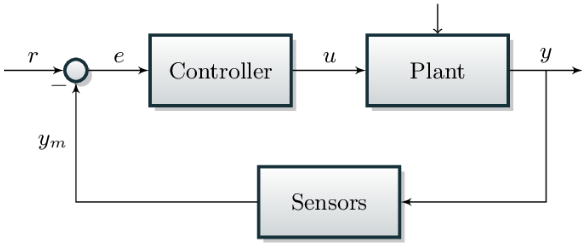


Controlli automatici

Tracciamento e interpretazione del luogo delle radici

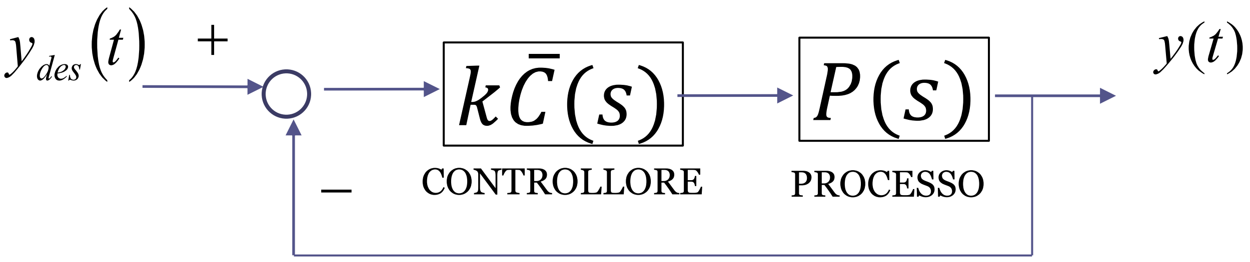
Prof. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Il luogo delle radici nasce per risolvere il seguente problema:

Dati due polinomi P1(s) e P2(s), determinare come variano, al variare del numero reale positivo k, le radici del polinomio

$$P(s) = P_1(s) + kP_2(s) \qquad k \in [0, \infty)$$

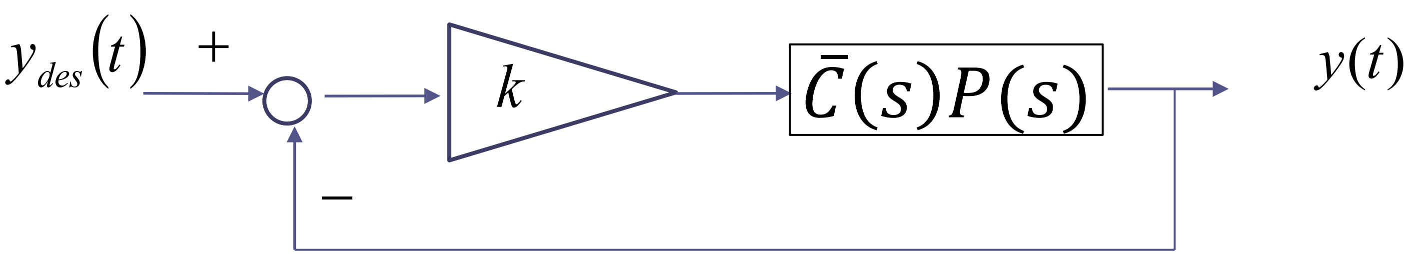
Nel contesto della teoria dei controlli, tale problema si incontra nel momento in cui si analizza il seguente sistema di controllo in retroazione

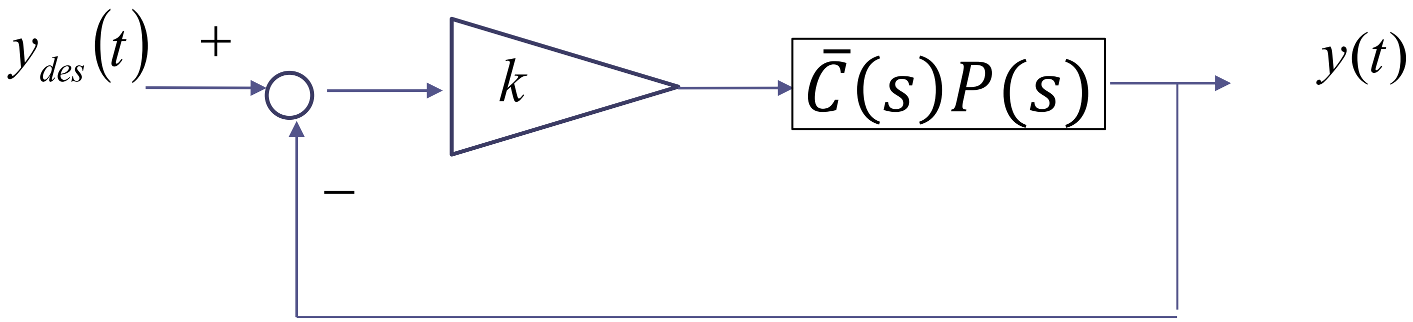


e ci si pone il problema di determinare la dipendenza dei poli della FdT a ciclo chiuso dal guadagno k, che è parte del controllore.

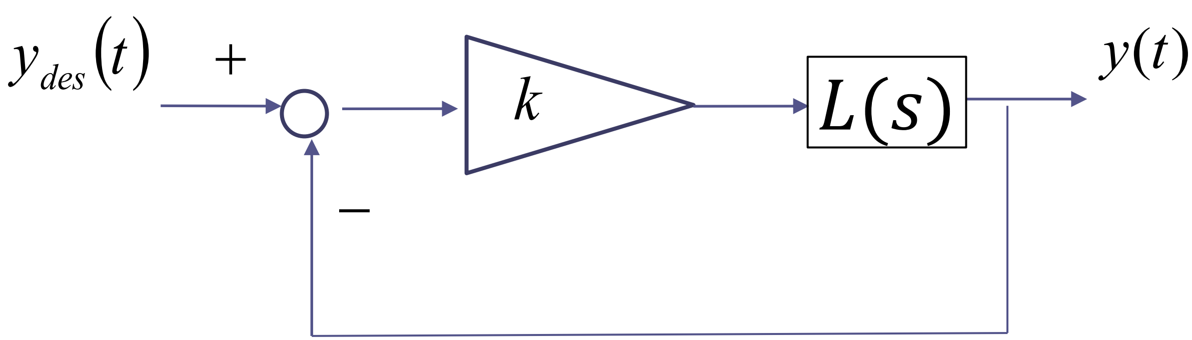
La FdT $\bar{C}(s)$ definisce i poli e gli zeri del controllore, e viene detta «parte dinamica» del controllore.

Il sistema di controllo può essere rappresentato in forma del tutto equivalente come segue





$$L(s) = \bar{C}(s)P(s)$$



FdT a ciclo chiuso fra il set point e l’uscita:

$$y_{des}(t) \longrightarrow \boxed{\frac{kL(s)}{1+kL(s)}} \longrightarrow y(t)$$

$$L(s) = \bar{C}(s)P(s)$$

Sia $L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)}$

Numeratore di L(s)

Denominatore di L(s)

La FdT a ciclo chiuso fra il set point e l’uscita è espressa in forma estesa come segue

$$W_{y_{des}}^{y}(s) = \frac{kL(s)}{1+kL(s)} = \frac{k\frac{N_L(s)}{D_L(s)}}{1+k\frac{N_L(s)}{D_L(s)}} = \frac{kN_L(s)}{D_L(s)+kN_L(s)}$$

I **poli** della FdT a ciclo chiuso sono le radici del "polinomio caratteristico"

$$P_{car}(s) = D_L(s) + kN_L(s)$$

che può essere espresso nella forma

$$P_{car}(s) = P_1(s) + kP_2(s)$$

$$P_1(s) = D_L(s)$$

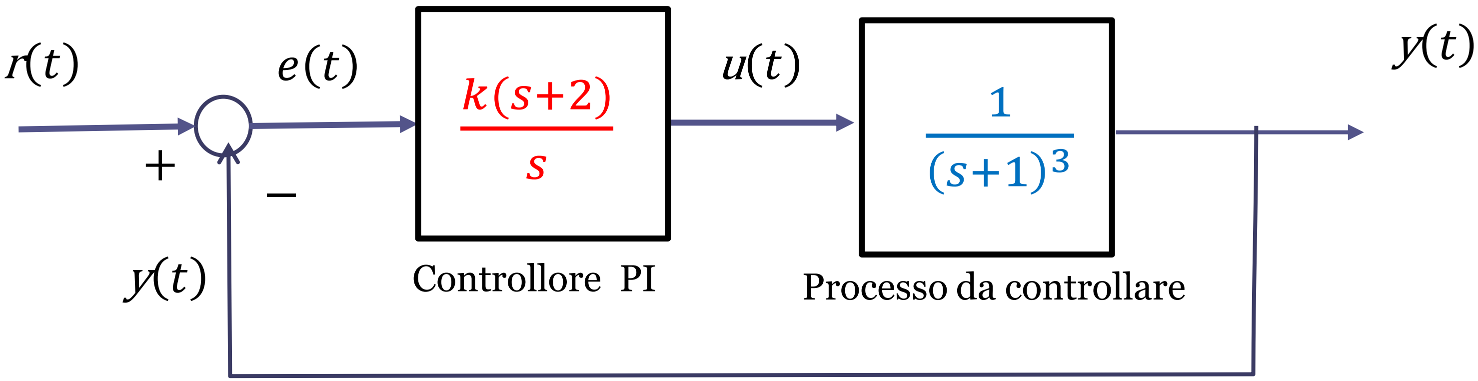
$$P_2(s) = N_L(s)$$

Al fine di poter scegliere adeguatamente il valore del guadagno k onde garantire che il sistema di controllo sia as. stabile a ciclo chiuso e caratterizzato da prestazioni adeguate (ad esempio, esente da oscillazioni), risulta fondamentale comprendere come il guadagno k influenzi la posizione nel piano dei poli della FdT a ciclo chiuso, cioè le radici del polinomio caratteristico.

