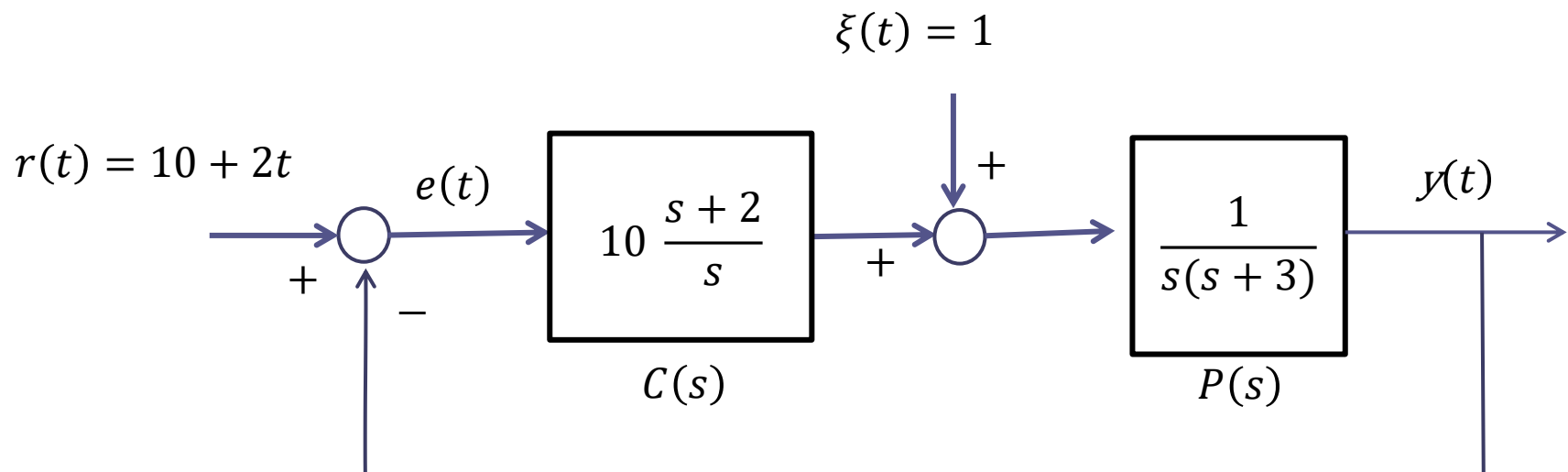
In un sistema di controllo di tipo 2 un set point a rampa viene riprodotto a regime **senza alcun errore**

$$y_{regime}(t) = R_1 t$$

In un sistema di controllo di tipo 1, invece, un set point a rampa viene riprodotto a regime **con un errore costante**. Tale scenario sarà analizzato nel contesto di un esercizio.

## Esercizio

Analizzare l'evoluzione di regime della variabile di uscita nel seguente sistema di controllo



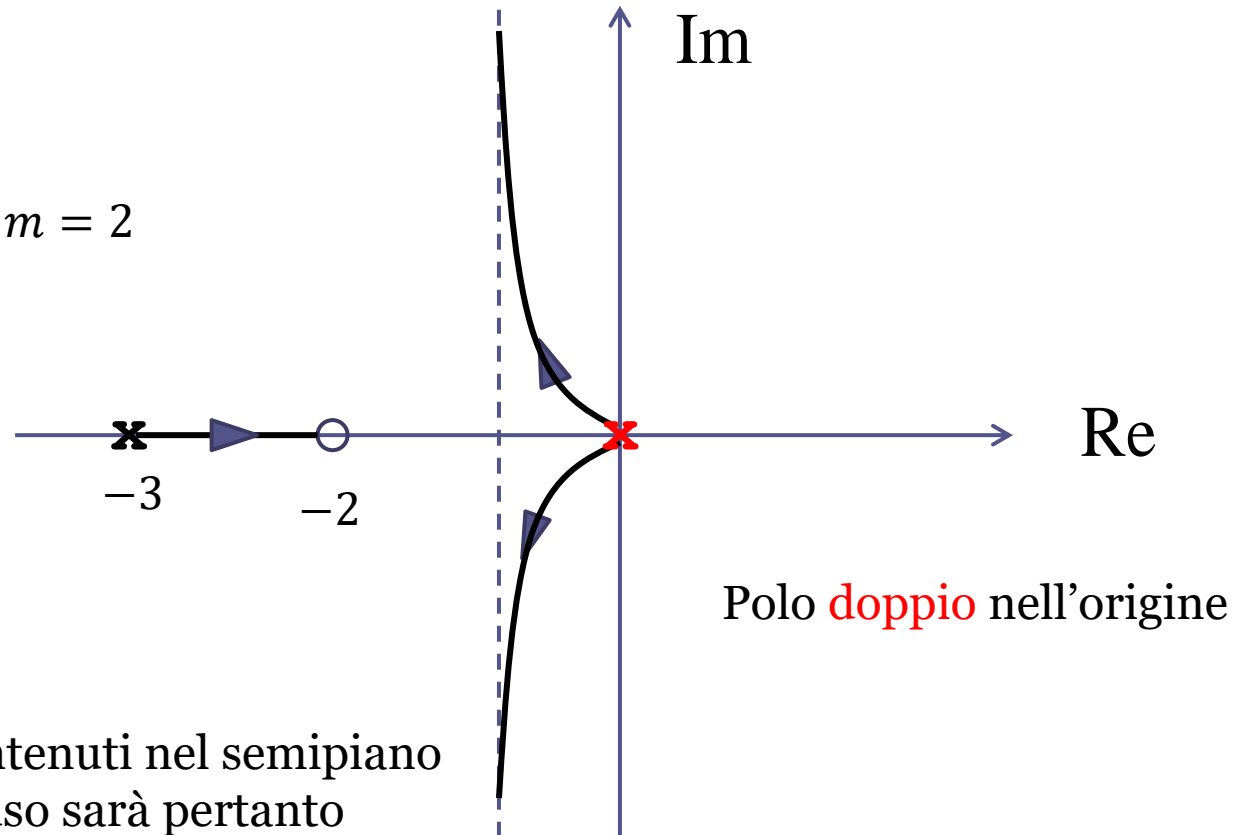
Il passo preliminare è **verificare la stabilità a ciclo chiuso**.

Tracciamo il LdR

$$L(s) = \frac{s + 2}{s^2(s + 3)}$$

$$x_s = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$n - m = 2$$



I 3 rami sono interamente contenuti nel semipiano sinistro. Il sistema a ciclo chiuso sarà pertanto asintoticamente stabile con un controllore del tipo  $C(s) = k \frac{s+2}{s}$  per qualunque valore di  $k$  (e quindi anche per  $k = 10$ )

Altro modo per verificare la stabilità

$$P_{car}(s) = s^2(s + 3) + 10(s + 2) = s^3 + 3s^2 + 10s + 20$$

Trattandosi di un polinomio di terzo grado, per verificare se si tratti o meno di un polinomio di Hurwitz possiamo applicare la condizione sui coefficienti impiegata più volte in esempi precedenti

$$3 \cdot 10 > 20$$



In base ai due enunciati del principio del modello interno si avranno le seguenti evoluzioni a regime in risposta alle 3 componenti del set point e del disturbo:

$$r(t) = 10 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 10$$

$$\xi(t) = 1 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

$$r(t) = 2t \quad y_{regime}(t) = 2t$$

Ora ricaviamo i medesimi risultati prescindendo dalla applicazione dei due enunciati del P.M.I.

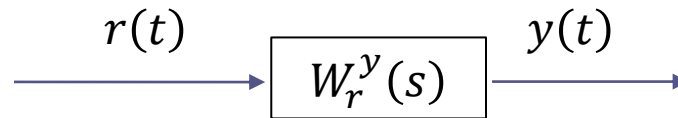
Utilizzeremo l'espressione delle FdT del sistema a ciclo chiuso. Calcoliamole e valutiamone il guadagno statico:

$$W_r^y(s) = \frac{10 \frac{s+2}{s} \cdot \frac{1}{s(s+3)}}{1 + 10 \frac{s+2}{s} \cdot \frac{1}{s(s+3)}} = \frac{10(s+2)}{s^2(s+3) + 10(s+2)} \quad W_r^y(0) = 1$$

$$W_\xi^y(s) = \frac{\frac{1}{s(s+3)}}{1 + 10 \frac{s+2}{s} \cdot \frac{1}{s(s+3)}} = \frac{s}{s^2(s+3) + 10(s+2)} \quad W_\xi^y(0) = 0$$

$$W_r^e(s) = \frac{1}{1 + 10 \frac{s+2}{s} \cdot \frac{1}{s(s+3)}} = \frac{s^2(s+3)}{s^2(s+3) + 10(s+2)}$$

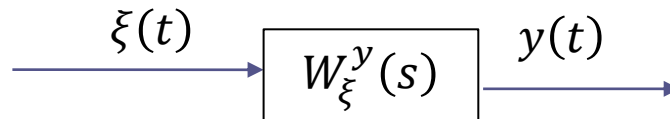
$$r(t) = 10$$



Poiché  $W_r^y(s)$  è una FdT asintoticamente stabile, il valore di regime della risposta al gradino è costante e pari al prodotto fra l'ampiezza del gradino ingresso ed il guadagno statico  $W_r^y(0)$  della FdT

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 10 \cdot W_r^y(0) = 10 \cdot 1 = 10$$

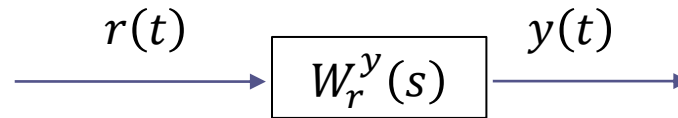
$$\xi(t) = 1$$



Poiché  $W_\xi^y(s)$  è una FdT asintoticamente stabile, il valore di regime della risposta al gradino è costante e pari al prodotto fra l'ampiezza del gradino ingresso ed il guadagno statico  $W_\xi^y(0)$  della FdT

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1 \cdot W_\xi^y(0) = 1 \cdot 0 = 0$$

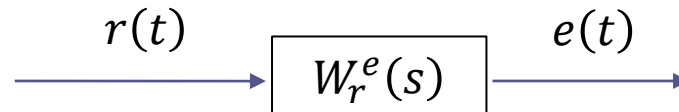
$$r(t) = 2t$$



Trasformata di Laplace dell'uscita:

$$Y(s) = W_r^y(s)R(s) = \frac{10(s+2)}{s^2(s+3)+10(s+2)} \cdot \frac{2}{s^2}$$

La  $Y(s)$  **non soddisfa** l'ipotesi di applicabilità del Teorema del valore finale in quanto ha un polo doppio in  $s = 0$ . Quindi  $y(t)$  non ammette un limite finito. Valutiamo se invece il segnale di errore tende ad un limite finito.



Trasformata di Laplace dell'errore:

$$E(s) = W_r^e(s)R(s) = \frac{s^2(s+3)}{s^2(s+3)+10(s+2)} \cdot \frac{2}{s^2} = \frac{2(s+3)}{s^2(s+3)+10(s+2)}$$

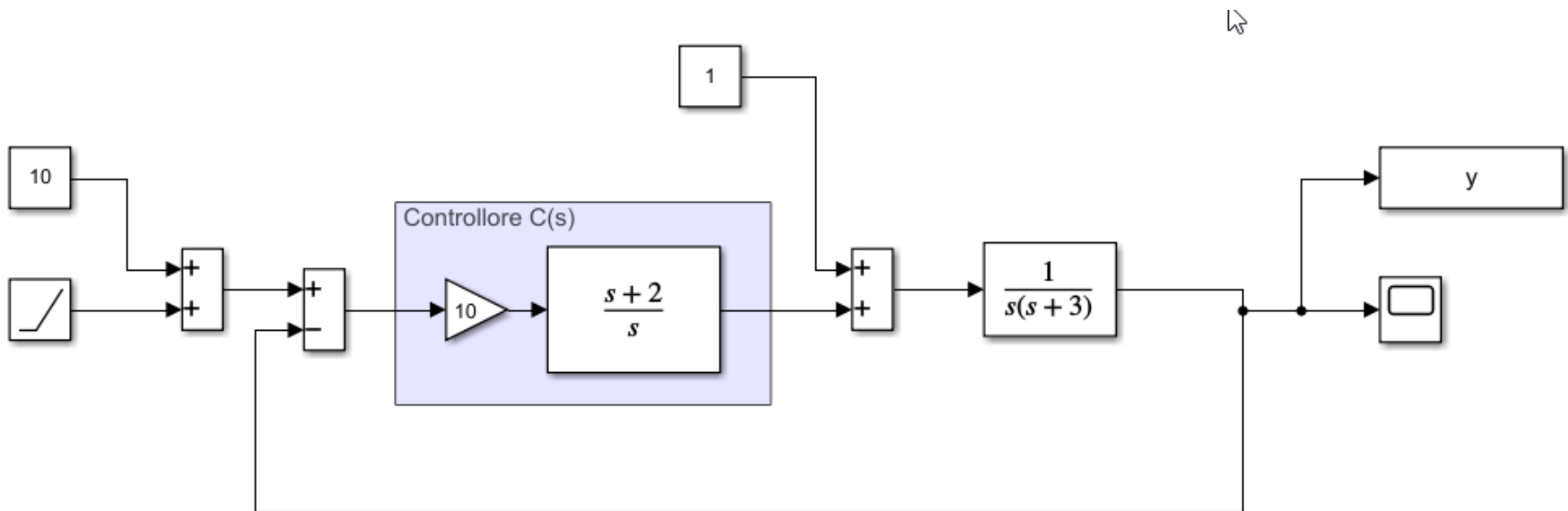
$E(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa. Il valore di regime del segnale di errore è pertanto pari a zero (v. slides trasformata di Laplace)

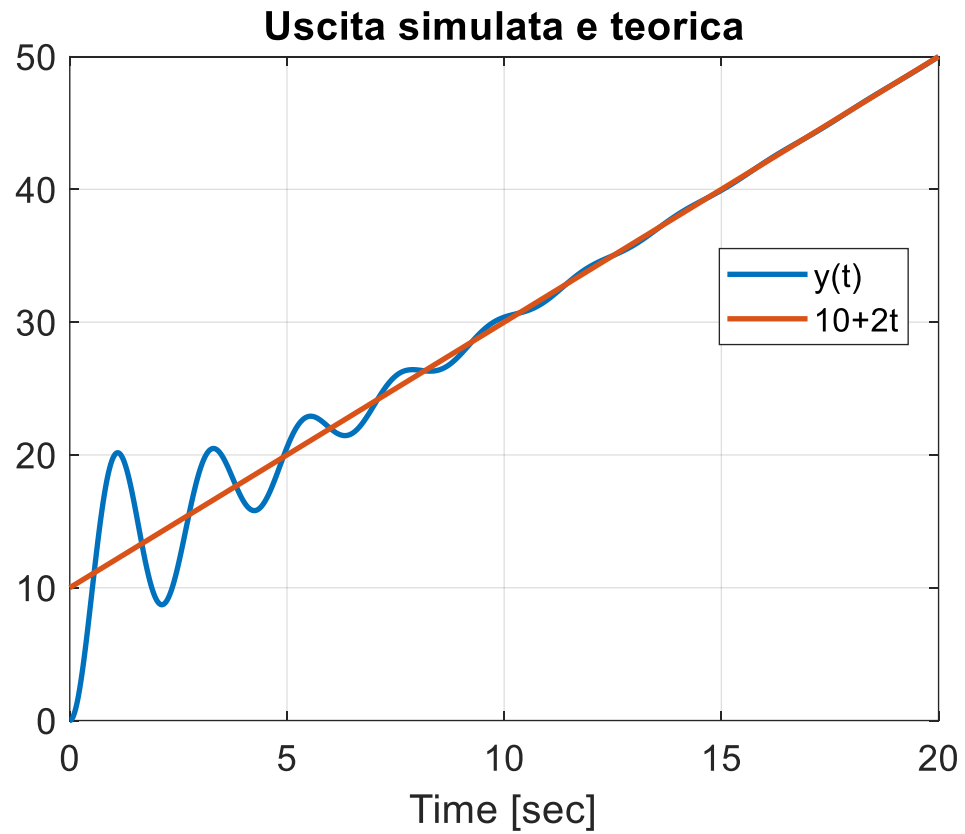
Se il segnale di errore tende asintoticamente a zero ne consegue che  $y_{regime}(t) = 2t$

Complessivamente, l'evoluzione di regime dell'uscita nel sistema di controllo oggetto del presente esempio sarà pertanto **sovrapposta a quella del set point**

$$y_{regime}(t) = 10 + 2t$$

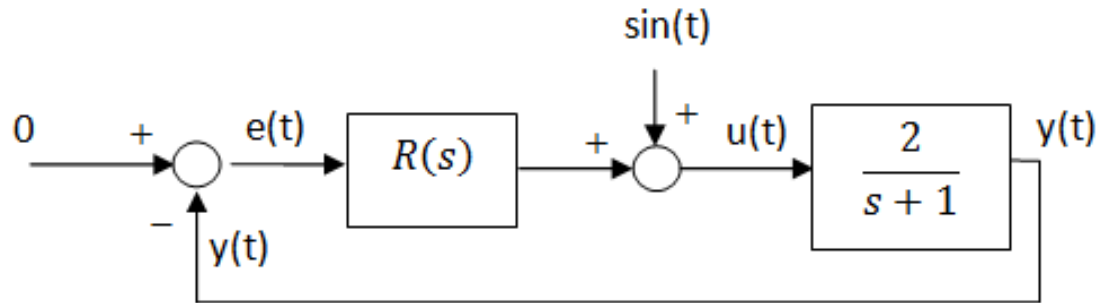
## Verifichiamo mediante simulazione dinamica i risultati ottenuti





## Esercizio

Si consideri il sistema di controllo in retroazione in Figura, con un processo del primo ordine asintoticamente stabile ed un disturbo sinusoidale



Progettare il regolatore  $R(s)$  in modo da garantire la **reiezione asintotica del disturbo**.

