L'assiomatica moderna

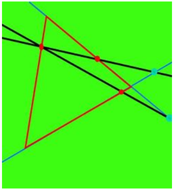
Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2023-24

Moritz Pasch (1843-1930)

Pasch: la critica ad Euclide

- Nelle *Lezioni sulla nuova geometria* (1882) Pasch osserva che gli *Elementi* di Euclide, per millenni modello paradigmatico di rigore nel metodo assiomatico, sono tutt'altro che impeccabili: alcune dimostrazioni di Euclide funzionano solo se si ammettono delle assunzioni implicite, che non seguono dagli assiomi euclidei.
- Tra queste, quello che sarà chiamato *assioma di Pasch*: una retta che "entra" un triangolo in un lato dovrà "uscirne" attraverso uno degli altri lati oppure il vertice opposto.
- Prosegue facendo vedere che la geometria euclidea tradizionale e la geometria proiettiva possono essere formulate su basi dimostrativamente rigorose.



David Hilbert (1862-1943)

L'interesse di Hilbert per la geometria

- Nel 1885 Hilbert consegue l'abilitazione a Königsberg e, sotto l'influenza di Gordan e Klein, inizia a occuparsi di teoria degli invarianti. Nel 1895 Klein lo chiama a Gottinga e i suoi interessi si orientano inizialmente sulla teoria dei numeri.
- Tuttavia, già dal 1891 era stato affascinato dal progetto di Wiener circa una trattazione assiomatica della geometria proiettiva; nel 1898 inizia a tenere corsi sui fondamenti della geometria.
- Nel 1899, Hilbert pubblica i *Fondamenti della geometria*, ove, sulla scia di Pasch, dà una fondazione assiomatica completa alla geometria euclidea tridimensionale, colmando certe lacune del sistema assiomatico di Euclide.

I *Fondamenti della geometria* (1)

- Gli assiomi hilbertiani si dividono in cinque gruppi: assiomi di collegamento (I), assiomi di ordinamento (II), assiomi di congruenza (III), assioma delle parallele (IV), assiomi di continuità (V).
- Gli *assiomi di collegamento* stabiliscono alcune relazioni elementari tra le nozioni di punto, retta e piano: ad es., per due punti passa esattamente una retta, su una retta ci sono sempre almeno due punti, ci sono almeno tre punti non allineati.
- Gli *assiomi di ordinamento* stabiliscono le proprietà della relazione "giacere fra"; stabiliscono che l'ordinamento dei punti su una retta è un ordine lineare denso.

I *Fondamenti della geometria* (2)

- Gli *assiomi di congruenza* stabiliscono le proprietà delle relazioni di congruenza tra segmenti e angoli, e il primo criterio di uguaglianza tra triangoli.
- L'*assioma delle parallele* è l'assioma euclideo (in una delle sue formulazioni equivalenti).
- Gli *assiomi di continuità* sono l'assioma di Eudosso-Archimede e un assioma che sancisce che l'insieme dei punti di una retta non può essere ampliato senza perdere almeno una delle proprietà espresse dagli assiomi precedenti.

La nuova concezione dell'assiomatica

- Per i geometri pre-hilbertiani (Riemann, Helmholtz, Klein), la geometria è ancora la scienza dello spazio reale, e la sua organizzazione deduttiva dipende strettamente da tale interpretazione privilegiata: le sue proposizioni fondamentali hanno un *contenuto* precisamente individuato.
- Per Hilbert, gli assiomi geometrici non esprimono nessun contenuto che non sia quello delle loro mutue relazioni di tipo puramente logico. Gli assiomi sono *definizioni implicite* dei concetti in essi contenuti. Qualunque sistema di enti che soddisfa gli assiomi ha lo stesso diritto di essere chiamato e inteso come costituito di punti, piani e rette. Non sono gli oggetti specifici che contano in geometria, ma le loro relazioni, le strutture che esse formano.
- Si ha insomma il passaggio da una concezione *categorica* e una *ipotetico-deduttiva* del metodo assiomatico.

Il problema della consistenza

L'arbitrarietà nella scelta degli assiomi ha un solo vincolo: occorre dimostrare che gli assiomi scelti non portino a contraddizione.Gottlob Frege, che adotta (solo per la geometria!), un punto di vista kantiano, parte da presupposti assolutamente antitetici e scrive a Hilbert:

> *Gli assiomi sono proposizioni [...] vere; ma che non vengono dimostrate perché la loro conoscenza scaturisce da una fonte di conoscenza di natura extralogica, che possiamo chiamare intuizione spaziale. Il fatto che gli assiomi siano veri ci assicura di per sé che essi non si contraddicono tra loro, e ciò non abbisogna di alcuna ulteriore dimostrazione.*

Hilbert ribatte:

> *Da quando ho cominciato a riflettere, scrivere e tenere conferenze su questo argomento, ho detto esattamente il contrario: se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi.*

Applicazione alle geometrie non euclidee (1)

- Max Dehn (1878-1952) consegue il dottorato a Gottinga nel 1899 sotto la guida di Hilbert.
- Sulla scorta dell'analisi assiomatica hilbertiana, mostra che l'equivalenza tra il valore della somma degli angoli interni di un triangolo uguale (rispettivamente, minore o maggiore) di un angolo piatto e l'esistenza di una (rispettivamente, più di una o nessuna) parallela condotta per un punto esterno a una retta data, dipende in modo cruciale dall'assioma di Eudosso-Archimede.
- Senza tale assioma, si ottengono due nuove geometrie in cui da un punto esterno a una retta si possono tracciare infinite parallele alla retta data, ma la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale o addirittura maggiore di un angolo piatto.