Lo scopo del Luogo delle Radici (LdR) è esattamente quello di caratterizzare in maniera semplice (in forma grafica) la dipendenza dei poli della FdT a ciclo chiuso dal guadagno k.

NB Gli zeri della FdT a ciclo chiuso non dipendono dal guadagno k, e sono sempre costituiti dagli zeri del controllore + gli zeri del processo.

Esempio



FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita

$$W_r^y(s) = \frac{\frac{k(s+2)}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^3}}{1+\frac{k(s+2)}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^3}} = \frac{k(s+2)}{s(s+1)^3+k(s+2)}$$

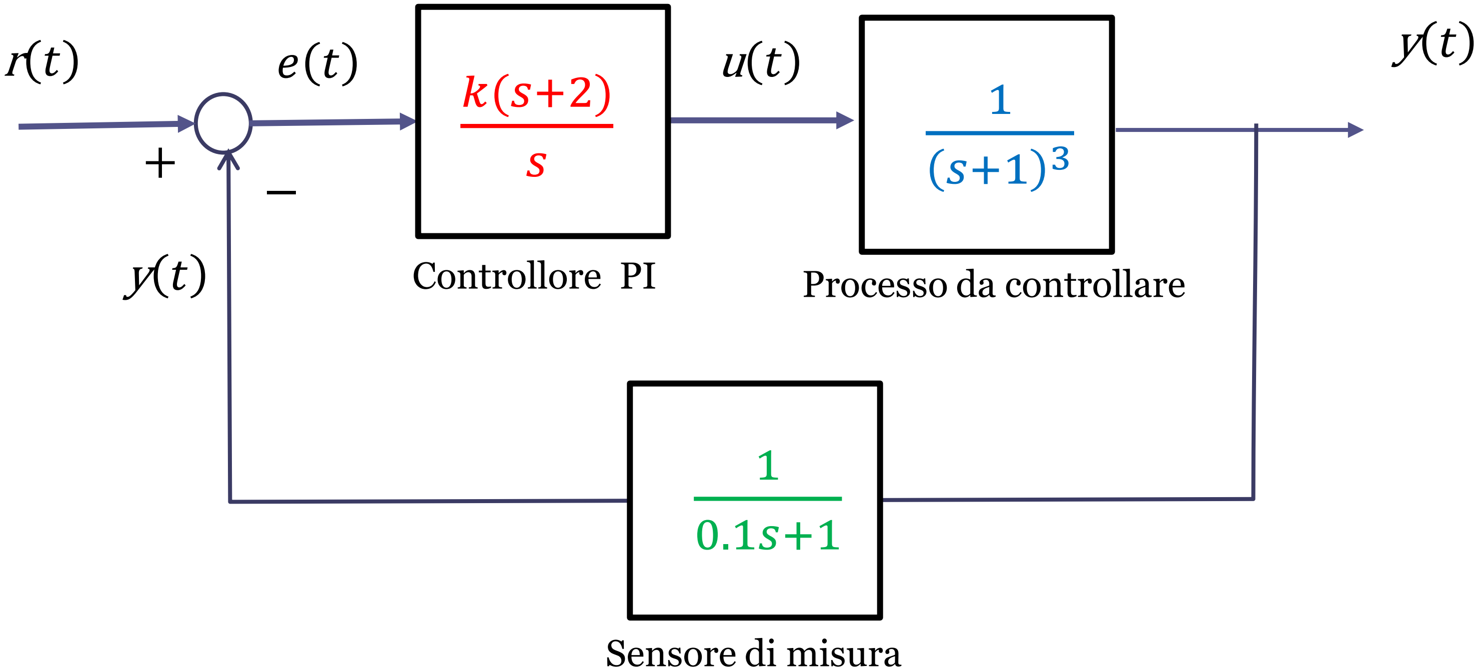
Polinomio caratteristico

$$P_{car}(s) = s(s+1)^3 + k(s+2)$$

I poli della $W_r^y(s)$ dipendono dal valore del guadagno k

Gli zeri invece sono fissi e indipendenti da k (in questo caso abbiamo lo zero del regolatore)

Esempio Una simile espressione per il polinomio caratteristico si deriva anche per sistemi di controllo a retroazione non unitaria



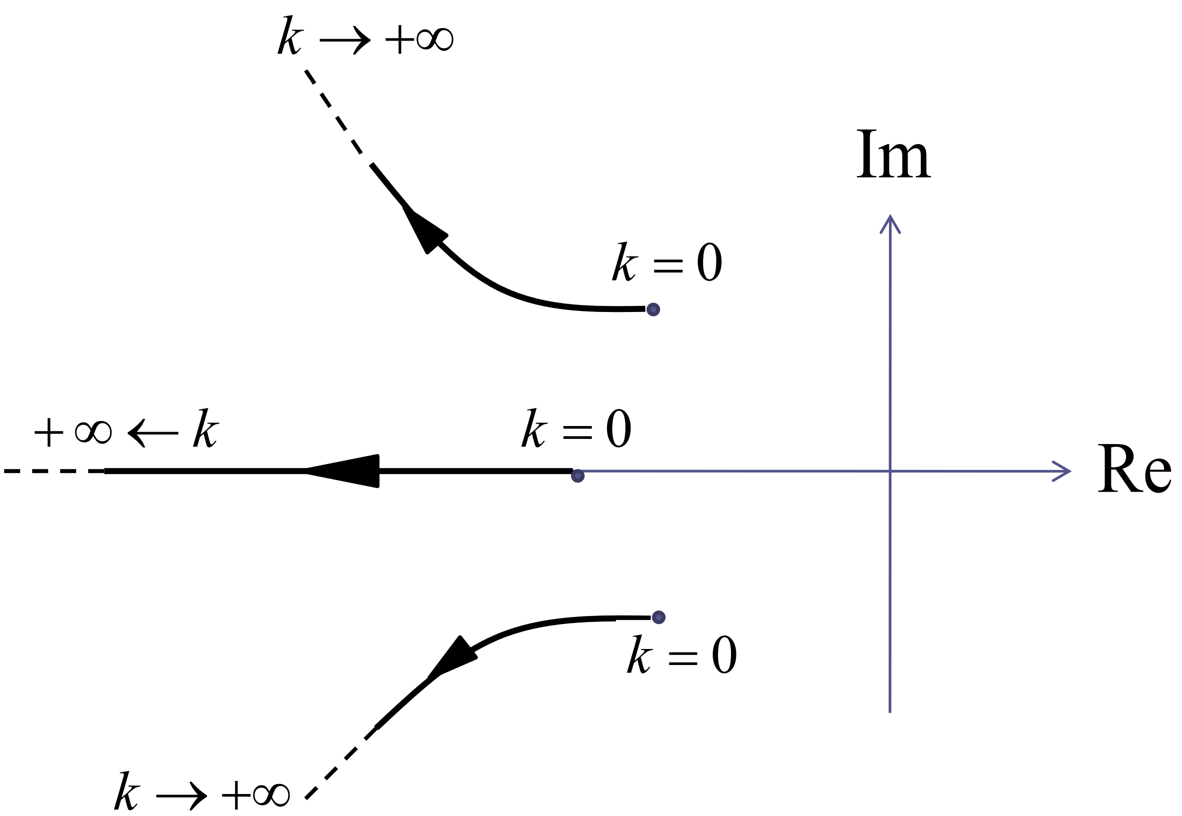
$$W_r^y(s) = \frac{\frac{k(s+2)}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^3}}{1+\frac{k(s+2)}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^3} \cdot \frac{1}{0.1s+1}} = \frac{k(s+2)}{s(s+1)^3(0.1s+1)+k(s+2)}$$

$$P_{car}(s) = s(s+1)^3(0.1s+1) + k(s+2)$$

Il LdR è una costruzione grafica che consiste nell'insieme delle "traiettorie" che i poli a ciclo chiuso (le n radici del polinomio $P_{car}(s)$) percorrono nel piano complesso quando il guadagno k varia tra zero e infinito.

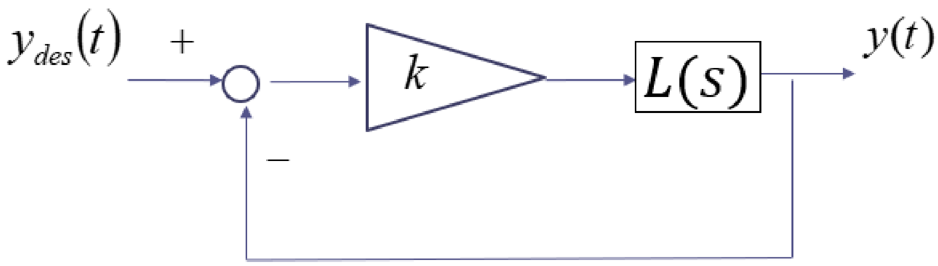
Si avranno pertanto n curve parametriche nel piano (chiamate «rami» del LdR), **orientate** secondo il verso crescente del parametro k

Es. Un possibile LdR per n=3



Questo ipotetico andamento per i rami del LdR ci rivelerebbe che il sistema di controllo in esame è asintoticamente stabile a ciclo chiuso per qualunque valore di k, e inoltre il sistema mostra una risposta oscillatoria per qualunque valore di k

Operativamente, per tracciare il LdR è conveniente riferirsi alla seguente rappresentazione



$$L(s) = \bar{C}(s)P(s)$$

in cui $L(s)$ è parametrizzata nella maniera seguente (fattorizzazione poli-zeri, o "PZ")

$$L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)} = \frac{\bar{k}(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)}$$