Applicando il principio del modello interno concludiamo come i regolatori  $R(s)$  che soddisfano la specifica (reiezione asintotica del disturbo) sono **tutti e soli** i regolatori  $R(s)$  aventi una **coppia di poli complessi coniugati  $p_{1,2} = \pm j$**  e **tali, nel contempo, da garantire la stabilità a ciclo chiuso del sistema in retroazione**

Ricerchiamo pertanto un regolatore nella forma

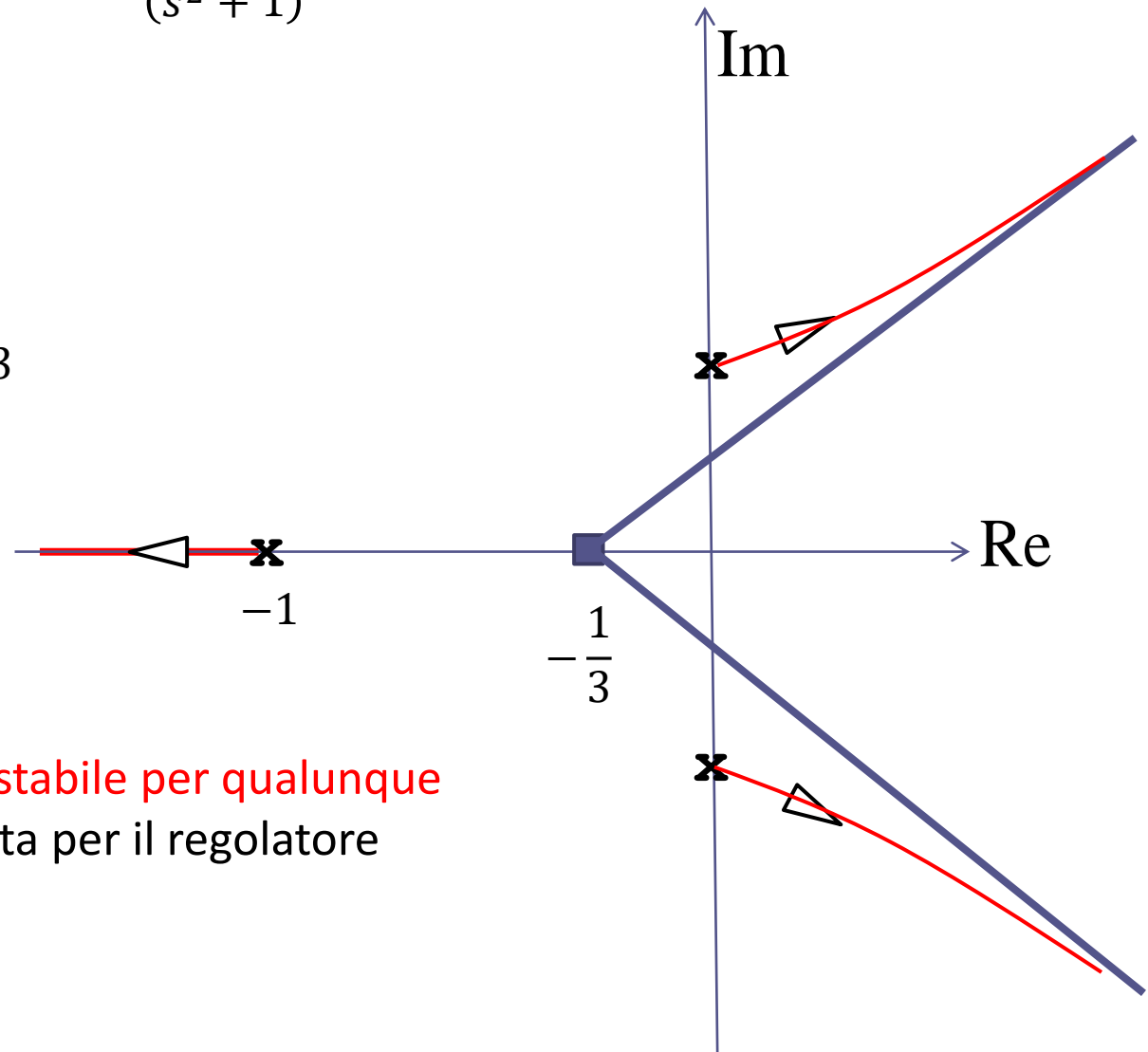
$$R(s) = \frac{N(s)}{D_1(s)(s^2 + 1)}$$

Scelta più semplice:  $R(s) = \frac{k_R}{(s^2 + 1)}$

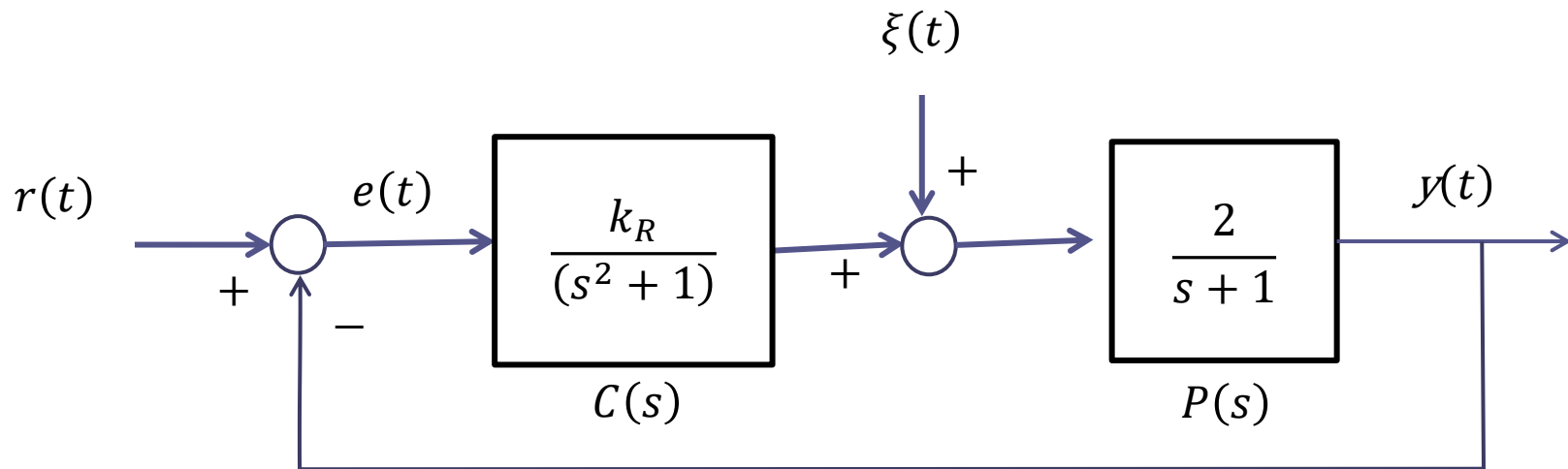
Tracciamo il LdR

$$L(s) = \frac{2}{(s + 1)(s^2 + 1)}$$

$$x_s = -\frac{1}{3} \quad n - m = 3$$



Sistema in retroazione **instabile per qualunque valore di  $k_R$** . Questa scelta per il regolatore non va pertanto bene.



Procediamo per via polinomiale per dedurre il medesimo risultato

$$P_{car}(s) = (s + 1)(s^2 + 1) + 2k_R = s^3 + s^2 + s + 1 + 2k_R$$

Trattandosi di un polinomio di terzo grado, per verificare se si tratti o meno di un polinomio di Hurwitz possiamo applicare la condizione sui coefficienti impiegata più volte in esempi precedenti

$$1 \cdot 1 > 1 + 2k_R$$



Aggiungiamo uno zero nel regolatore, sovrapponendolo, come prima scelta di tentativo, al polo del processo

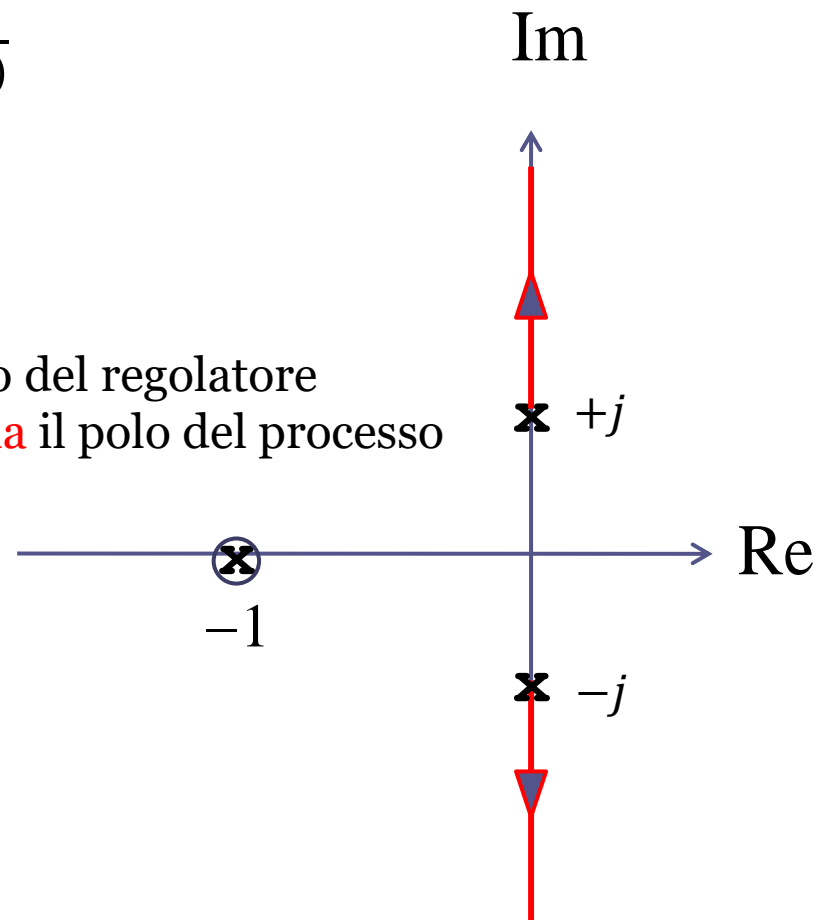
$$R(s) = \frac{k_R(1+s)}{(s^2+1)}$$

$$L(s) = \frac{(1+s)}{(s^2+1)} \cdot \frac{2}{s+1} = \frac{2}{(s^2+1)}$$

$$x_s = 0 \quad n - m = 2$$

I poli a ciclo chiuso sono immaginari puri per qualunque valore di  $k_R$ . Questa scelta per il regolatore non va pertanto bene.

Lo zero del regolatore **cancella** il polo del processo

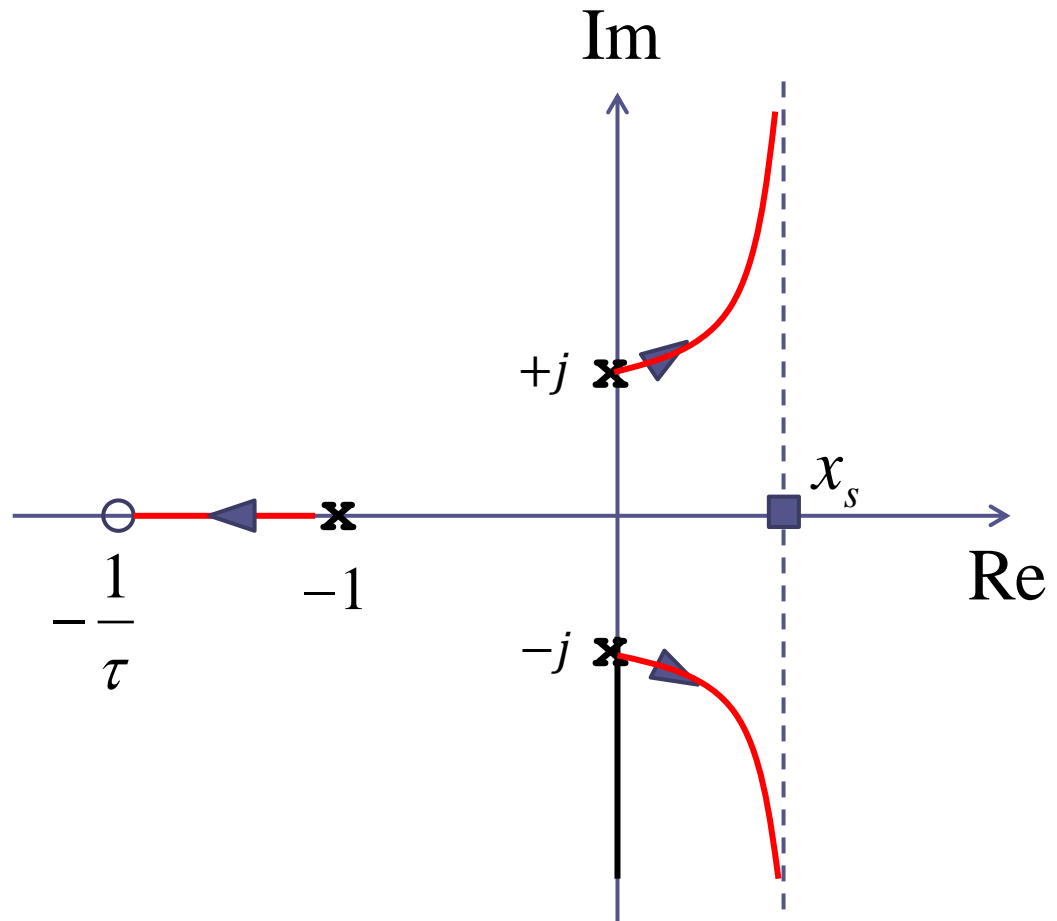


Spostiamo lo zero, posizionandolo più in **alta** frequenza rispetto al polo del processo

$$R(s) = \frac{k_R(1 + \tau s)}{(s^2 + 1)} \quad 0 < \tau < 1s \quad \frac{1}{\tau} > 1$$

$$L(s) = \frac{2(1 + \tau s)}{(s^2 + 1)(s + 1)}$$

$$x_s = \frac{-1 + \frac{1}{\tau}}{2} > 0$$



Sistema in retroazione instabile per qualunque valore di  $k_R$ . Questa scelta per il regolatore non va pertanto bene.

