Il programma di Erlangen

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2023-24

La ricezione delle geometrie non euclidee

- Dopo la morte di Gauss nel 1855, l'esame dei suoi taccuini inediti rivela il suo interesse e sostegno per le geometrie non euclidee, oltre che la sua approvazione per il lavoro di Lobačevskij e Bolyai.
- Nel 1867, Hoüel traduce in francese le opere di Lobačevskij e Bolyai. Questo ne accresce enormemente l'influenza: Beltrami, ad esempio, legge Lobačevskij per la prima volta nella traduzione di Hoüel.
- Nel 1870, G. Darboux e J. Hoüel fondano il *Bulletin des sciences mathématiques* per portare all'attenzione della comunità matematica francese le recenti scoperte matematiche fatte all'estero.

Il declino del kantismo

- Nella prima metà dell'Ottocento l'idealismo tedesco sostituisce il kantismo come filosofia dominante, ma questa svolta non ha grande influenza sull'approccio dominante alle questioni filosofiche relative a spazio e geometria.
- Dopo il 1830 inizia a crescere (soprattutto nelle nascente disciplina della psicologia) l'influenza di Herbart, pensatore assai critico delle idee kantiane circa lo spazio e il tempo. Riemann cita Herbart come l'autore che lo ha più profondamente influenzato in ambito filosofico.
- Questi fattori contribuiscono alla rimozione del "diktat kantiano" contro le geometrie non euclidee.

Johann Friedrich Herbart (1776-1841)

Herbart critico di Kant

- Herbart critica la teoria kantiana dello spazio e del tempo come forme a priori della sensibilità. Vuole superare la soggettività delle forme dell'esperienza che Kant fondava nella facoltà conoscitiva e metterne per contro in luce il carattere *dato*.
- Rifiutando l'idea di un'attività spontanea del soggetto che unifica il molteplice, Herbart non vede alcuna giustificazione di qualcosa come una sintesi a priori: la certezza della conoscenza dipende piuttosto dal suo contenuto, da ciò che accade e si dà.
- Il concetto di spazio è per Herbart non innato, bensì *acquisito*: "un concetto educato, persino artificiale":

> *La mano del bambino apprende ad afferrare, l'occhio apprende a dirigersi nel modo appropriato. L'adulto, invece, ottiene involontariamente ciò che ha appreso. La pura percezione sensibile del bambino è oscurata dalle aggiunte mescolatevi dall'educazione.*

Christian Felix Klein (1849-1925)

Klein ad Erlangen

- Dopo aver lavorato come assistente di Plücker a Bonn e poi a Gottinga, in seguito a viaggi a Berlino (dove segue i corsi di Weierstrass e Kummer) e a Parigi, nel 1872 viene nominato professore ordinario ad Erlangen.
- Gli viene richiesto, come da prassi, di scrivere un saggio da presentare in una pubblica lezione alla Facoltà. Klein sceglie di fare una panoramica sulle direzioni della ricerca geometrica contemporanea in vista di una loro unificazione, che diverrà noto come *programma di Erlangen*.
- Nella lezione sottolinea anche l'importanza della matematica applicata, come ponte verso scienza e tecnologia; la necessità per un matematico di coltivare la percezione visiva, anche attraverso il disegno, l'uso di modelli e lo studio della geometria descrittiva; l'importanza delle lezioni di matematica, sia specialistiche che divulgative.

Il panorama delle geometrie

- Per Klein, nell'Ottocento la geometria era diventata troppo frammentaria: oltre alla geometria euclidea, c'erano le diverse geometrie non euclidee, la geometria descrittiva, la geometria proiettiva, ed iniziavano ad affacciarsi anche la geometria affine di Möbius e la geometria inversiva di Magnus.
- Intende fornire una cornice unificante dove tutte queste geometrie possano essere sussunte.

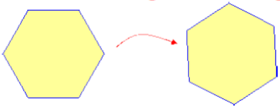
Il programma di Erlangen di Klein (1)

- La geometria è vista da Klein come lo studio degli *invarianti*, ovvero di quelle proprietà delle figure che restano inalterate dopo l'applicazione di una trasformazione geometrica. Chiaramente, cambiando la classe delle trasformazioni geometriche considerate cambiano anche gli invarianti.
- L'idea di Klein è che ogni geometria (euclidea, iperbolica, sferica, proiettiva, affine, ecc.) sia caratterizzata dalla classe delle trasformazioni che definiscono il "movimento senza deformazione" (che differenziano i cambiamenti di stato dai cambiamenti di posizione) e quindi abbia anche invarianti diversi.
- La geometria euclidea, ad esempio, è caratterizzata dalle *trasformazioni rigide* o *isometrie* (simmetrie, rotazioni, traslazioni) che preservano lunghezze, ampiezze angolari, aree ecc.
- Come si possono confrontare tra loro le diverse geometrie e magari mostrare che una di esse è un caso particolare di un'altra?