$\bar{k}$ è il guadagno in alta frequenza della L(s)

$$P_{car}(s) = D_L(s) + kN_L(s)$$

$$P_{car}(s) = \underbrace{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)}_{\text{Poli della FdT a ciclo aperto L(s)}} + k\bar{k}\underbrace{(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_m)}_{\text{Zeri della FdT a ciclo aperto L(s)}}$$

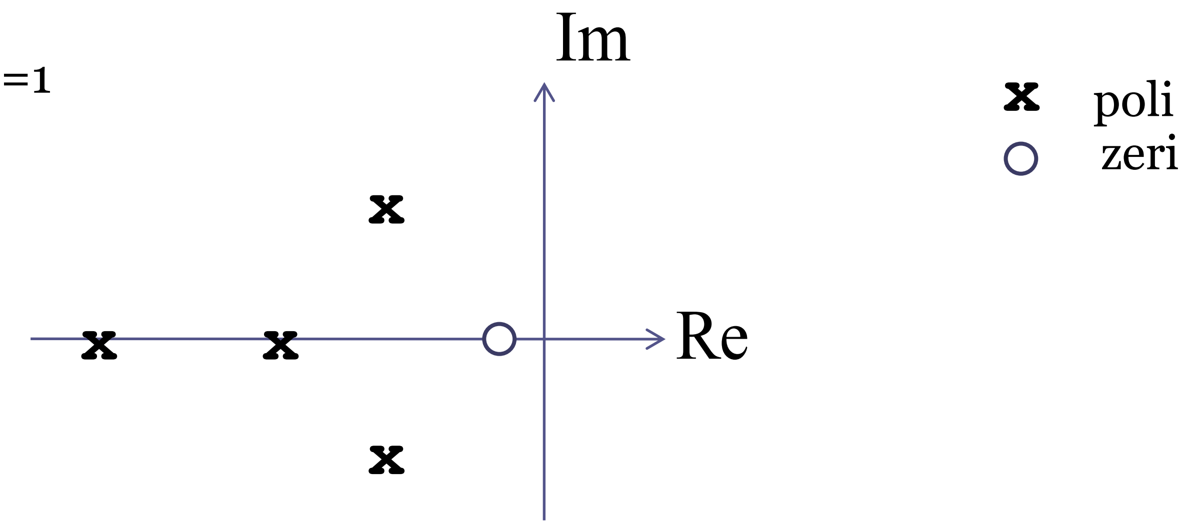
Grado n

Poli della FdT a ciclo aperto L(s)

Zeri della FdT a ciclo aperto L(s)

La costruzione del LdR ha inizio riportando sul piano complesso le posizione dei poli p_i e degli zeri z_i della FdT L(s) a ciclo aperto

Es. n=4 m=1



I punti di partenza (k=0) degli n rami del LdR sono gli n poli della FdT a ciclo aperto identificati in figura.

Ciò non deve stupire perché:

$$k = 0$$

$$P_{car}(s) = (s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n) + \cancel{k\bar{k}(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}$$

Il luogo ha n rami, dei quali, per $k \to +\infty$

m convergono verso gli zeri di L(s)

I restanti n-m convergono verso direzioni asintotiche (una "stella" di semirette che si dipartono dal punto dell'asse reale – detto CENTRO STELLA - avente ascissa x_s)

Sia il luogo delle radici che l'insieme delle direzioni asintotiche risultano essere simmetrici rispetto all'asse reale.

ASINTOTI

Ascissa del centro stella

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

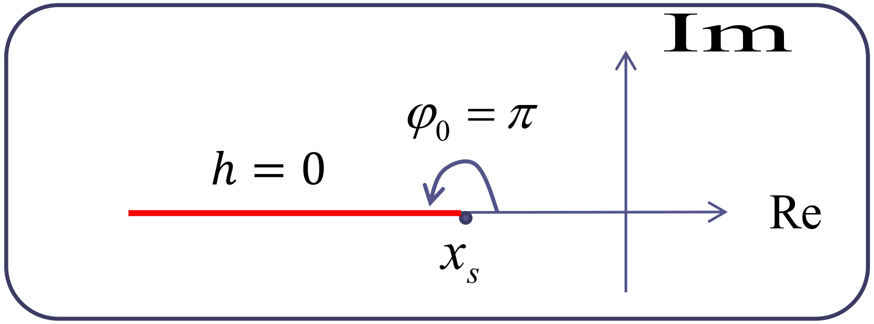
Angoli formati con l'asse reale positivo

$$\varphi_h = \frac{(2h+1)\pi}{n-m} \qquad h = 0,1,\dots,n-m-1$$

$$\varphi_h = \frac{(2h+1)\pi}{n-m} \qquad h = 0, 1, \dots, n-m-1$$

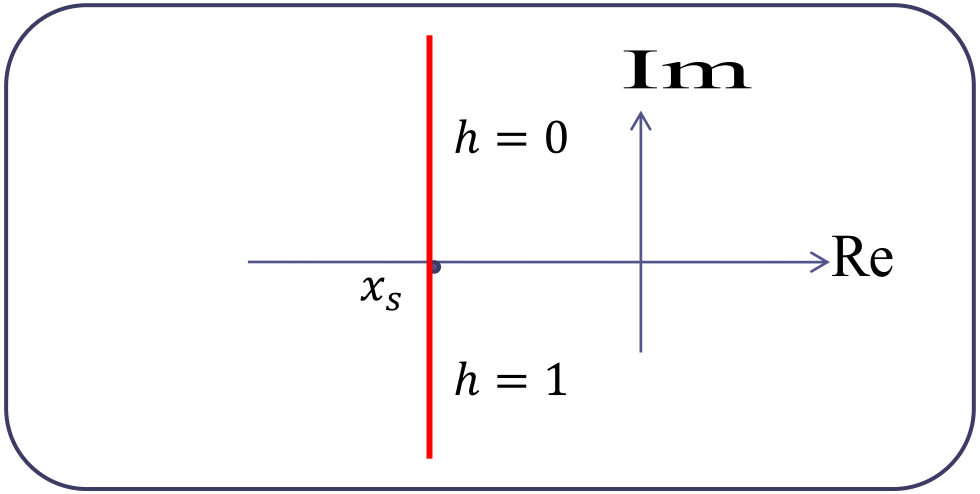
$n - m = 1$

$\varphi_0 = \pi$



$n - m = 2$

$\varphi_0 = \pi/2$
$\varphi_1 = 3\pi/2$



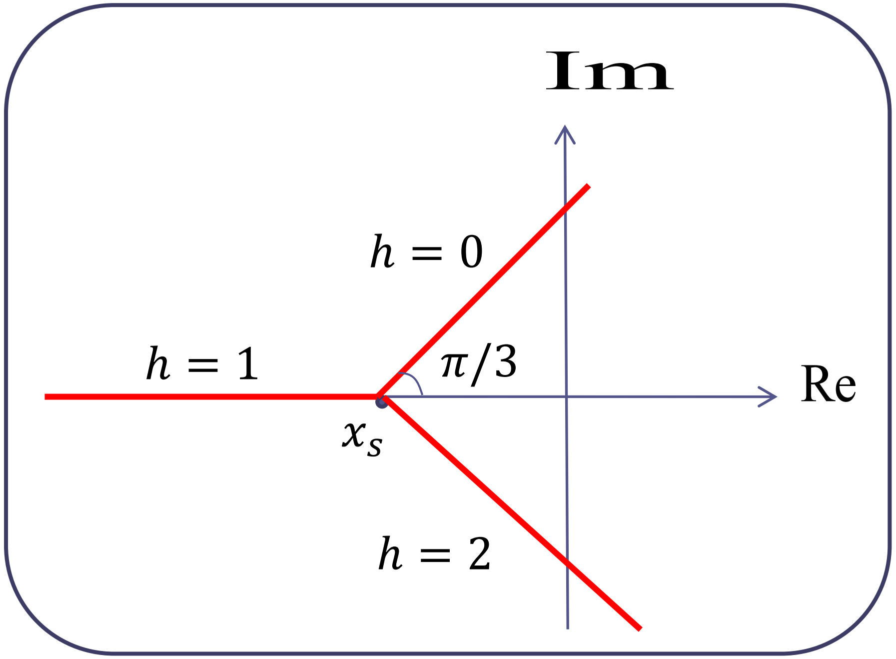
$$\boldsymbol{\varphi_h = \frac{(2h+1)\pi}{n-m}} \qquad \boldsymbol{h = 0, 1, \dots, n-m-1}$$