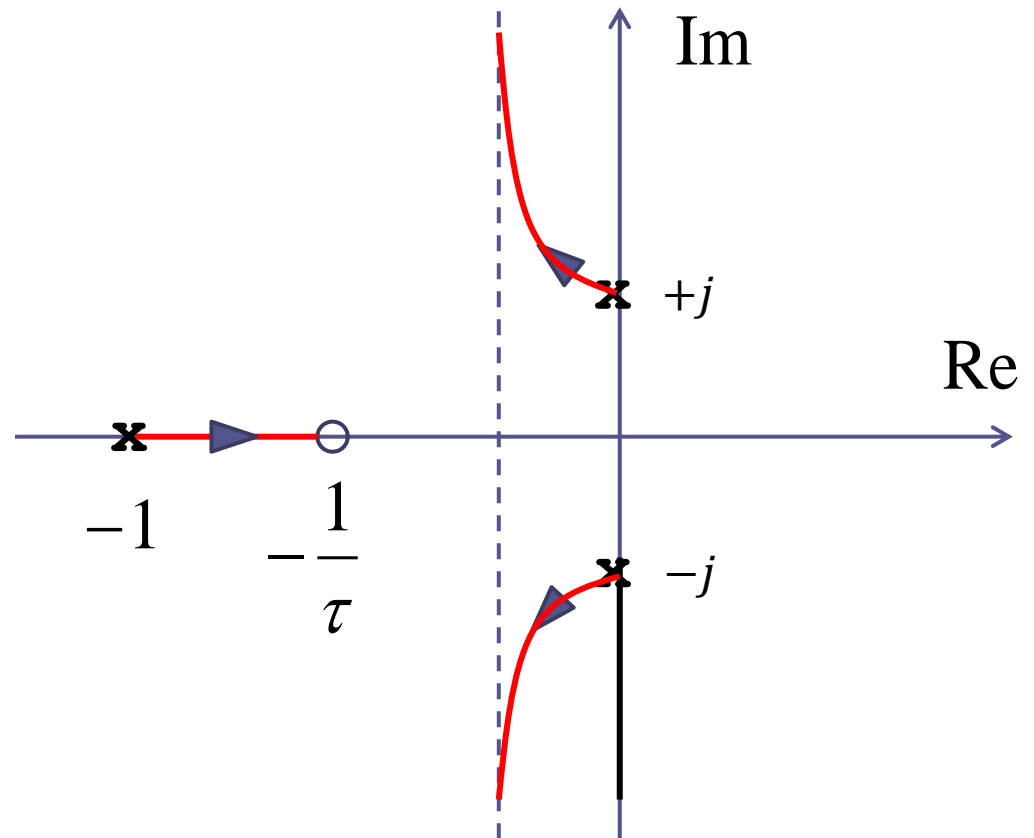
Tentiamo con l'alternativa non ancora esplorata, cioè collocare lo zero del regolatore più in **bassa** frequenza rispetto al polo del processo

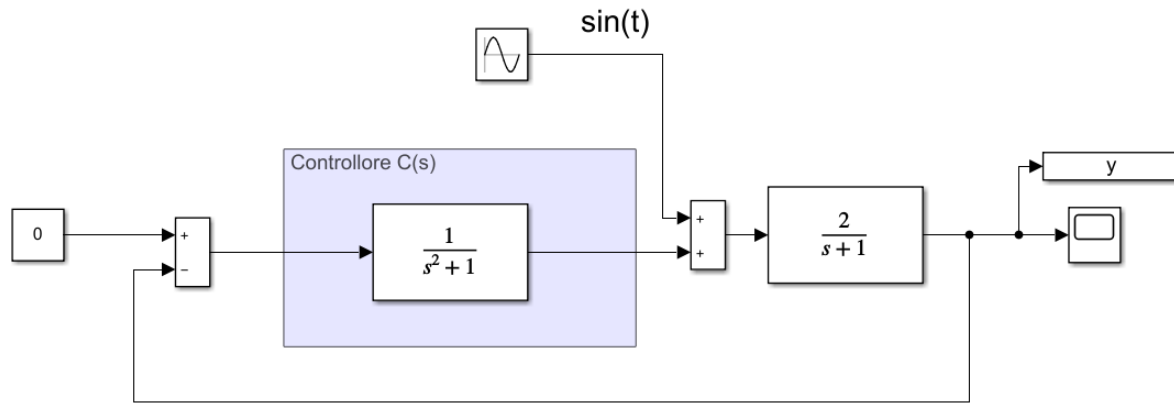
$$R(s) = \frac{k_R(1 + \tau s)}{(s^2 + 1)} \quad \tau > 1s \quad \frac{1}{\tau} < 1$$

$$L(s) = \frac{2(1 + \tau s)}{(s^2 + 1)(s + 1)}$$

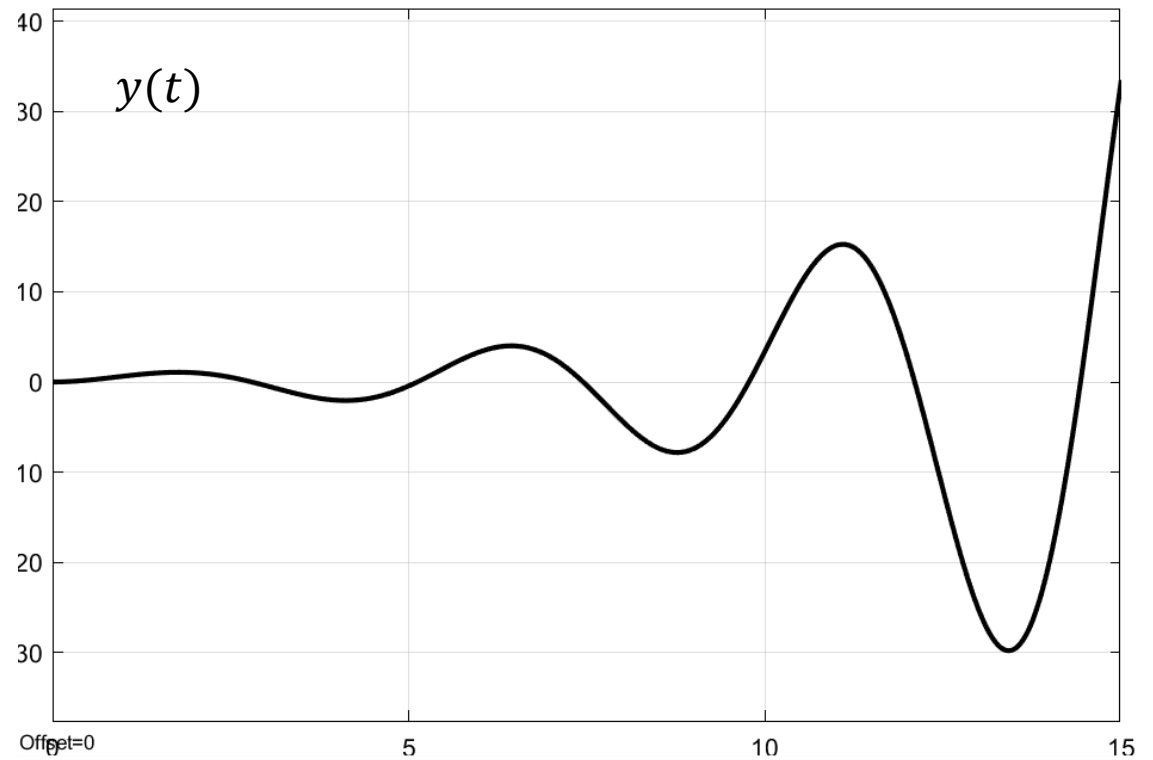
$$x_s = \frac{-1 + \frac{1}{\tau}}{2} < 0$$

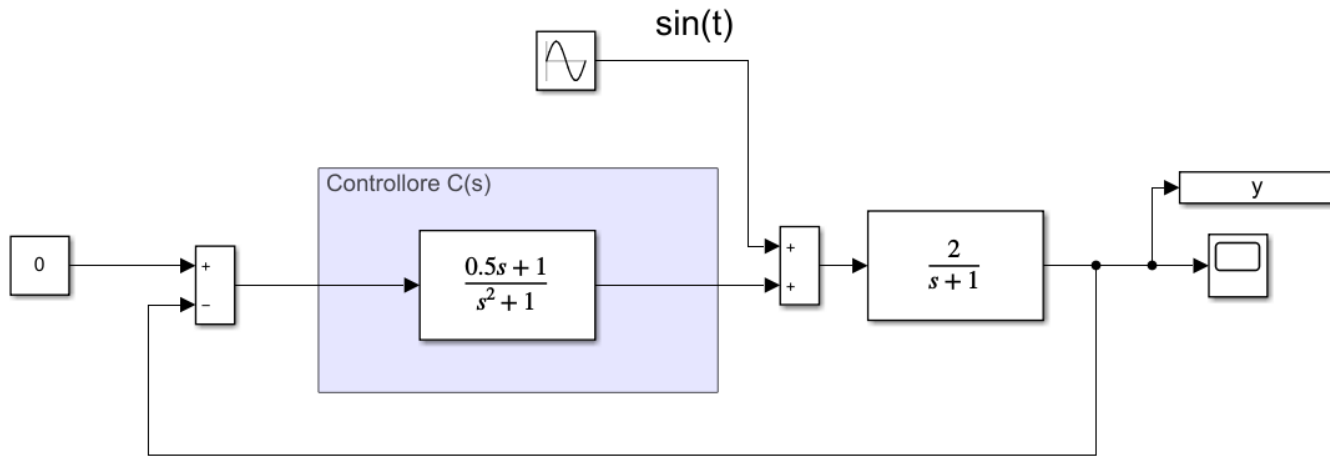
Ora il sistema a ciclo chiuso risulta essere asintoticamente stabile per qualunque valore di  $k_R$ . Questa scelta per il regolatore risolve pertanto il problema.





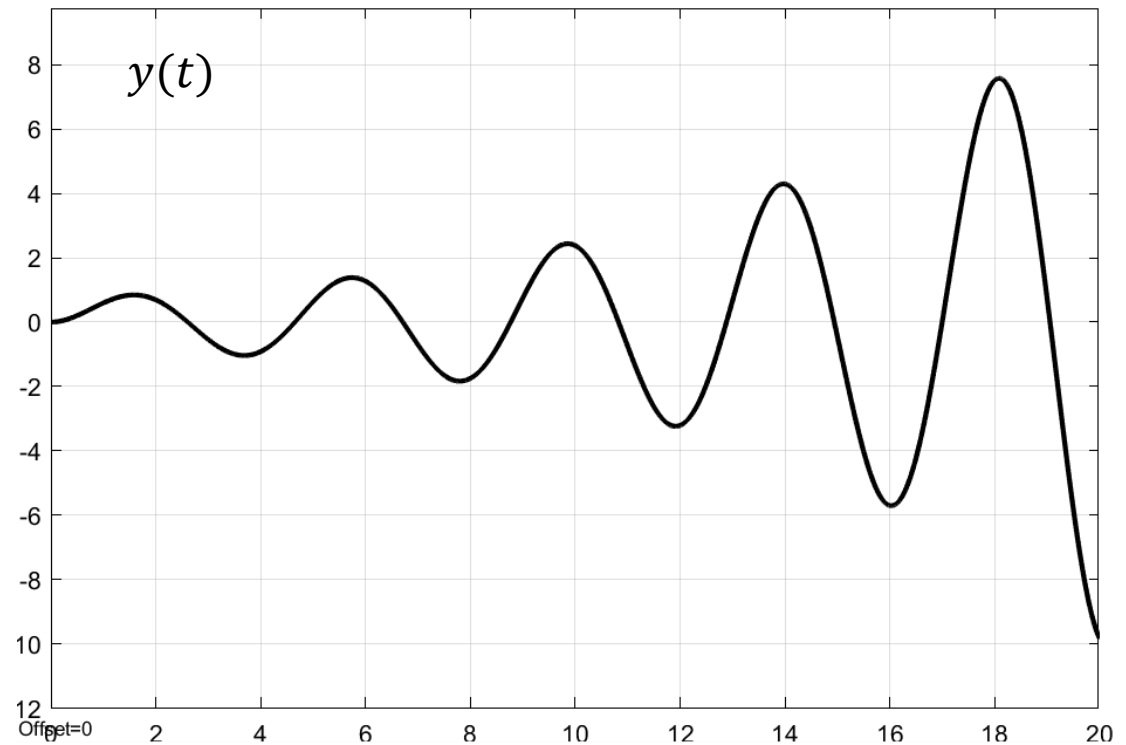
$$R_1(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)}$$