Applicazione alle geometrie non euclidee (2)

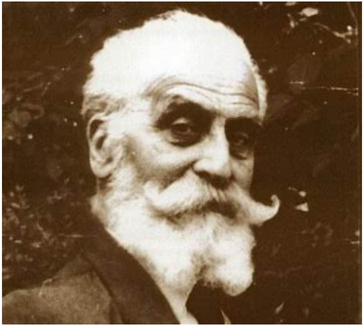
Tabella 2 La classificazione di Dehn delle geometrie piane.

La somma degli angoli interni di un triangolo è	**Rette parallele a una retta assegnata passanti per un punto dato**		
	Nessuna parallela	**Una parallela**	**Infinite parallele**
$> 2R$	Geometria ellittica	(Impossibile)	Geometria non legendriana
$= 2R$	(Impossibile)	Geometria euclidea	Geometria semi-euclidea
$< 2R$	(Impossibile)	(Impossibile)	Geometria iperbolica

La scuola americana

- Le idee di Hilbert esercitano una forte influenza su E.H. Moore, matematico statunitense che aveva studiato a Yale ma anche in Europa (a Berlino, sotto Weierstrass).
- Nel 1901, Moore tiene un corso a Chicago sui fondamenti della geometria e sul lavoro di Hilbert. Mostra come gli assiomi di Hilbert non siano *indipendenti*: alcuni di essi possono essere derivati dai rimanenti.
- Tra i suoi allievi c'è Oswald Veblen, che nel 1903 discute una tesi di dottorato nella quale semplifica ulteriormente il sistema hilbertiano, riducendolo a 12 assiomi.

Giuseppe Peano (1858-1932)



Peano e l'approccio astratto alla geometria

- Molte delle idee hilbertiane circa la nuova assiomatica erano state anticipate da Peano nell'opera *Principii di geometria logicamente esposti* (1889).
- Peano ritiene che la geometria abbia a che fare con la descrizione dello spazio esterno, ma che ci siano molte opzioni diverse per la scelta dei concetti primitivi, che non è necessario pretendere di definire.
- Il significato di concetti primitivi è stabilito dagli assiomi. Le uniche definizioni ammesse in una teoria sono quelle nominali, riguardanti i concetti che possiamo definire entro la teoria a partire dai primitivi.
- Queste definizioni devono essere *non creative*: attraverso di esse non debbono potersi dimostrare nuovi teoremi che senza di esse non era possibile dimostrare.

La scuola di Peano

- Alessandro Padoa (1868-1937), che dal 1906 al 1908 insegna al "Martini" a Cagliari, propone un criterio per provare la non definibilità di una nozione all'interno di una teoria assiomatica. I suoi interessi evolvono gradualmente dai fondamenti della geometria alla logica matematica.
- Giovanni Vailati (1863-1909) si occupa di matematica, ma anche di filosofia (avvicinandosi al pragmatismo americano), storia e didattica della matematica. Discute la distinzione tra assiomi e postulati in Euclide, rivaluta il lavoro di Saccheri e si oppone allo studio della geometria euclidea sui testi originali di Euclide previsto dai programmi di Luigi Cremona.
- Mario Pieri (1860-1913) dà un trattamento della geometria proiettiva puramente astratto e indipendente dall'intuizione. Fa ampio ricorso al formalismo logico di Peano, venendo elogiato da Russell, ma criticato da Peano per l'illeggibilità dei suoi scritti.

Corrado Segre (1863-1924)

Segre e le nuove geometrie

- Sulla scia di Giuseppe Veronese, Segre patrocina lo studio degli spazi di dimensione superiore, generalizzando la teoria degli operatori di proiezione dal caso tridimensionale al caso n-dimensionale.
- Assieme a Peano, è uno degli autori a cui si deve l'introduzione della nozione generale di *spazio vettoriale*.
- Per certi versi, però, Segre è l'opposto di Peano. L'enfasi di Peano è sul rigore logico, mentre per Segre le definizioni e le sistematizzazioni assiomatiche hanno un valore solo nella misura in cui portano alla scoperta di risultati matematici nuovi.

La scuola di Segre

- Gino Fano (1871-1952) anticipa sino dal 1892 la concezione hilbertiana degli enti geometrici, pur senza legarla necessariamente a un contesto assiomatico. Tenta però un'assiomatizzazione della geometria delle dimensioni superiori e anche una dimostrazione dell'indipendenza del suo sistema di assiomi.
- Federigo Enriques (1871-1946) sposa in pieno la concezione hilbertiana e la applica all'assiomatizzazione della geometria proiettiva. Alcuni suoi lavori vengono tradotti in tedesco da Klein stesso, che elogia la chiarezza e l'abilità espositiva di Enriques e degli altri geometri italiani.
- Beppo Levi (1875-1961), che insegna all'Università di Cagliari dal 1906 al 1910, si occupa di geometria algebrica e fondamenti della geometria. Recentemente, R. Bruni ha richiamato l'attenzione sulla sua analisi dei paradossi insiemistici.