$n - m = 3$

$\varphi_0 = \pi/3$

$\varphi_1 = \pi$

$\varphi_2 = 5\pi/3$



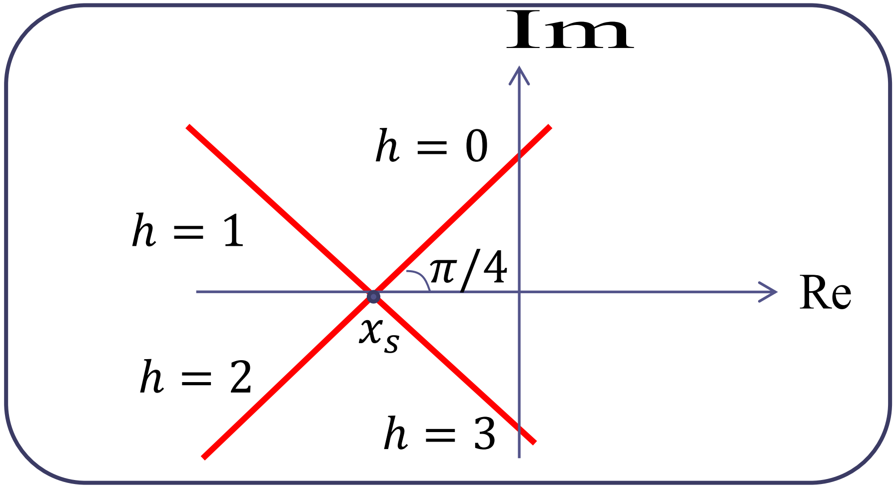
$n - m = 4$

$\varphi_0 = \pi/4$

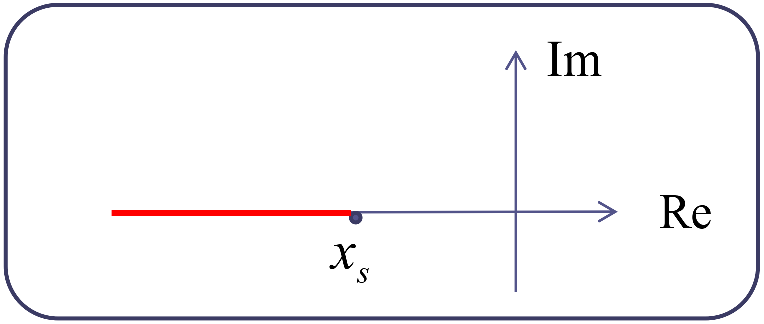
$\varphi_1 = 3\pi/4$

$\varphi_2 = 5\pi/4$

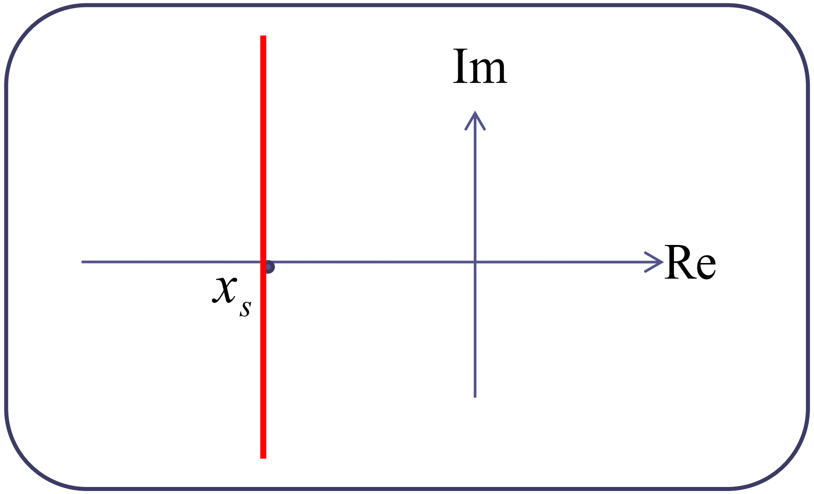
$\varphi_3 = 7\pi/4$



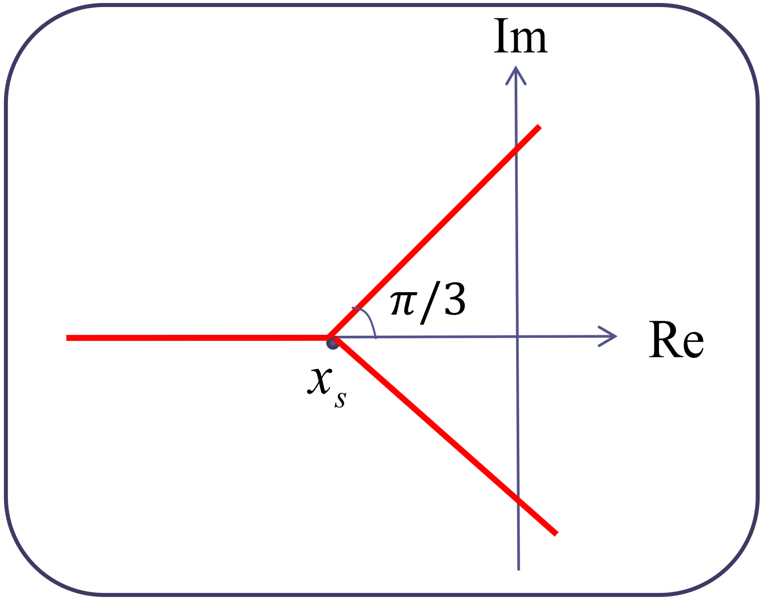
$$n - m = 1$$



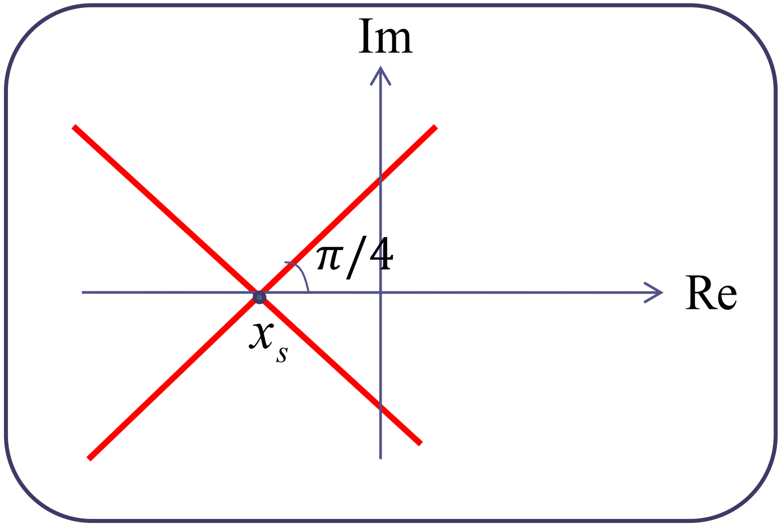
$$n - m = 2$$



$$n - m = 3$$



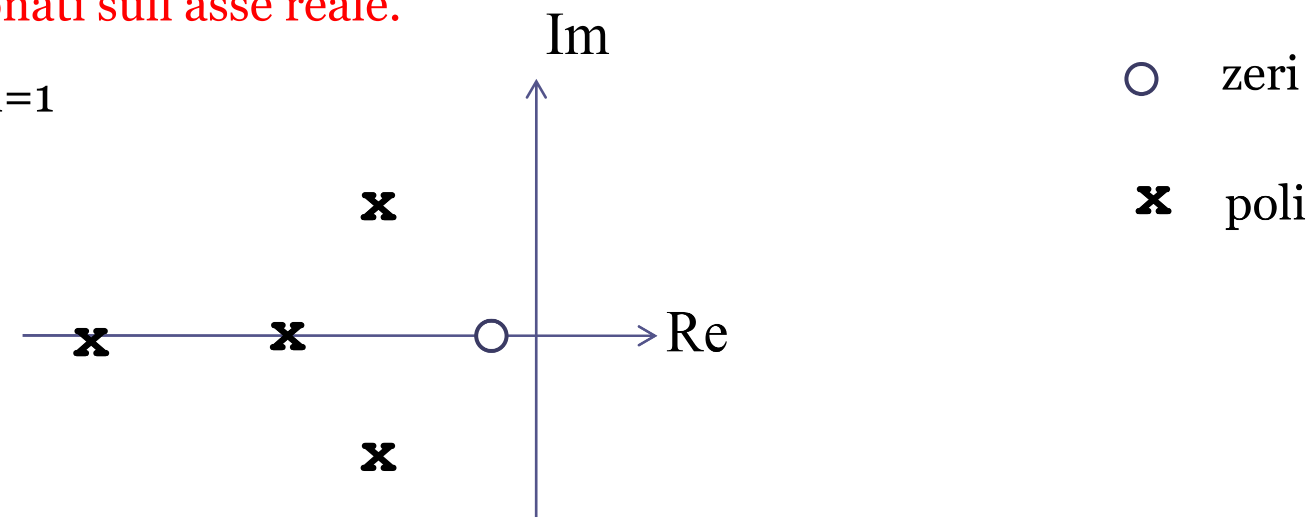
$$n - m = 4$$



Appartengono al luogo delle radici tutti i segmenti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero DISPARI di poli e zeri della FdT a ciclo aperto L(s)

N.B. Nell'applicazione di questa regola, si considerano unicamente i poli e gli zeri della L(s) posizionati sull'asse reale.

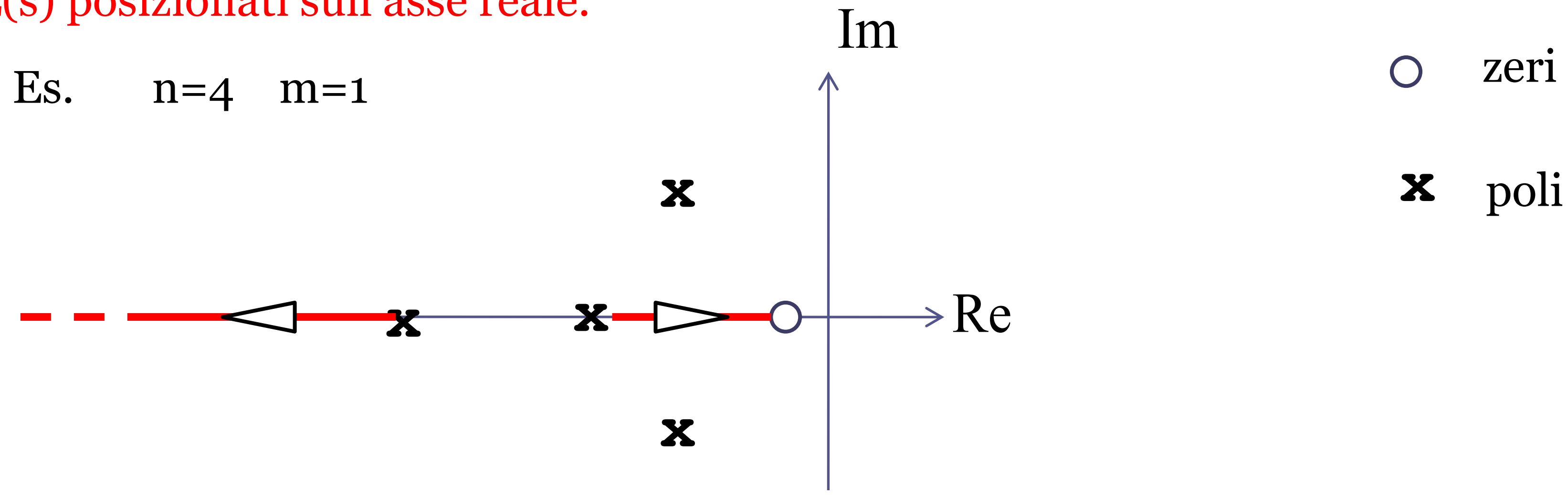
Es. $n=4$ $m=1$



Appartengono al luogo delle radici tutti i segmenti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero DISPARI di poli e zeri della FdT a ciclo aperto L(s)

N.B. Nell'applicazione di questa regola, si considerano unicamente i poli e gli zeri della L(s) posizionati sull'asse reale.