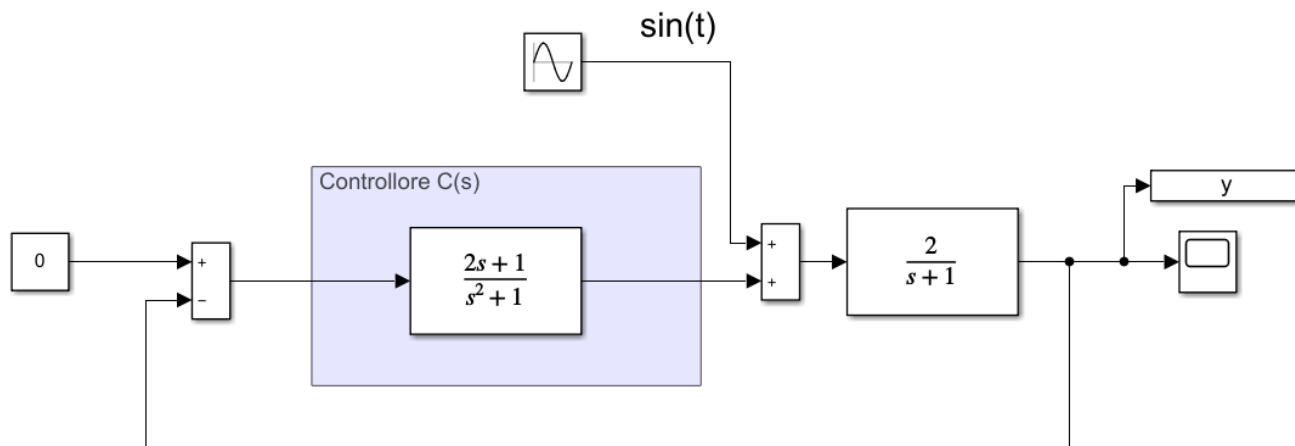




$$R_2(s) = \frac{0.5s + 1}{(s^2 + 1)}$$

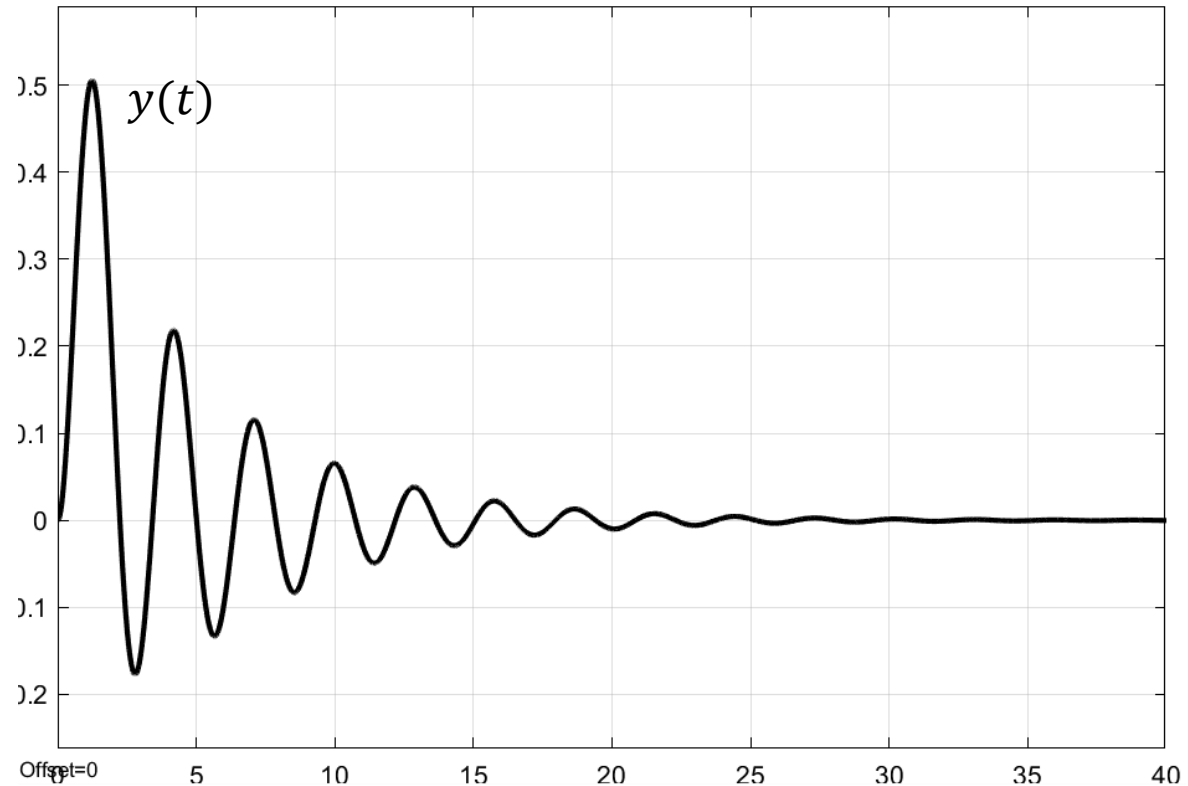
Zero del regolatore più in **alta** frequenza rispetto al polo del processo

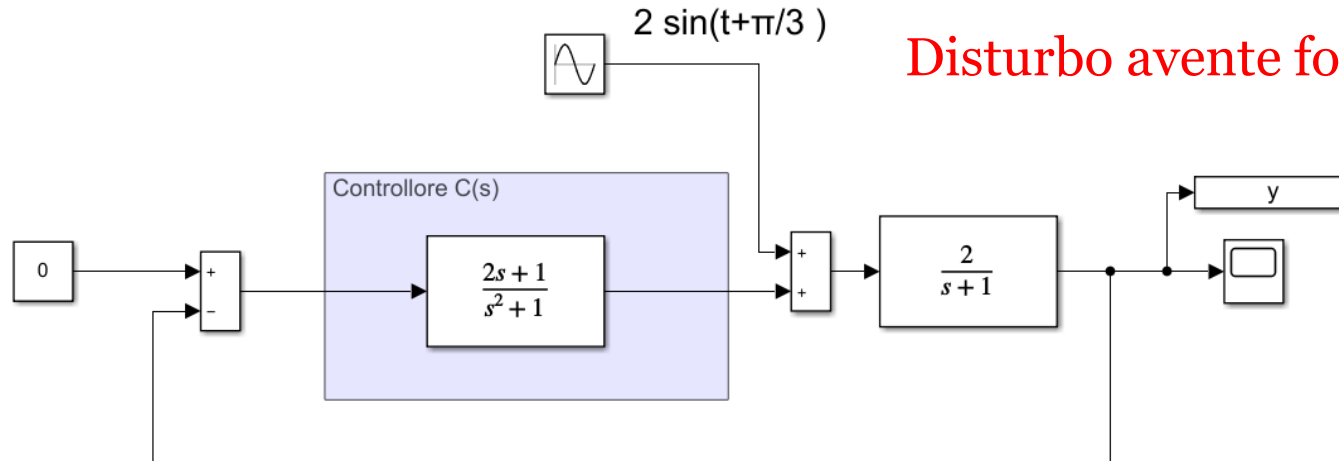




$$R_3(s) = \frac{2s + 1}{(s^2 + 1)}$$

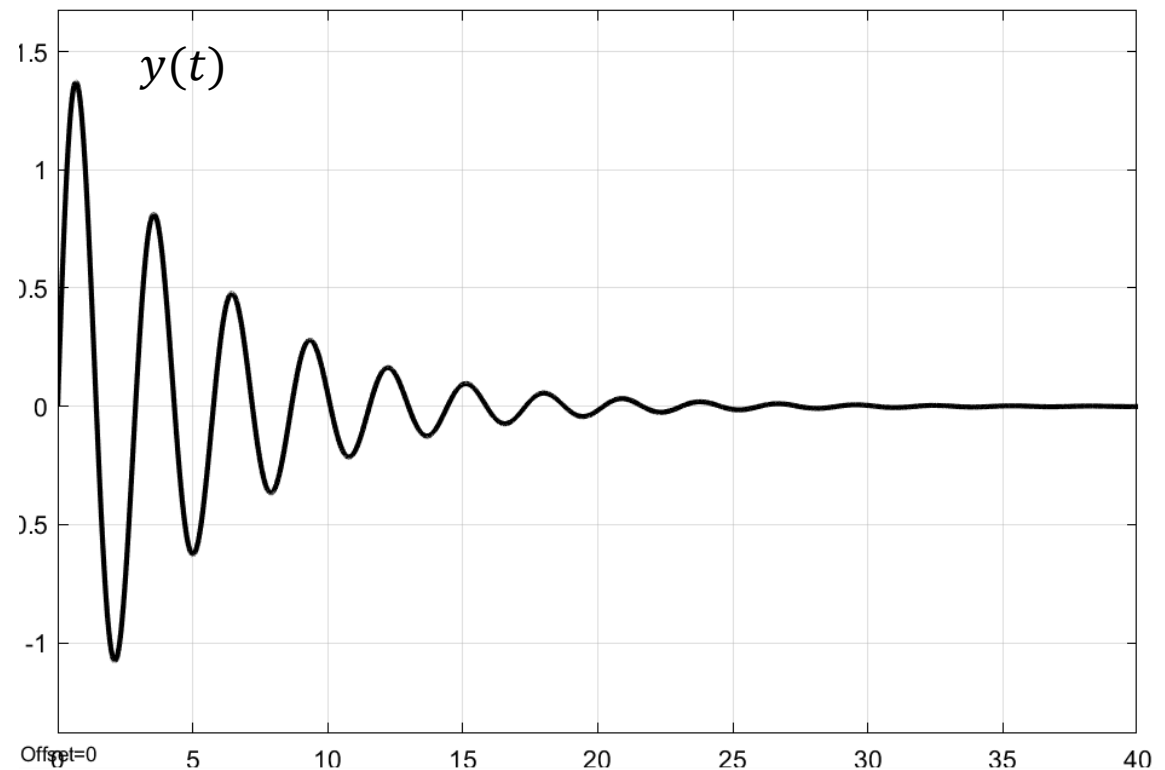
Zero del regolatore più in **bassa** frequenza rispetto al polo del processo





$$R_3(s) = \frac{2s + 1}{(s^2 + 1)}$$

Zero del regolatore più in **bassa** frequenza rispetto al polo del processo



Vediamo se una scelta differente del regolatore consente di **prescindere dalla conoscenza della posizione del polo del processo.**

$$R(s) = \frac{k_R (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s^2 + 1}$$

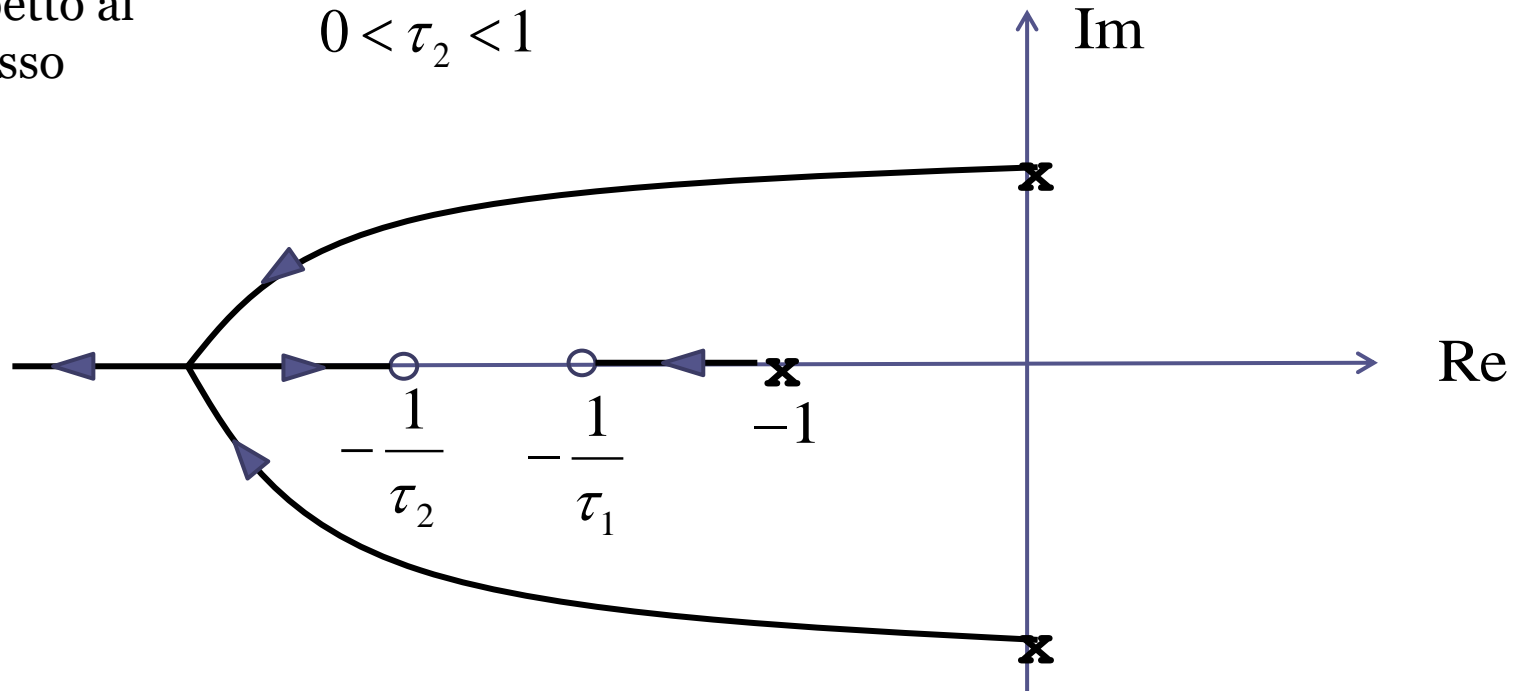
Regolatore con due zeri e due poli  
**Grado relativo nullo** (n=m)  
**SCelta SEMPRE CONSIGLIATA**

Zeri entrambi più in **alta** frequenza rispetto al polo del processo

$$0 < \tau_1 < 1$$

$$0 < \tau_2 < 1$$

**Ok**



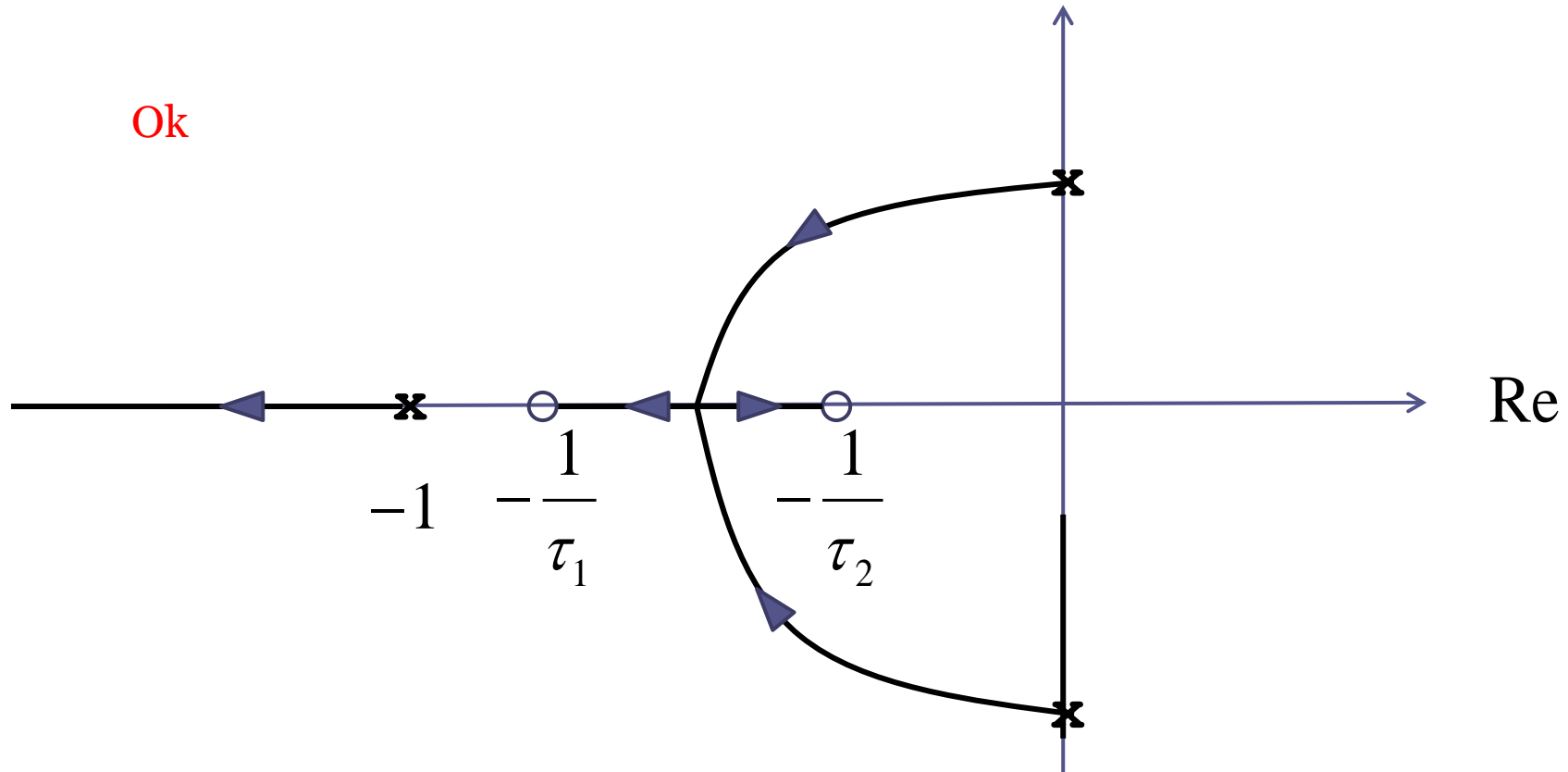
$$R(s) = \frac{k_R (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s^2 + 1}$$