Il programma di Erlangen di Klein (2)

Isometrie

Invariante: la congruenza delle figure

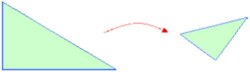


Sono proprietà invarianti le lunghezze e l'estensione delle superfici.

Le isometrie hanno come invarianti tutte le proprietà delle figure.

Similitudini

Invariante: la forma delle figure



Si conservano le ampiezze degli angoli (e quindi il parallelismo e la perpendicolarità) e il rapporto tra i segmenti corrispondenti (rapporto di similitudine).

Corso iper-accelerato di teoria dei gruppi (1)

Definition

Un *gruppo* è un'algebra $\mathbf{G} = \left(G, \cdot, ^{-1}, 1\right)$ di tipo $(2, 1, 0)$ tale che per ogni $a, b, c \in G$ si ha:

1. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
2. $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$;
3. $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$.

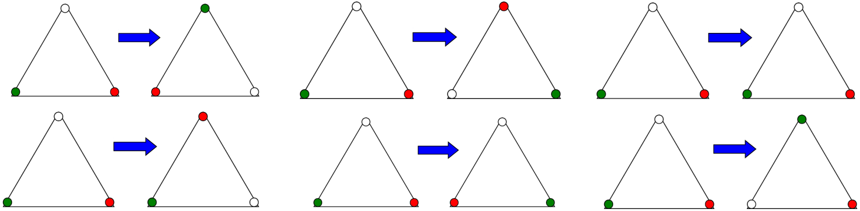
Definition

Sia $\mathbf{G} = \left(G, \cdot, ^{-1}, 1\right)$ un gruppo. Un gruppo $\mathbf{H}$ si dice un *sottogruppo* di $\mathbf{G}$ se $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$ e H è chiuso rispetto alle operazioni di $\mathbf{G}$.

Example

Sono esempi di gruppo:

- I numeri interi, oppure i razionali, oppure i reali (rispetto all'operazione di addizione);
- I razionali diversi da 0 (rispetto all'operazione di moltiplicazione);
- I vettori del piano euclideo (o di qualunque spazio euclideo R^n);
- Le isometrie del triangolo equilatero:



Corso iper-accelerato di teoria dei gruppi (3)

	I	**120**	**240**	**S**	**A**	**D**
I	I	120	240	S	A	D
120	120	240	I	A	D	S
240	240	I	120	D	S	A
S	S	D	A	I	240	120
A	A	S	D	120	I	240
D	D	A	S	240	120	I

La geometria come gruppo di trasformazioni

- Le trasformazioni caratteristiche di ciascuna delle geometrie sopra considerate formano un gruppo.
- Inoltre, il gruppo delle isometrie di R^3 (geometria euclidea), quelli delle trasformazioni associate con le geometrie non euclidee, e quello delle trasformazioni affini sono *sottogruppi* del gruppo delle proiezioni (geometria proiettiva).
- La geometria proiettiva ha quindi uno status privilegiato all'interno della pluralità di geometrie, perché ricomprende sotto di sé tutte le altre.

Questioni esegetiche

- L'importanza del programma di Erlangen è stata valutata diversamente dagli studiosi successivi.
- Garrett Birkhoff sostiene che l'opera di Klein è stata determinante per affermare l'importanza della nozione di gruppo ed estenderla dal suo terreno originario (la teoria delle soluzioni di equazioni algebriche polinomiali) al resto della matematica. Ritiene inoltre che abbia contribuito ad una "svolta astratta" della geometria che si è pienamente manifestata nel XX secolo.
- Tom Hawkins ha invece un'opinione più riduttiva. L'affermazione della teoria dei gruppi tra il 1870 e il 1890, grazie ad autori come Jordan, Lie e Poincaré, non avviene entro la cornice del programma di Erlangen. Inoltre lo stesso Klein non va oltre una mera posizione programmatica, che non applica quando si dedica nella pratica allo studio di specifici problemi geometrici.