Es. n=4 m=1



I segmenti dell'asse reale identificati a seguito di tale proprietà sono tali che:

se uno di essi unisce un polo ad uno zero allora tale segmento costituisce uno dei rami del luogo delle radici.

se uno di essi parte da un polo e poi evolve verso meno infinito allora tale segmento costituisce uno dei rami del luogo delle radici.

Capita talvolta che due (o più) rami del luogo delle radici confluiscano l'uno verso l'altro fino a incontrarsi in un punto.

Tali punti vengono chiamati punti doppi.

I punti doppi s*, **se ve ne sono**, soddisfano la relazione

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s^* - p_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s^* - z_i} = 0$$

detta "equazione dei punti doppi"

NB L'equazione dei punti doppi può fornire anche soluzioni addizionali "non ammissibili" (in quanto non appartenenti al luogo delle radici) che vanno scartate.

L'insieme di tutte le "regole di tracciamento" date consente di definire in maniera pressoché completa l'andamento del luogo

Lista delle regole di tracciamento

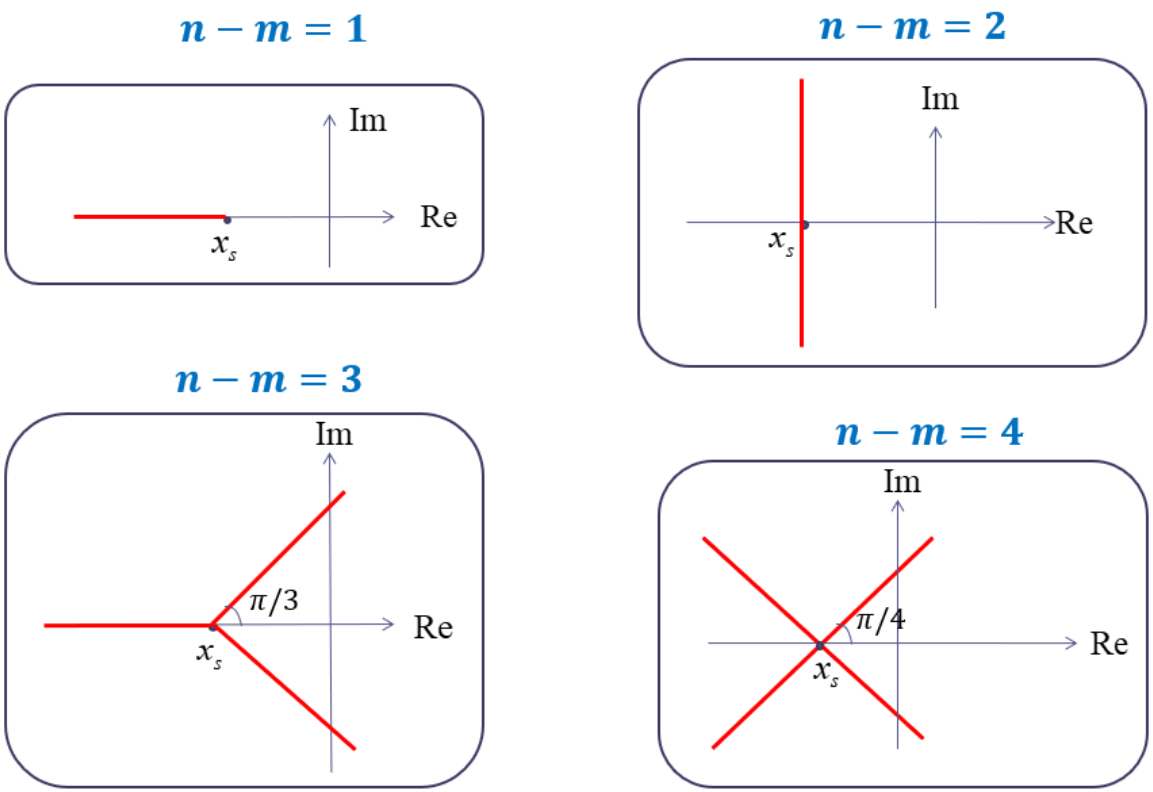
1. Si riporta sul piano complesso le posizione dei poli p_i e degli zeri z_i della L(s)

2. Gli n rami partono per k=0 dai poli p_i e convergono, per valori di k tendenti a $+\infty$, verso gli zeri z_i o verso le direzioni asintotiche

3. Centro stella degli asintoti

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

4. Direzioni asintotiche



5. Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all’asse reale.

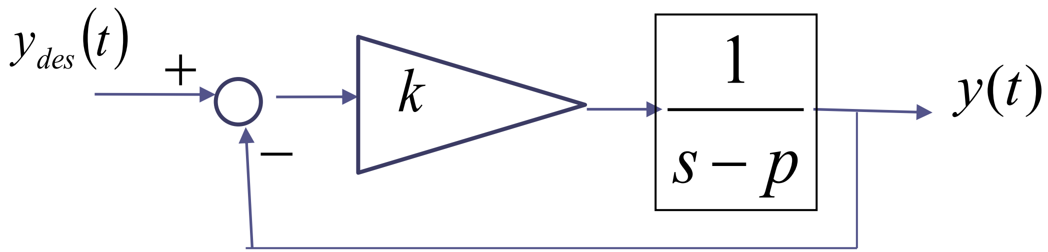
6. Appartengono al luogo delle radici tutti i segmenti dell’asse reale che lasciano alla propria destra un numero dispari di poli e zeri. Se qualcuno di tali segmenti unisce un polo ad uno zero, oppure se va da un polo verso meno infinito, allora è uno dei rami del luogo delle radici.

7. Equazione dei punti doppi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s^* - p_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s^* - z_i}$$

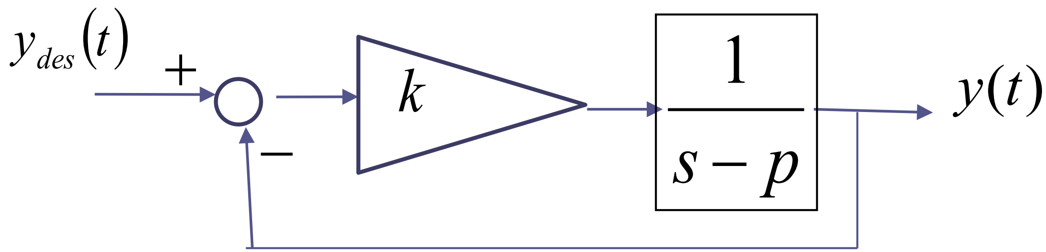
Esempio

$$L(s) = \frac{1}{s-p}$$



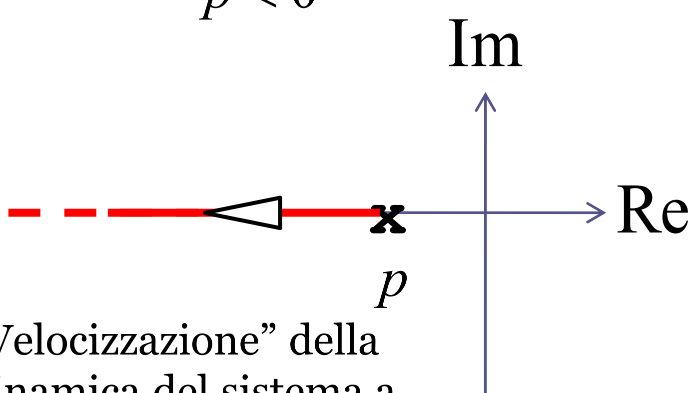
Esempio

$$L(s) = \frac{1}{s-p}$$



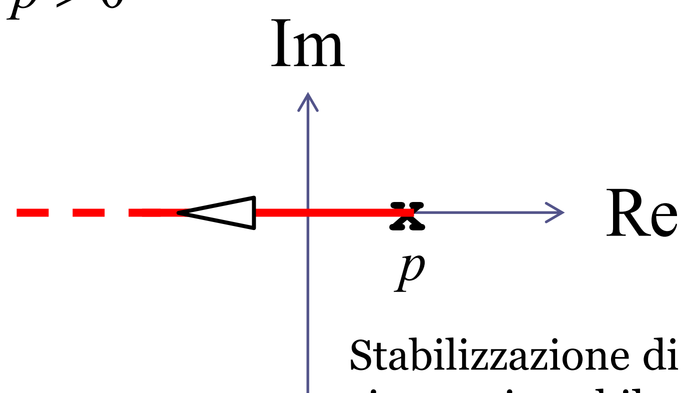
Due casi:

$p < 0$



"Velocizzazione" della dinamica del sistema a ciclo chiuso

$p > 0$



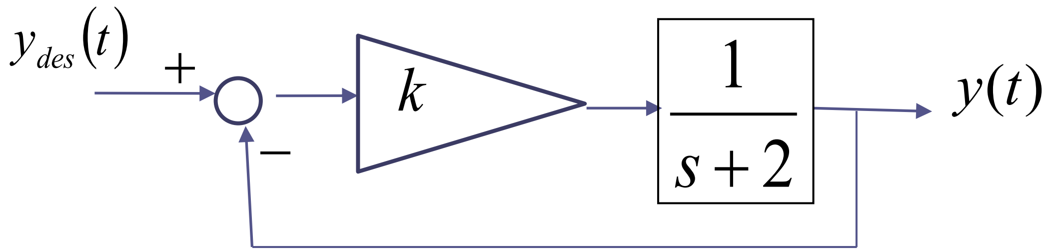
Stabilizzazione di un sistema instabile a ciclo aperto (k>p)