Zeri entrambi più in **bassa**  
frequenza rispetto al  
polo del processo

$$\tau_1 > 1$$

$$\tau_2 > 1$$

**Ok**

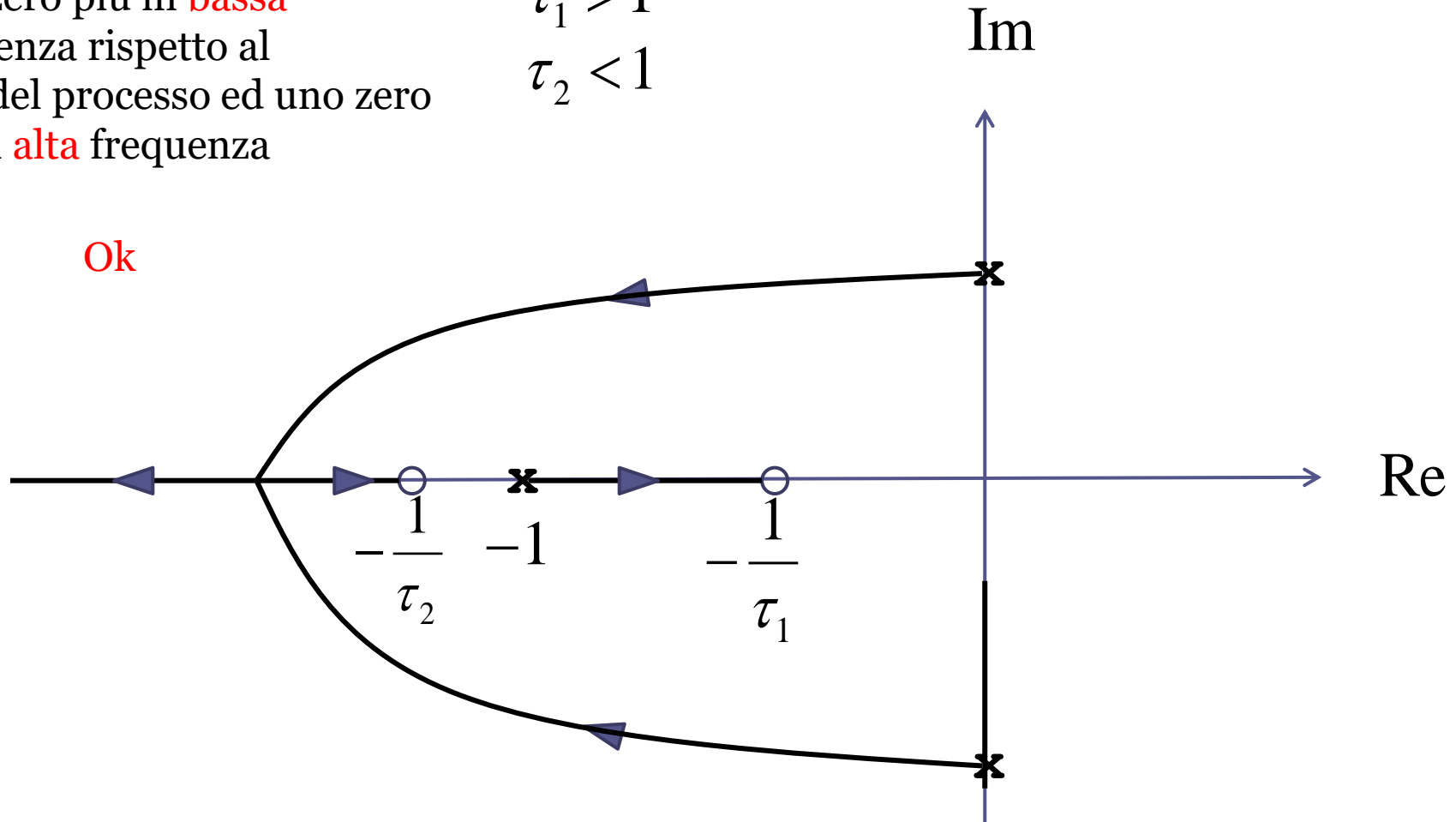


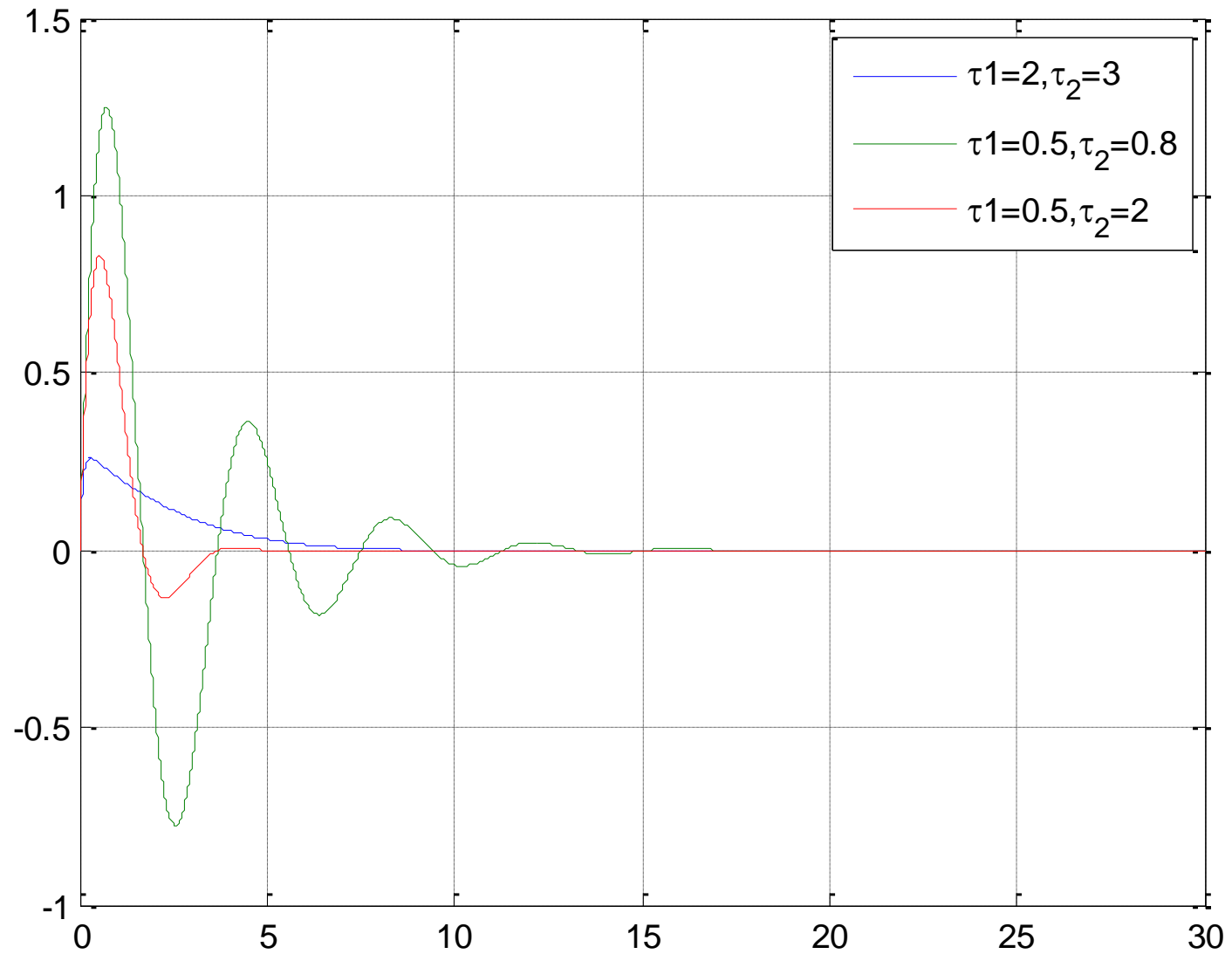
$$R(s) = \frac{k_R (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s^2 + 1}$$

Uno zero più in **bassa** frequenza rispetto al polo del processo ed uno zero più in **alta** frequenza

$$\tau_1 > 1$$

$$\tau_2 < 1$$





```
clear all
t=(0:0.01:30);
d=2*sin(t+pi/3);

num_P=2; den_P=[1 1];
P=tf(num_P,den_P)

kR=1;
tau1=2; tau2=3;
num_R=kR*[tau1*tau2 tau1+tau2 1];
den_R=[1 0 1];
R=tf(num_R,den_R)
W_dy=P/(1+R*P);
Y1=lsim(W_dy,d,t);

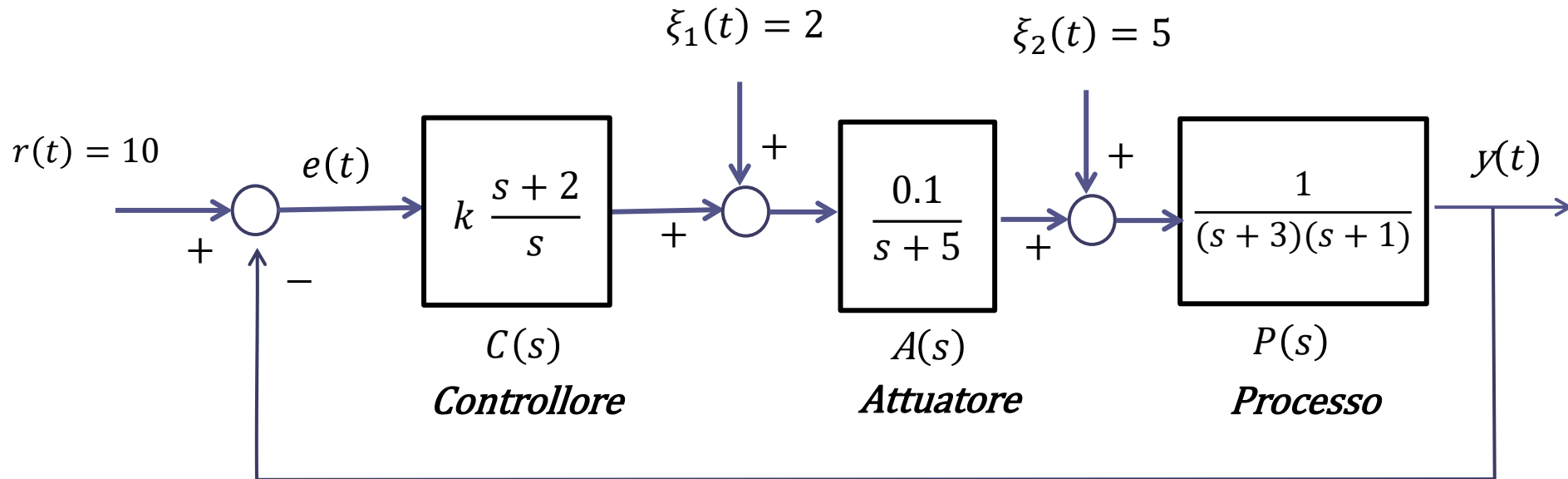
tau1=0.5; tau2=0.8;
num_R=kR*[tau1*tau2 tau1+tau2 1];
den_R=[1 0 1];
R=tf(num_R,den_R)
W_dy=P/(1+R*P);
Y2=lsim(W_dy,d,t);

tau1=0.5; tau2=2;
num_R=kR*[tau1*tau2 tau1+tau2 1];
den_R=[1 0 1];
R=tf(num_R,den_R)
W_dy=P/(1+R*P);
Y3=lsim(W_dy,d,t);

plot(t,Y1,t,Y2,t,Y3),grid,
legend('\tau_1=2,\tau_2=3','\tau_1=0.5,\tau_2=0.8','\tau_1=0.5,\tau_2=2')
```

## Esercizio

Si consideri il seguente sistema di controllo in retroazione



Determinare l'evoluzione di regime della variabile di uscita al variare del guadagno  $k$

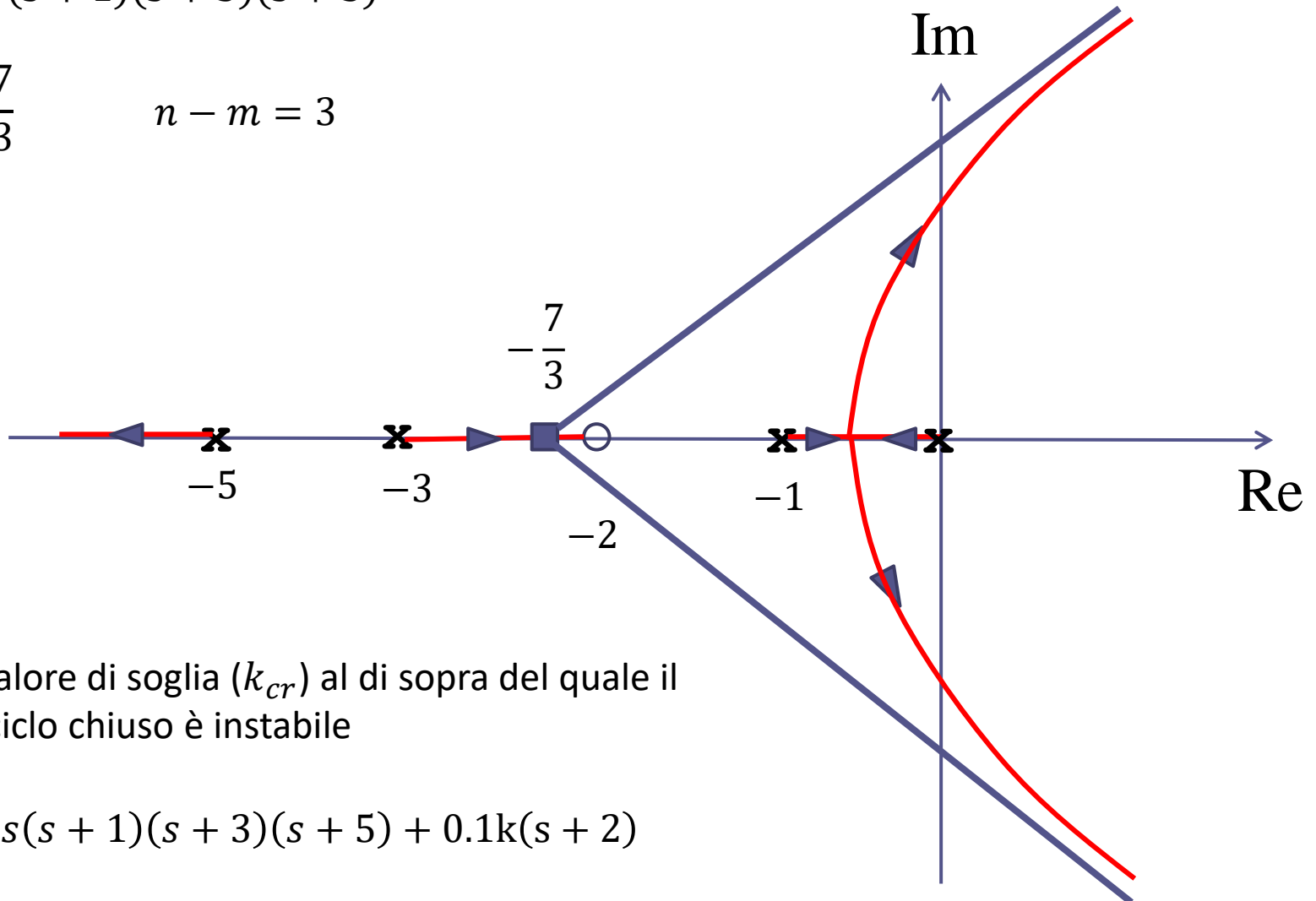
**Sistema di controllo di tipo 1 con il polo nell'origine contenuto nel regolatore.** Analizziamo preliminarmente la stabilità a ciclo chiuso.

$$P_{car}(s) = s(s+1)(s+3)(s+5) + 0.1k(s+2)$$

Tracciamo il LdR

$$L(s) = \frac{0.1(s + 2)}{s(s + 1)(s + 3)(s + 5)}$$

$$x_s = -\frac{7}{3} \quad n - m = 3$$



Esiste un valore di soglia ( $k_{cr}$ ) al di sopra del quale il sistema a ciclo chiuso è instabile

$$P_{car}(s) = s(s + 1)(s + 3)(s + 5) + 0.1k(s + 2)$$

Determiniamo il valore di  $k_{cr}$  applicando il **criterio di Routh-Hurwitz** al polinomio caratteristico

$$P_{car}(s) = \text{DEN}(L(s)) + k \text{ NUM}(L(s)) = s(s+1)(s+3)(s+5) + 0.1k(s+2) =$$

$$= s^4 + 9s^3 + 23s^2 + (15 + 0.1k)s + 0.2k$$

4	1	23	0.2k
3	9	$15 + 0.1k$	
2	$b_2$	$b_0$	
1	$c_1$		
0	$d_0$		

$$b_2 = - \begin{vmatrix} 1 & 23 \\ 9 & 15 + 0.1k \end{vmatrix} = 192 - 0.1k$$

$$b_0 = - \begin{vmatrix} 1 & 0.2k \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = 1.8k$$

Per il calcolo di  $b_2$  e  $b_0$  non si è diviso per 9

Determiniamo il valore di  $k_{cr}$  applicando il criterio di Routh-Hurwitz al polinomio caratteristico

$$P_{car}(s) = \text{DEN}(L(s)) + k \text{ NUM}(L(s)) = s(s+1)(s+3)(s+5) + 0.1k(s+2) =$$

$$= s^4 + 9s^3 + 23s^2 + (15 + 0.1k)s + 0.2k$$

4	1	23	0.2k
3	9	15 + 0.1k	
2	192 - 0.1k	1.8k	
1	$c_1$		
0	$d_0$		

$$c_1 = - \begin{vmatrix} 9 & 15 + 0.1k \\ 192 - 0.1k & 1.8k \end{vmatrix} =$$

$$= -0.01k^2 + \frac{3}{2}k + 2880$$

Per il calcolo di  $c_1$  non si è diviso per  $192 - 0.1k$

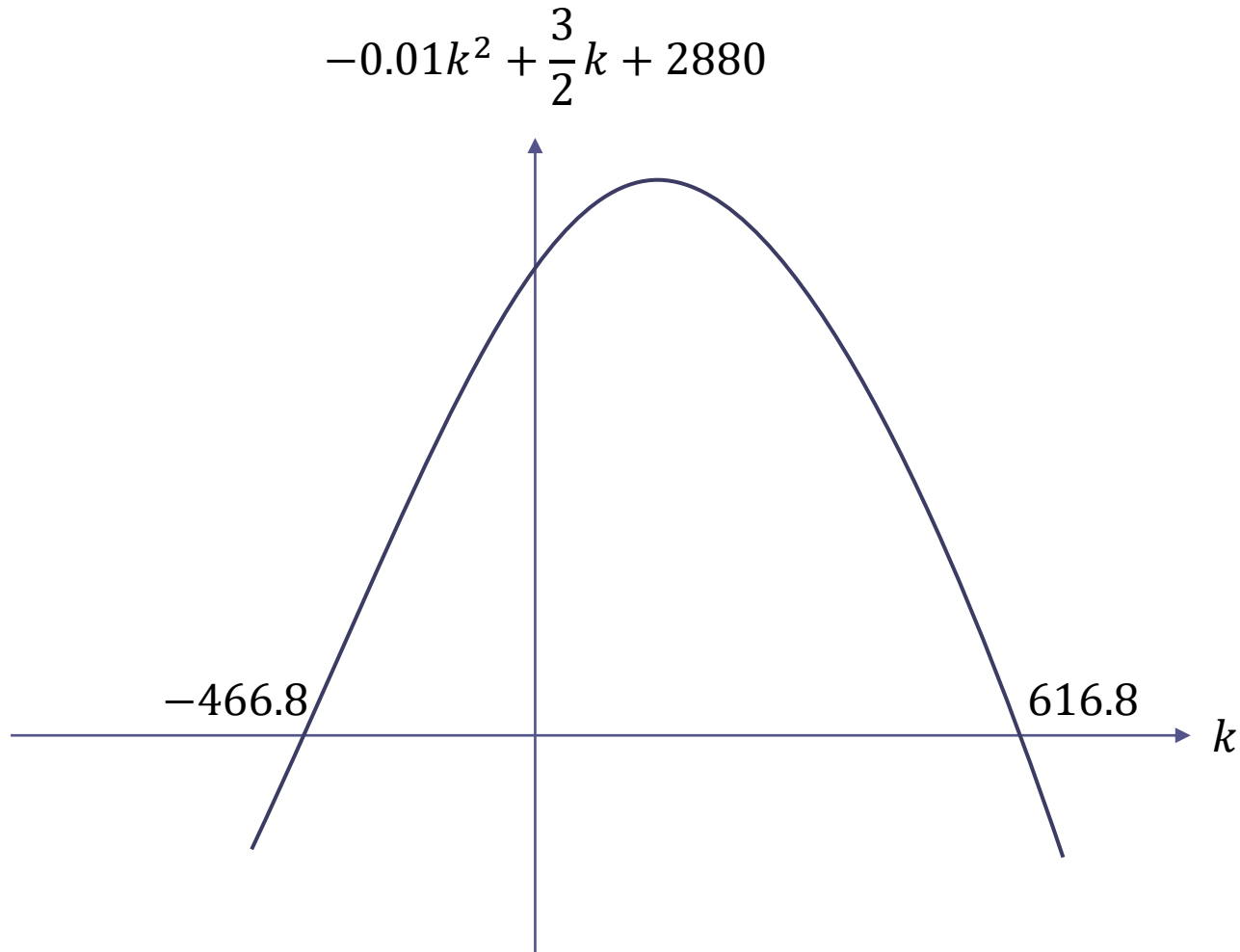
Determiniamo il valore di  $k_{cr}$  applicando il criterio di Routh-Hurwitz al polinomio caratteristico

$$P_{car}(s) = \text{DEN}(L(s)) + k \text{ NUM}(L(s)) = s(s+1)(s+3)(s+5) + 0.1k(s+2) =$$

$$= s^4 + 9s^3 + 23s^2 + (15 + 0.1k)s + 0.2k$$

4	1	23	0.2k
3	9	15 + 0.1k	
2	$192 - 0.1k$	1.8k	
1	$-0.01k^2 + \frac{3}{2}k + 2880$		
0	$d_0 = c_1 \cdot 1.8k$		

Il polinomio  $-0.01k^2 + \frac{3}{2}k + 2880$  ha come radici  $k = k_1 = -466.8$  e  $k = k_2 = 616.8$



Imponiamo che i coefficienti della prima colonna della tabella siano tutti positivi

$$192 - 0.1k > 0$$



$$k < 1920$$

$$-0.01k^2 + \frac{3}{2}k + 2880 > 0$$



$$0 < k < 616.87$$

$$c_1 \cdot 1.8k > 0$$



$$0 < k < 616.87$$

Il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile per valori del guadagno  $k$  tali che

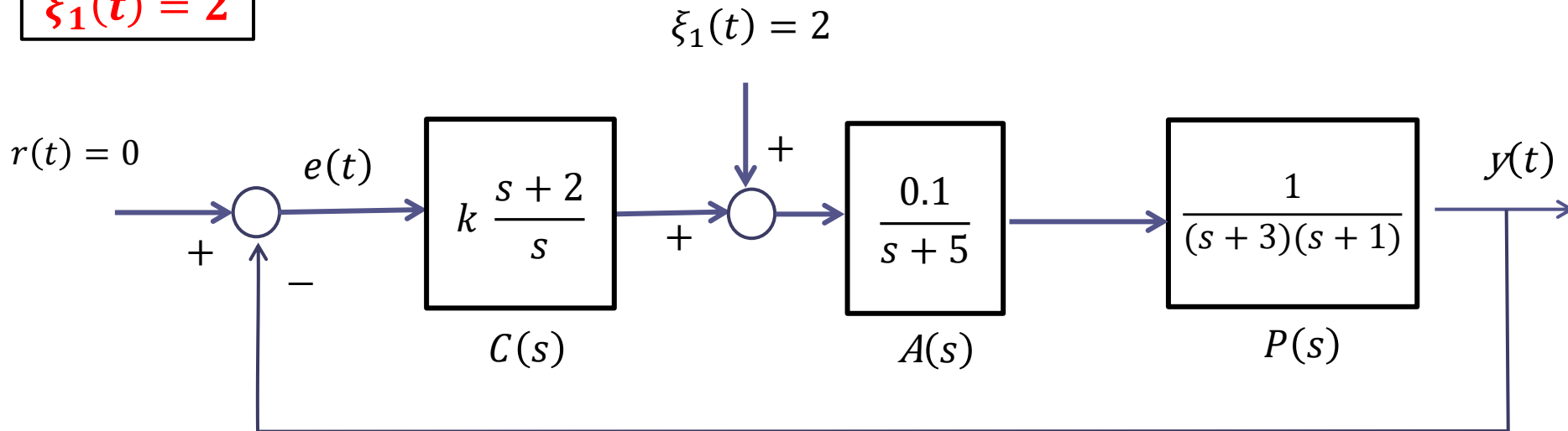
$$0 < k < 616.87 = k_{cr}$$

$$r(t) = 10$$

La FdT a ciclo aperto  $A(s) = C(s)A(s)P(s)$  contiene il modello di un set point costante (contiene un polo nell'origine).

$$\text{PMI : } y(t) \rightarrow 10$$

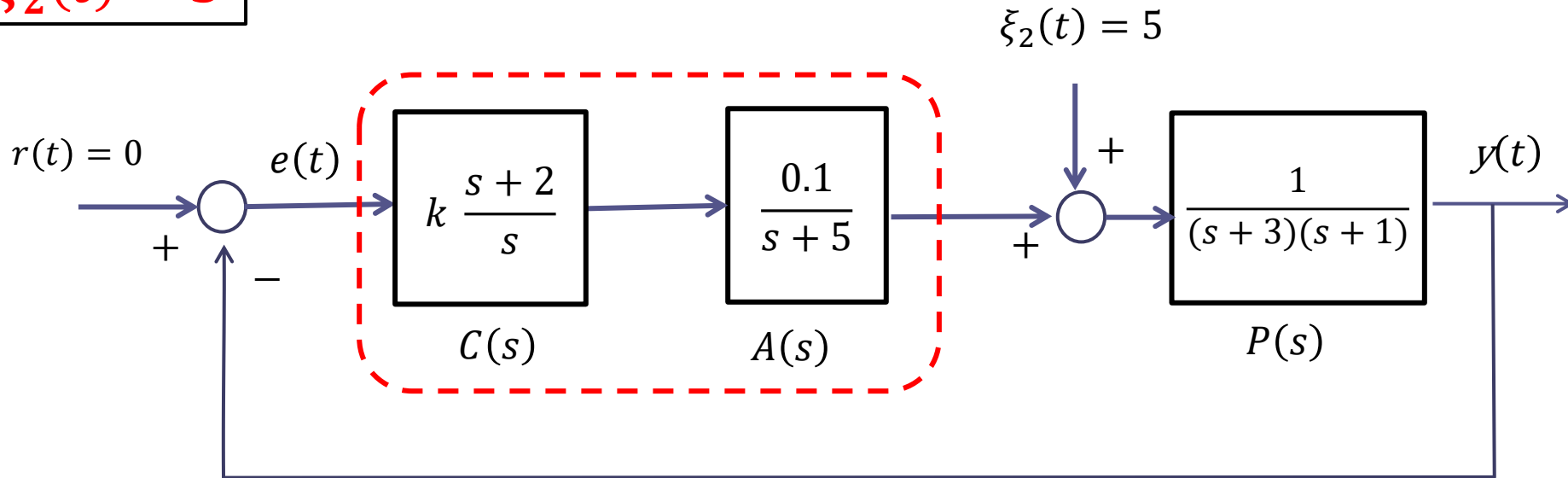
$$\xi_1(t) = 2$$



La FdT  $C(s)$  contiene il modello di un disturbo costante (contiene un polo nell'origine).

$$\text{PMI : } y(t) \rightarrow 0$$

$$\xi_2(t) = 5$$



La FdT  $C(s)A(s)$  contiene il modello di un disturbo costante (contiene un polo nell'origine).

$$\text{PMI: } y(t) \rightarrow 0$$

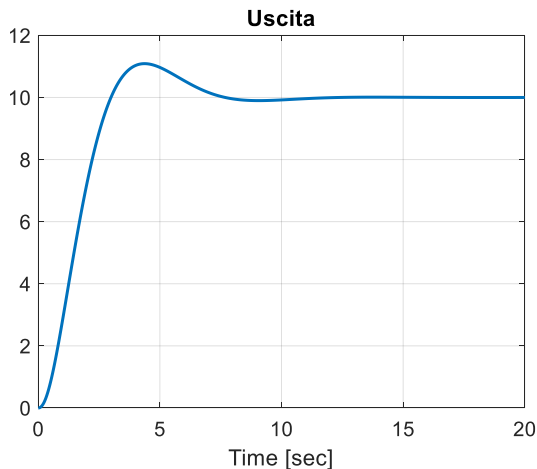
Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti deduciamo che complessivamente il comportamento di regime dell'uscita sarà il seguente:

$$y(t) \rightarrow 10 \quad 0 < k < 616.87$$

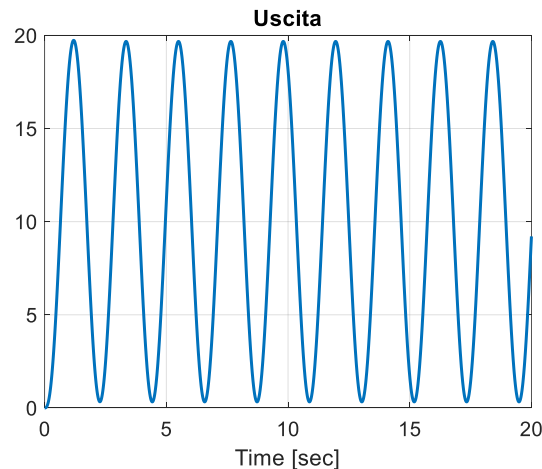
$$y(t) \text{ oscilla} \quad k = 616.87$$

$$y(t) \rightarrow \infty \quad k > 616.87$$

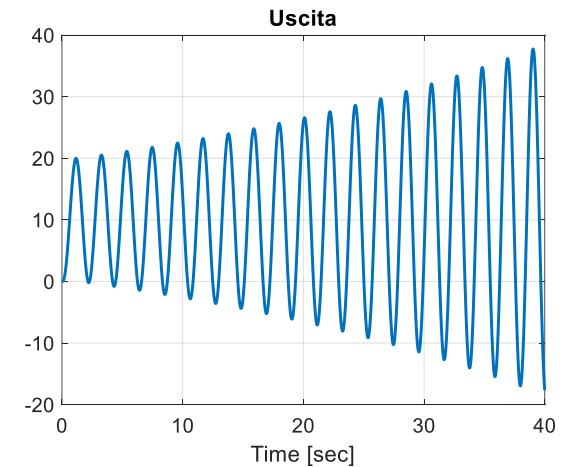
$$k = 50$$



$$k = 616.87$$

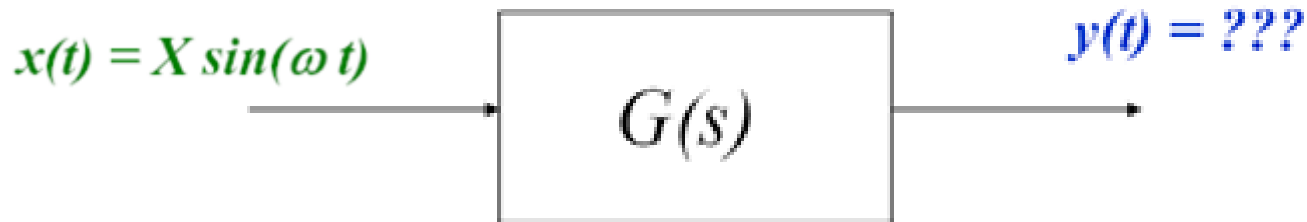


$$k = 650$$



# Analisi armonica

L'**analisi armonica** di un sistema dinamico consiste nello studio della risposta a transitorio esaurito quando in ingresso al sistema viene applicata un'onda sinusoidale.