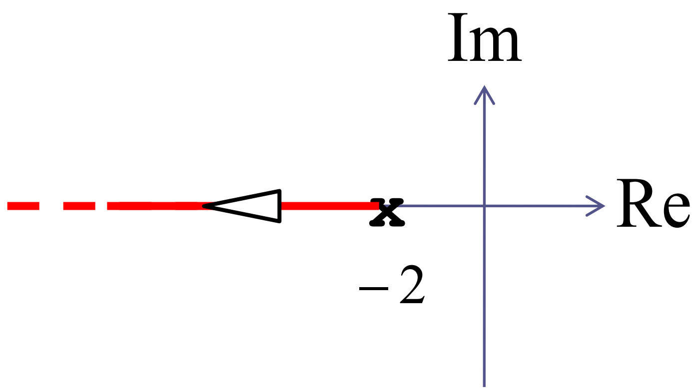
Appartiene al luogo il segmento alla sinistra del polo, ed è anche uno dei rami del luogo (l'unico ramo in questo caso)

$$W_{y_{des}}^{y}(s) = \frac{k}{s-p+k} \qquad P_{car}(s) = s - p + k \qquad s = p - k$$

Esempio (cont.)

$p=-2$ $\qquad L(s)=\dfrac{1}{s+2}$





Che conclusioni possiamo trarre?

Il sistema di controllo è sempre as. stabile a ciclo chiuso perchè il ramo è interamente contenuto nel semipiano sinistro

La risposta al gradino del sistema a ciclo chiuso è sempre monotona crescente perchè il polo si mantiene sempre sull'asse reale

Al crescere di k la risposta si velocizza (il tempo di assestamento si riduce)

FdT a ciclo chiuso

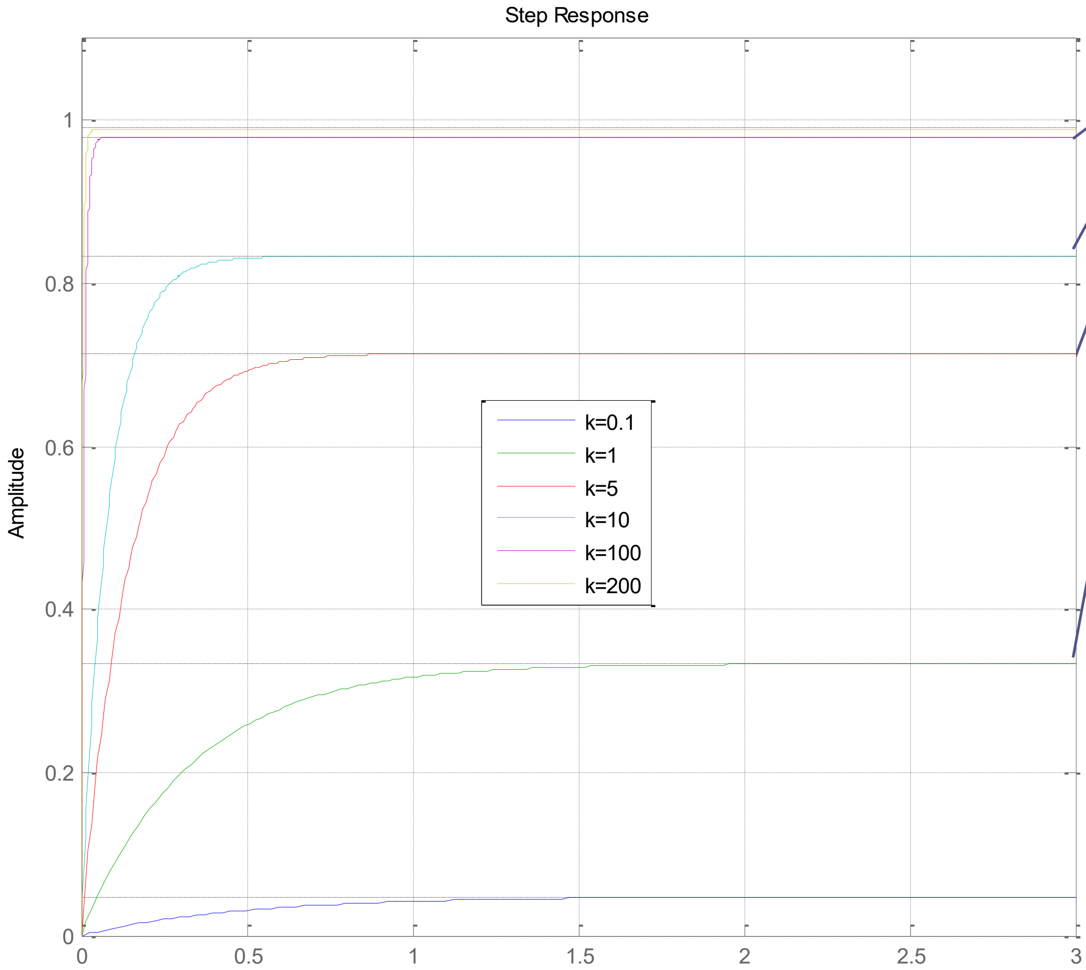
$$W_{y_{des}}^{y}(s)=\frac{k}{s+2+k}$$

Guadagno statico

$$g=W_{y_{des}}^{y}(0)=\frac{k}{2+k}$$

Il guadagno statico della FdT a ciclo chiuso dipende da k, e al crescere di k diventa sempre piu prossimo all'unità

Risposta al gradino per valori crescenti di k

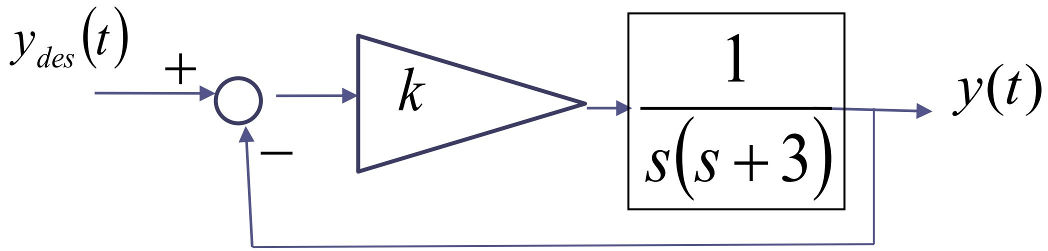


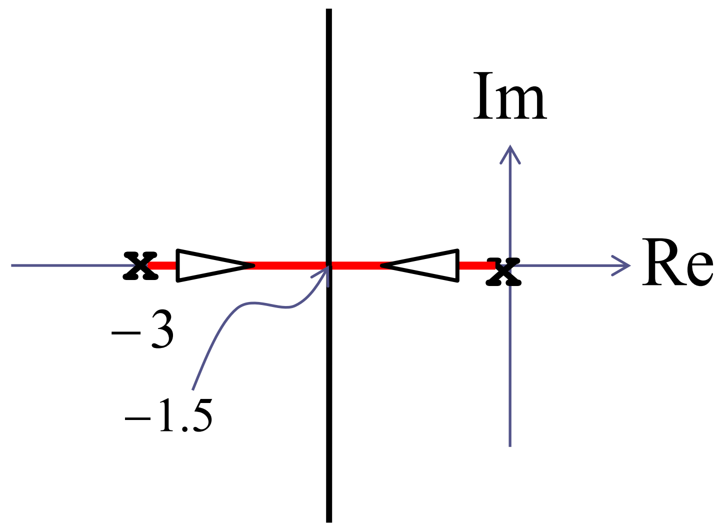
$$g = \frac{k}{2+k}$$

Il guadagno statico g determina il valore di regime della risposta al gradino unitario.

Es. 2

$$L(s)=\frac{1}{s(s+3)}$$



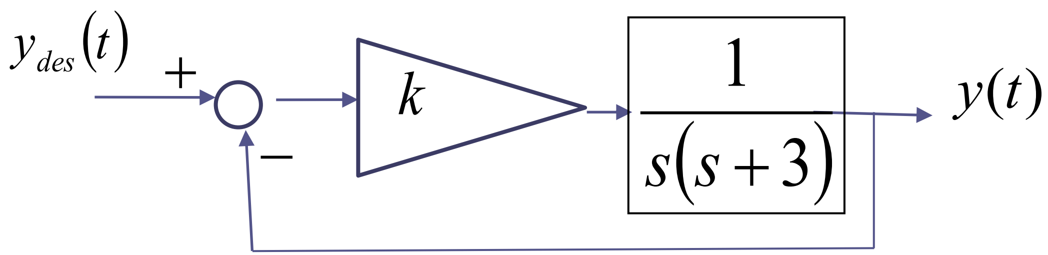


Appartiene al LdR il segmento che unisce i due poli

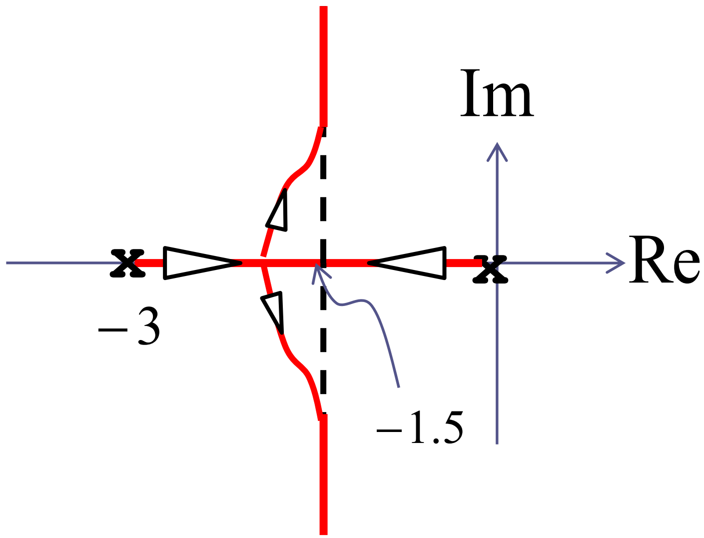
Ci sarà necessariamente un punto doppio compreso tra 0 e -3.