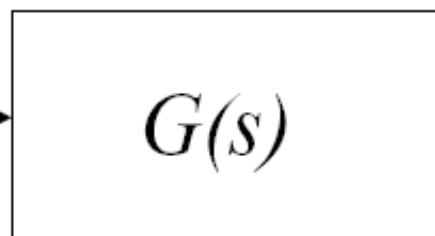
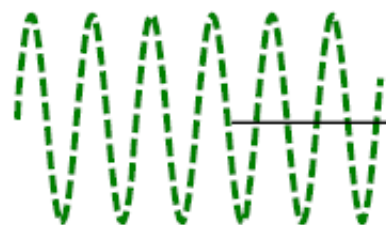
Per sistemi dinamici LTI l'analisi della risposta a regime si basa sulla **funzione di risposta armonica (FRA)**

La FRA è una funzione a valori complessi che si calcola a partire dalla  $G(s)$  operando la **sostituzione  $s=j\omega$**

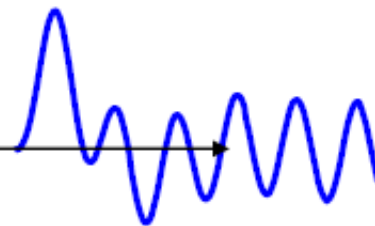
$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

- se si applica a un sistema lineare stazionario **asintoticamente stabile** il segnale di ingresso  $x(t) = X \sin(\omega t)$  esaurito il transitorio (in condizione di regime stazionario periodico) l'uscita varia pure con legge sinusoidale caratterizzata dalla stessa pulsazione  $\omega$  e può pertanto essere espressa con la relazione  $y(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$

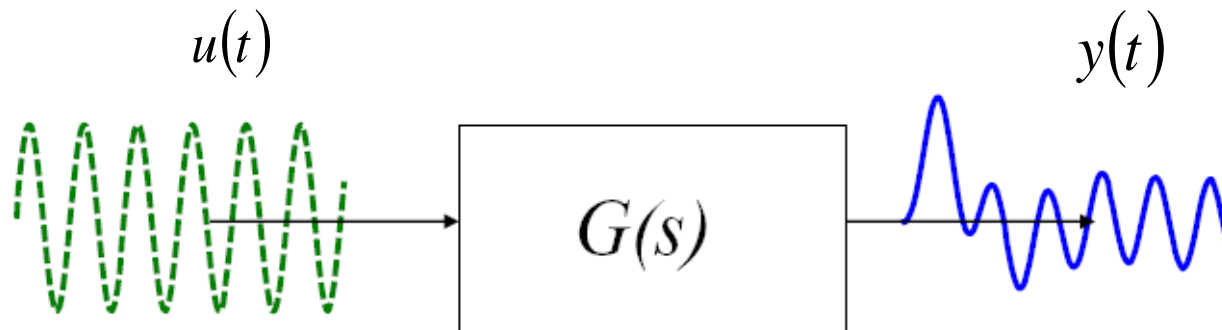
$$x(t) = X \sin \omega t$$



$$y(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$



## RISPOSTA ARMONICA



### $G(s)$ asintoticamente stabile

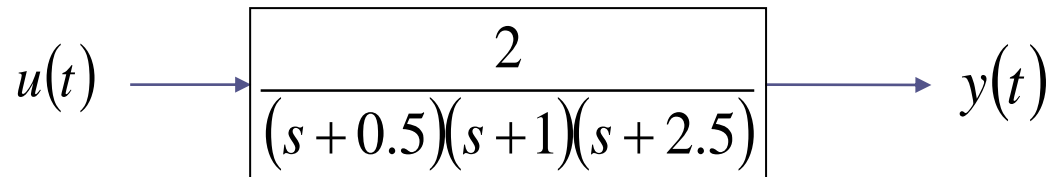
$$u(t) = X \cos(\bar{\omega}t + \phi)$$

$$y_{regime}(t) = X |G(j \bar{\omega})| \cos(\bar{\omega}t + \phi + \angle G(j \bar{\omega}))$$

Stessa frequenza, diversa  
ampiezza e diversa fase

Generalizzabile a somme di sinusoidi in ingresso a diversa frequenza applicando il principio di sovrapposizione degli effetti

## Esempio



$$G(s) = \frac{2}{(s+0.5)(s+1)(s+2.5)}$$

**asintoticamente stabile**

$$u(t) = 2 \cos(3t) \quad X = 2 \quad \bar{\omega} = 3 \quad \phi = 0$$

$$y_{regime}(t) = 2 |G(j3)| \cos(3t + \angle G(j3))$$

$$G(j3) = \frac{2}{(j3 + 0.5)(j3 + 1)(j3 + 2.5)}$$

E' un numero complesso del quale si può valutare modulo e fase

Operativamente, leggiamo il modulo  $|G(j3)|$  e la fase  $\angle G(j3)$  dai **Diagrammi di Bode** della FdT  $G(s)$

## Rappresentazione grafica di funzioni a valori complessi

$$F(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + j I(\omega)$$

$$M(\omega) = |F(\omega)| \quad \text{Modulo}$$

$$R(\omega)$$

Parte reale

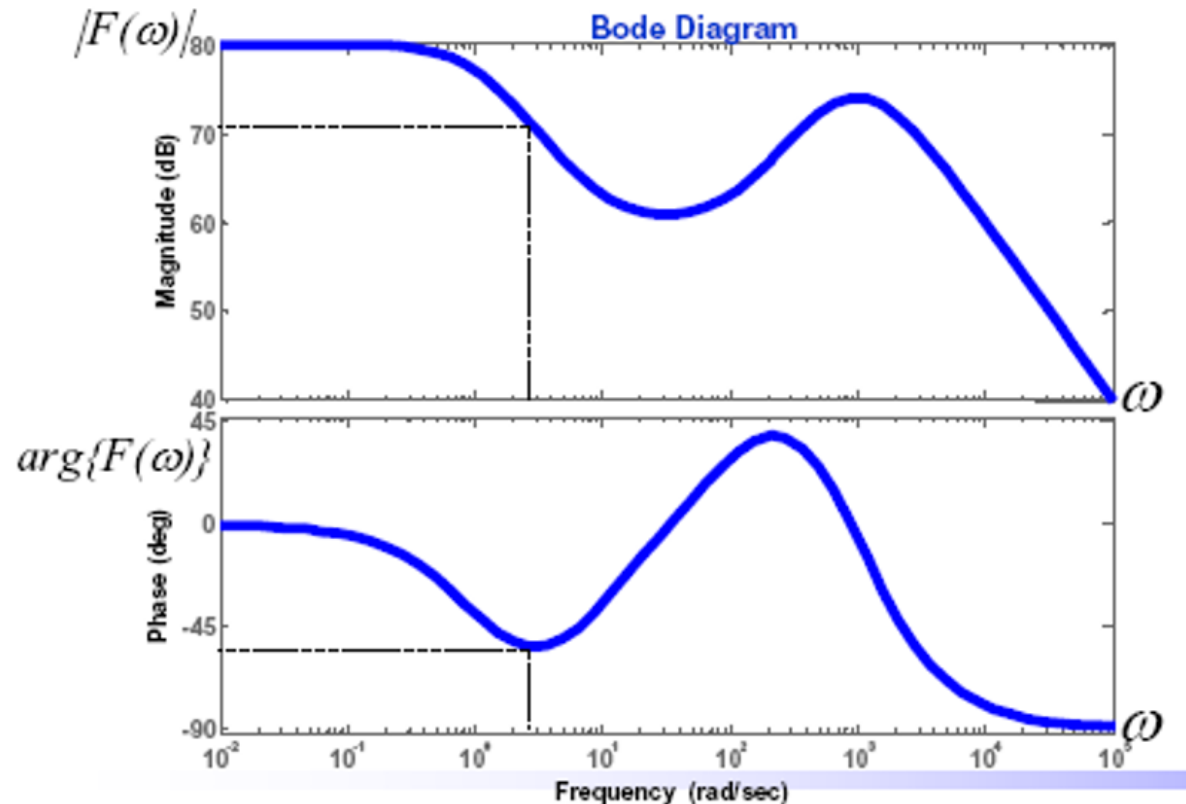
$$\varphi(\omega) = \angle F(\omega) \quad \text{Fase}$$

$$I(\omega)$$

Parte immaginaria

### Diagrammi di Bode

Il modulo e la fase sono plottati in funzione della frequenza in due diagrammi distinti (diagramma del modulo e diagramma della fase)



Si presti attenzione al fatto che i diagrammi di Bode dei moduli riportano in ordinata il valore di  $M(\omega)$  **espresso in dB**

$$M_{db}(\omega) = 20 \log_{10} M(\omega)$$

$$M(\omega) = 10^{\frac{M_{db}(\omega)}{20}}$$

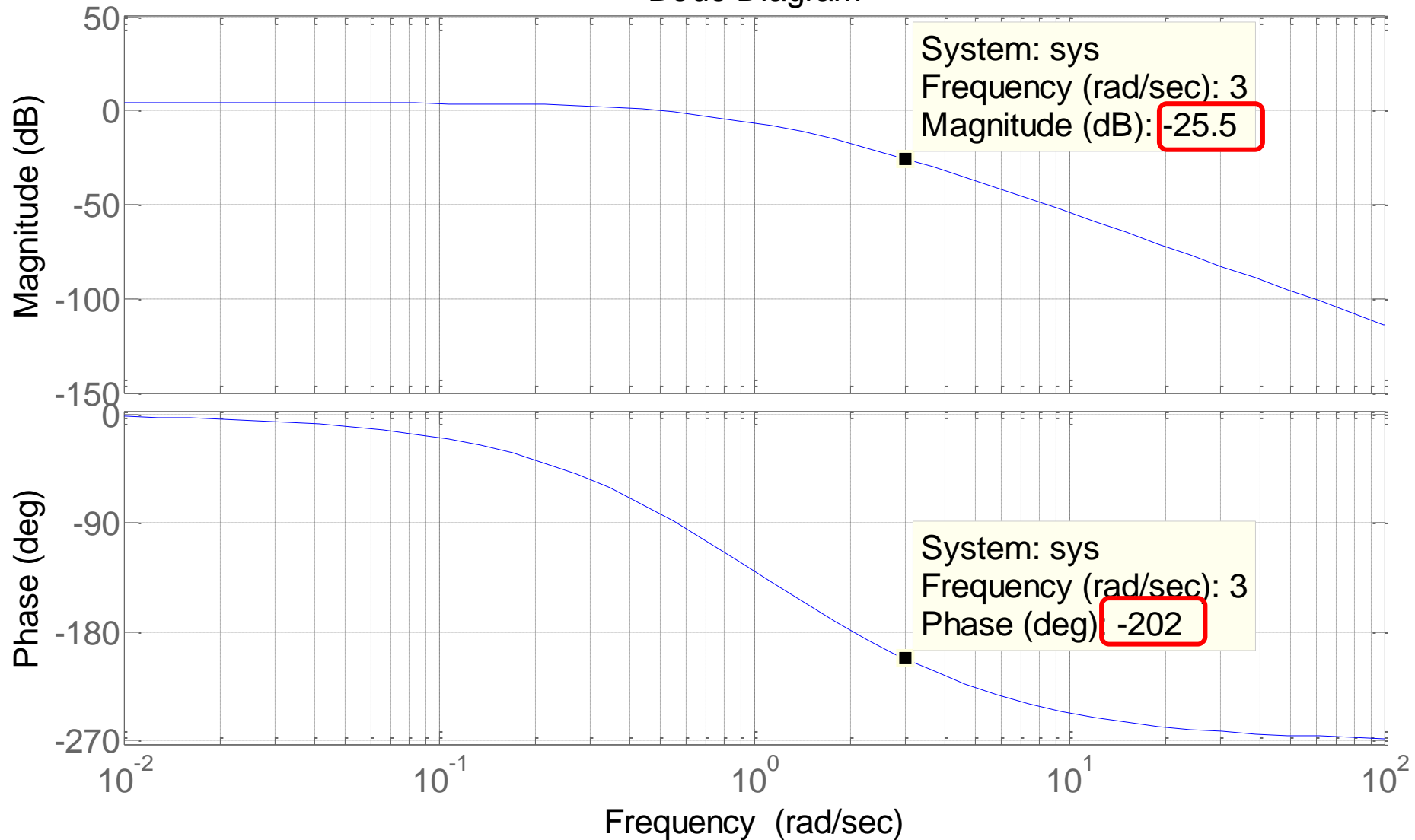
**Valore naturale**      **Valore in dB**

$M$	$M_{db}$
0.01	-40
0.1	-20
1	0
10	20
100	40

```
numF=2;  
denF=poly([-0.5 -1 -2.5]);  
bode(numF,denF),grid
```

$$G(j\omega) = \frac{2}{(j\omega + 0.5)(j\omega + 1)(j\omega + 2.5)}$$

Bode Diagram



**Il modulo, espresso in dB nel diagramma, deve essere convertito nel valore naturale**

$$M_{db} = 20 \log_{10} M \quad \Rightarrow \quad M = 10^{\frac{M_{db}}{20}}$$

$$|G(j3)|_{db} \cong -25.5db \quad \Rightarrow \quad |G(j3)| = 10^{\frac{|G(j3)|_{db}}{20}} \cong 10^{-\frac{25.5}{20}} \cong 0.053$$