Centro stella $\quad x_s=\frac{-3-0}{2}=-1.5$ $\quad$ Asintoti a + e – 90 gradi

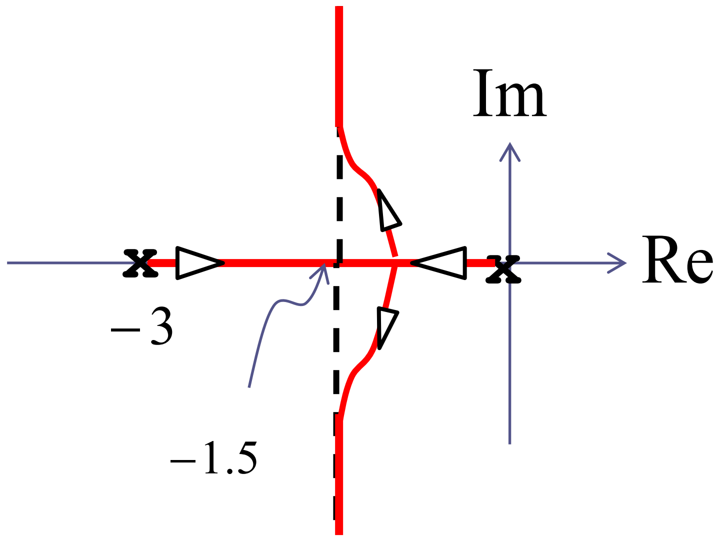
$$L(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$



Se il punto doppio sta a sinistra del centro stella si avra un LdR:



Se il punto doppio sta a destra del centro stella si avra un LdR:

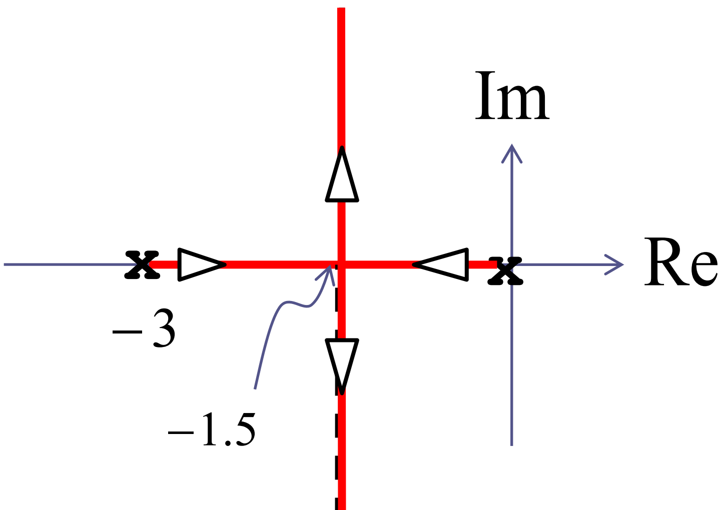


Equazione dei punti doppi $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s^*-p_i}-\cancel{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s^*-z_i}}=0$ $p_1 = 0$ $p_2 = -3$

$$\frac{1}{s^*}+\frac{1}{s^*+3}=0 \Rightarrow \frac{s^*+3+s^*}{s^*\left(s^*+3\right)}=\frac{2s^*+3}{s^*\left(s^*+3\right)}=0 \Leftrightarrow s^*=-3/2=-1.5$$

I punto doppio si trova a meta strada tra i due poli.
Per FdT L(s) con 2 poli reali e senza zeri, come il sistema a ciclo aperto L(s) dell'esempio, questo vale sempre.

I rami del LdR avranno il seguente andamento

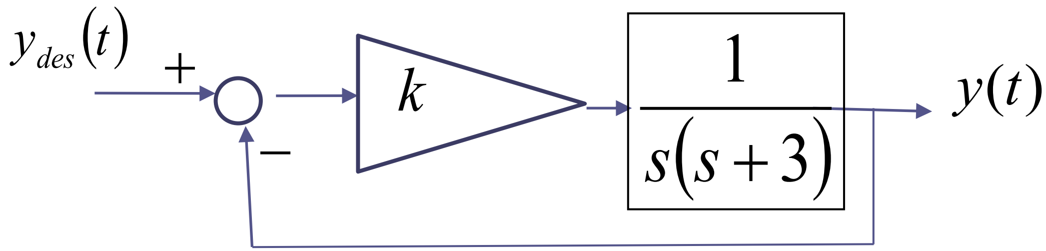


Interpretazione

Il sistema di controllo è sempre as. stabile per qualunque valore di k?

Che tipo di risposta si ottiene?

$$L(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$



$$W_{y_{des}}^{y}(s) = \frac{k}{s(s+3)+k}$$

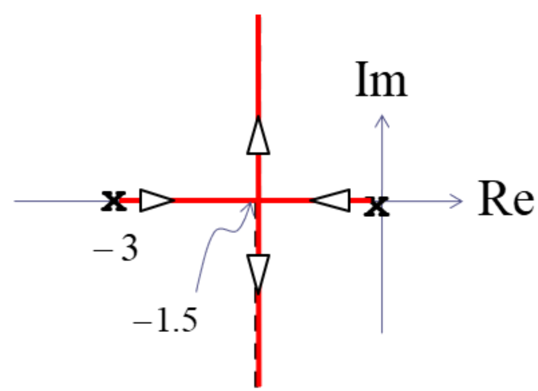
$$P_{car}(s) = s^2 + 3s + k$$

$$p_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - k}$$

Per k < 9/4=2.25 abbiamo a ciclo chiuso due poli reali distinti

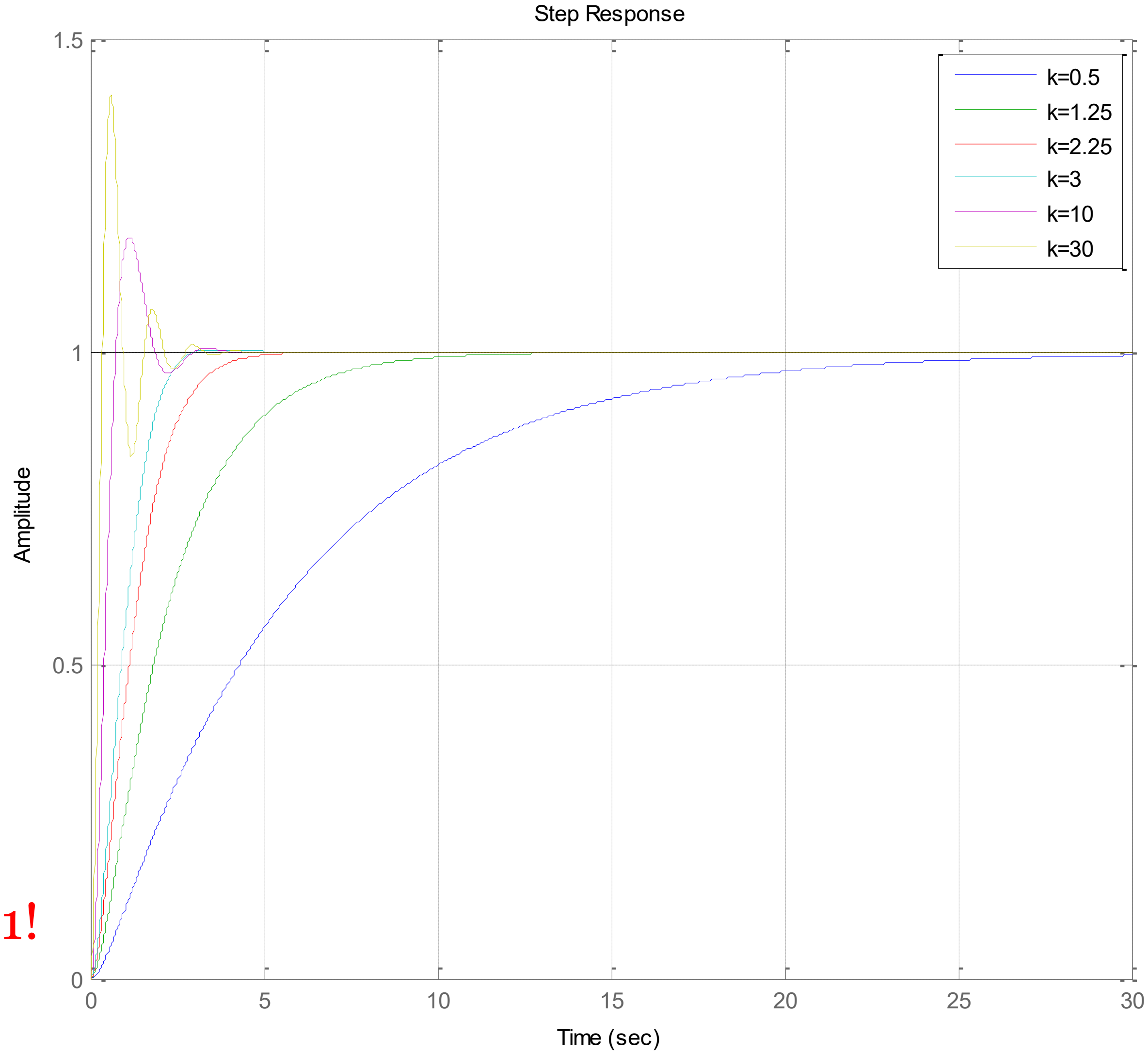
Per k =2.25 abbiamo a ciclo chiuso due poli reali coincidenti (entrambi pari a -3/2)

Per k >2.25 abbiamo a ciclo chiuso due poli complessi coniugati (con parte reale pari a -3/2)



Soglia: **k =2.25**

Al di sotto la risposta è monotona crescente, al di sopra oscillatoria smorzata.