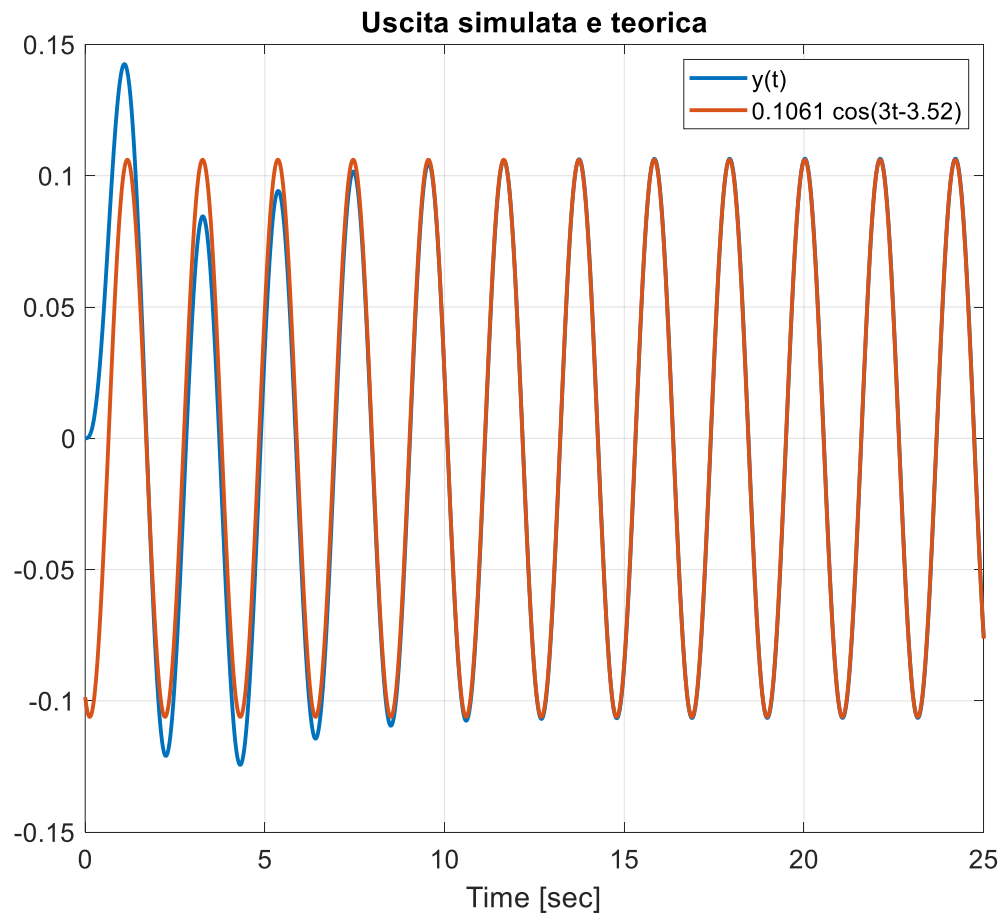
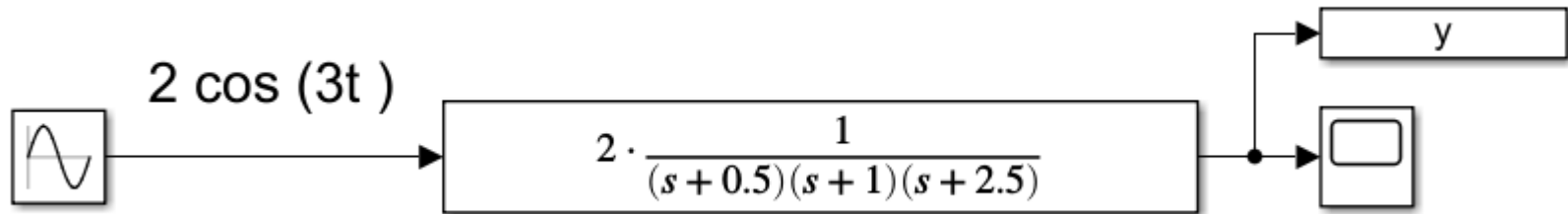
**Convertiamo le fasi in radianti**

$$\angle G(j3) = -202^\circ = -202^\circ \frac{2\pi}{360^\circ} \cong -3.52rad$$

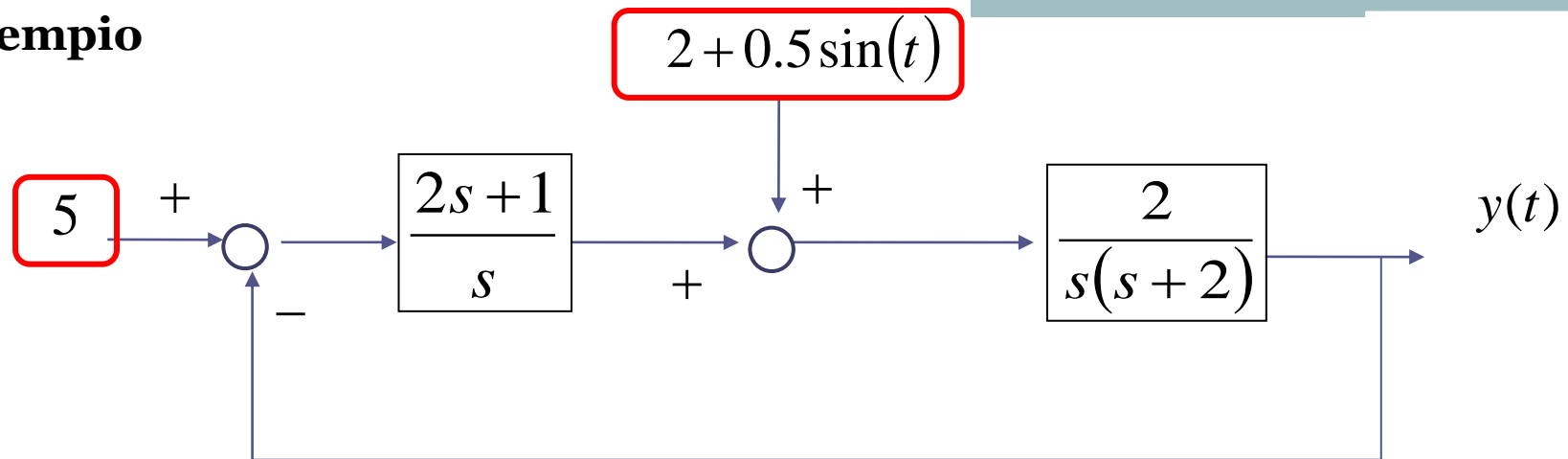
**Espressione dell'uscita**

$$y_{regime}(t) = 2 |G(j3)| \cos(3t + \angle G(j3))$$

$$y_{regime}(t) = 2 \cdot 0.053 \cdot \cos(3t - 3.52) = 0.1061 \cos(3t - 3.52)$$



## Esempio

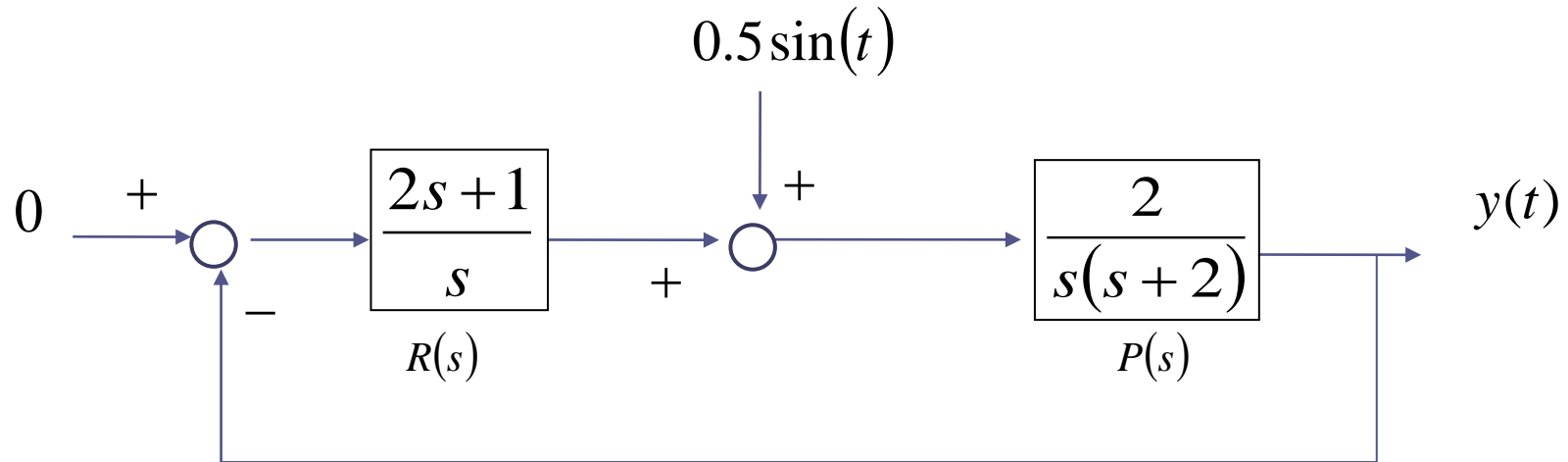


Il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile (analizzato in un esempio precedente)

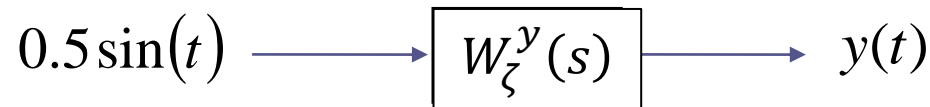
Analizziamo l'uscita a regime associata al set point: PMI  $y(t) \rightarrow 5$

Analizziamo l'uscita a regime associata alla componente costante del disturbo PMI  $y(t) \rightarrow 0$

Per quanto riguarda la componente sinusoidale del disturbo, facciamo riferimento al sistema semplificato



equivalente a



$$W_{\zeta}^y(s) = \frac{P(s)}{1+R(s)P(s)} = \frac{\frac{2}{s(s+2)}}{1 + \frac{(2s+1) \cdot 2}{s \cdot s(s+2)}} = \frac{2s}{s^2(s+2) + 2(2s+1)} = \frac{2s}{s^3 + 2s^2 + 4s + 2}$$

$$y_{regime}(t) = 0.5 \left| W_{\zeta}^y(j1) \right| \sin \left( t + \angle W_{\zeta}^y(j1) \right)$$

Ci interessa valutare **la sola ampiezza**

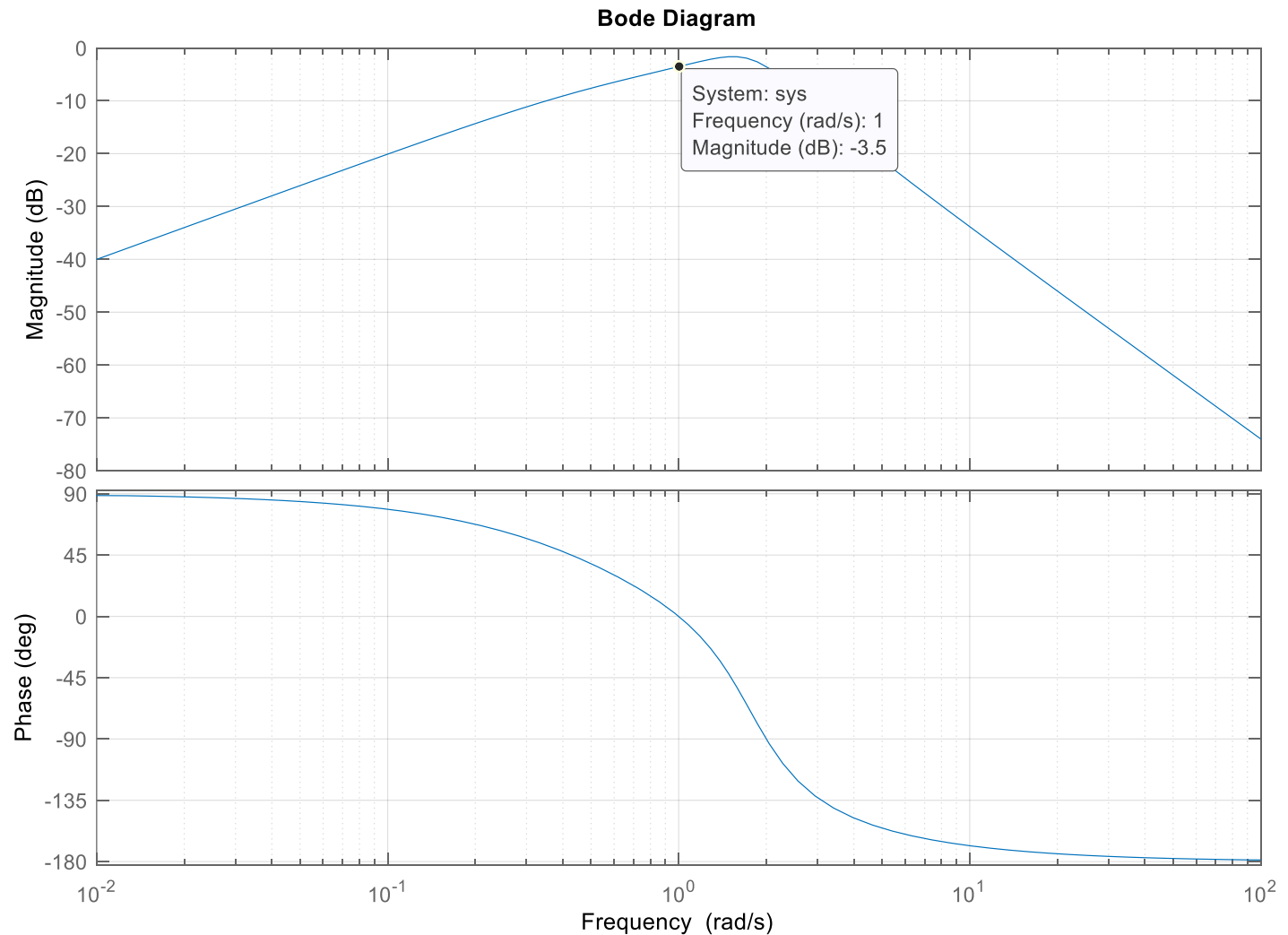
```
numF=[2 0];
denF=[1 2 4 2];
bode(numF,denF),grid
```

Valutiamo il diagramma di Bode del modulo  
alla pulsazione  $\omega=1$  rad/s del disturbo

$$W_{\zeta}^y(j\omega)$$

$$\left|W_{\zeta}^y(j\omega)\right|_{dB}$$

$$\angle W_{\zeta}^y(j\omega)$$



**Il modulo, espresso in dB nel diagramma, deve essere convertito nel valore naturale**

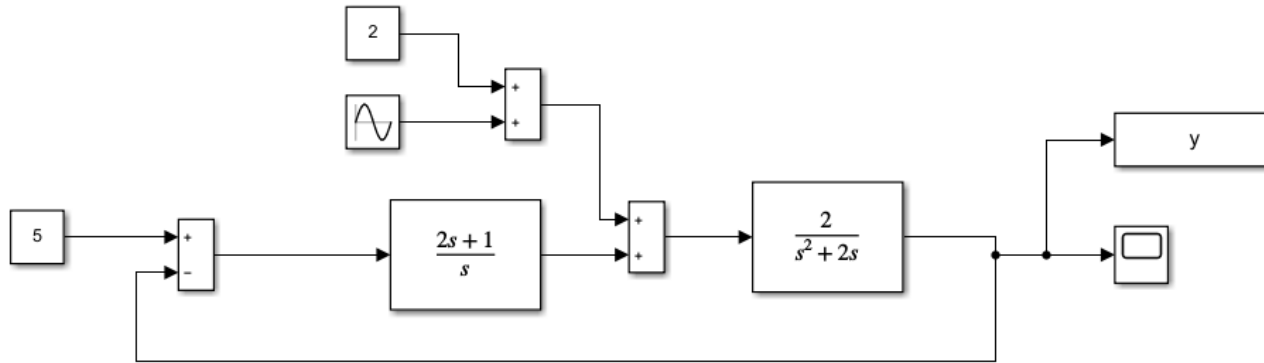
$$\left|W_{\zeta}^y(j1)\right|_{dB} \cong -3.5dB \qquad \left|W_{\zeta}^y(j1)\right| = 10^{\frac{\left|W_{\zeta}^y(j1)\right|_{dB}}{20}} = 10^{-\frac{3.5}{20}} \cong 0.66$$

$$y_{regime}(t) = 0.5 \left|W_{\zeta}^y(j1)\right| \sin\left(t + \angle W_{\zeta}^y(j1)\right)$$

La componente oscillatoria sull'uscita dovuta al disturbo ha ampiezza

$$0.5 \left|W_{\zeta}^y(j1)\right| \cong 0.5 \cdot 0.66 \cong 0.33$$

Sommando le varie componenti calcolate, l'uscita  $y$  tenderà complessivamente al valore costante 5 più una oscillazione di ampiezza 0.33 e frequenza 1 rad/s



L'uscita  $y$  tenderà al valore costante **5** più una oscillazione di ampiezza **0.33**