Guadagno statico della FdT a ciclo chiuso:

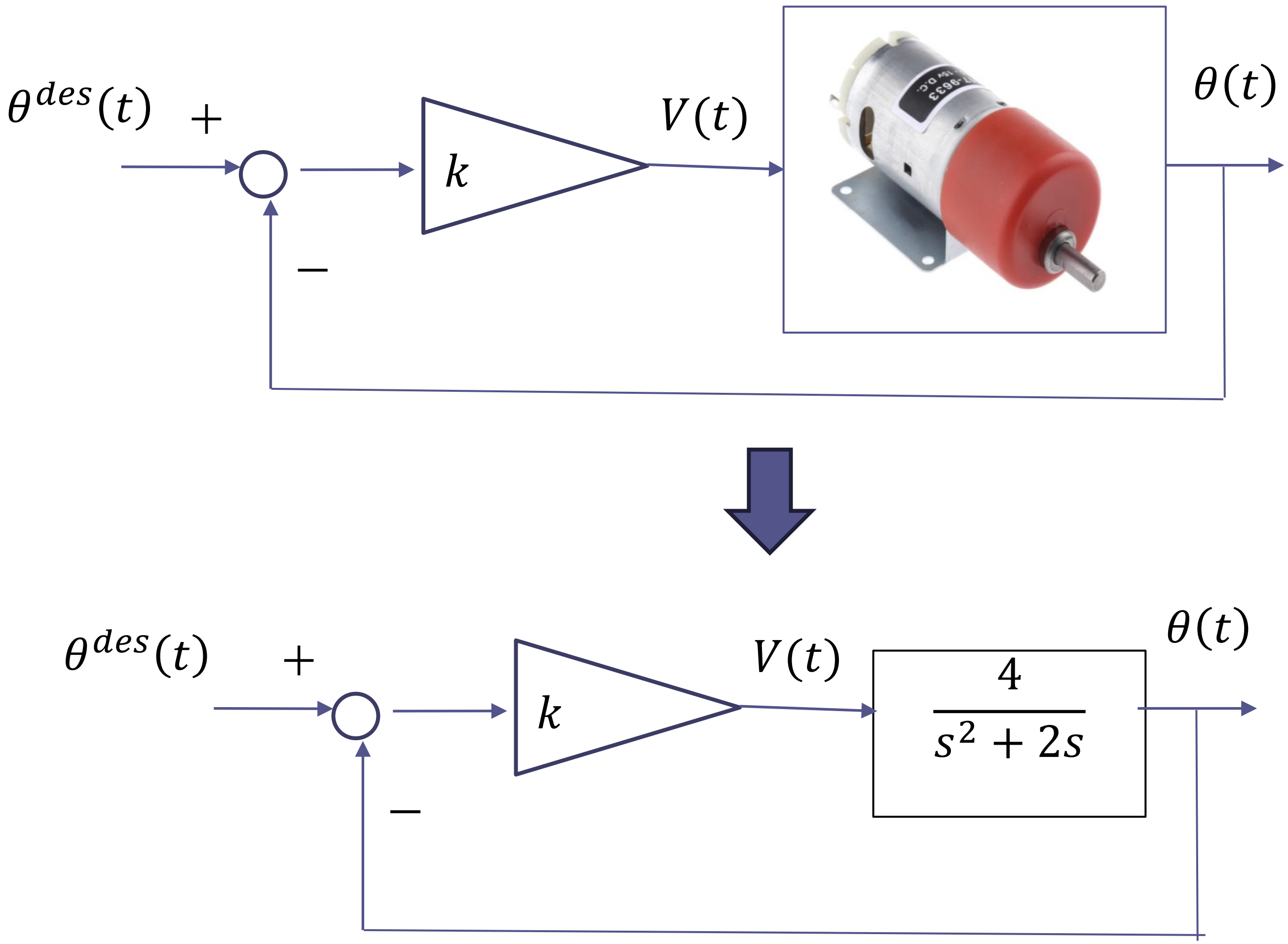
$$W_{y_{des}}^{y}(s)=\frac{k}{s(s+3)+k}$$

$$\Downarrow$$

$$g=W_{y_{des}}^{y}(0)=1$$

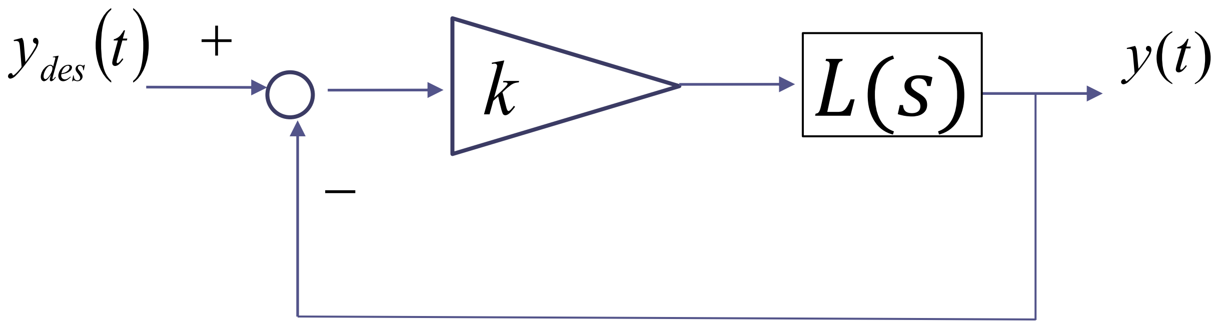
Il guadagno g vale sempre 1!

Sviluppare le medesime analisi con riferimento al servomeccanismo di posizione studiato in precedenza (v. slides di chiusura de «05 – Sistemi Dinamici Elementari»)



$$G_V^{\theta}(s) = \frac{4}{s^2+2s}$$

ESEMPIO Con riferimento al seguente sistema in retroazione



$$L(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

Tracciare il luogo delle radici e valutare di conseguenza le proprietà di stabilita a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k.

$n = 3$ ordine della L(s) (sarà anche il grado del polinomio caratteristico)

$m = 0$ grado del numeratore della L(s)

$p_1 = -1$ $p_2 = -2$ $p_3 = -5$ poli della L(s)

FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita

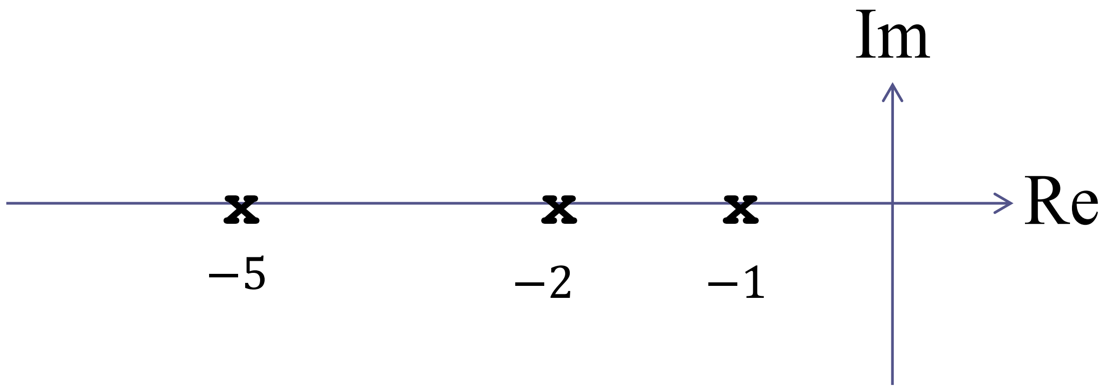
$$W_{y_{des}}^{y}(\mathrm{s}) = \frac{\dfrac{\mathrm{k}}{(s+1)(s+2)(s+3)}}{1+\dfrac{\mathrm{k}}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{\mathrm{k}}{(s+1)(s+2)(s+3)+k}$$

Polinomio caratteristico

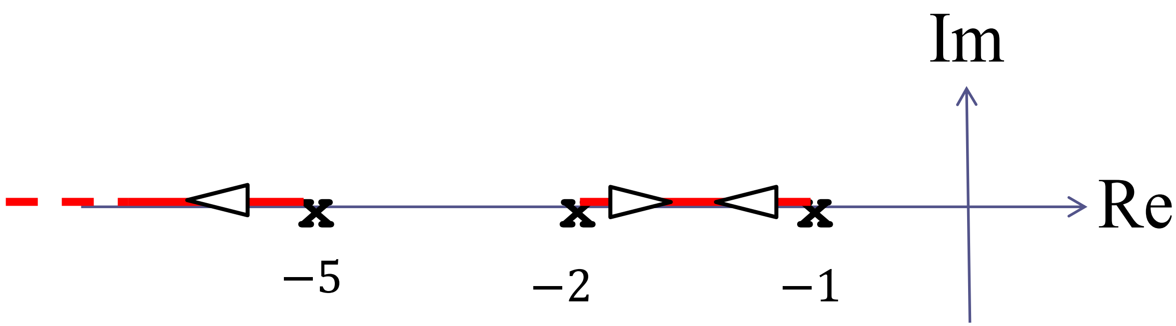
$$P_{car}(s) = (s+1)(s+2)(s+3)+k$$

$$= s^3+8s^2+17s+10+k$$

Mappa poli-zeri di L(s)



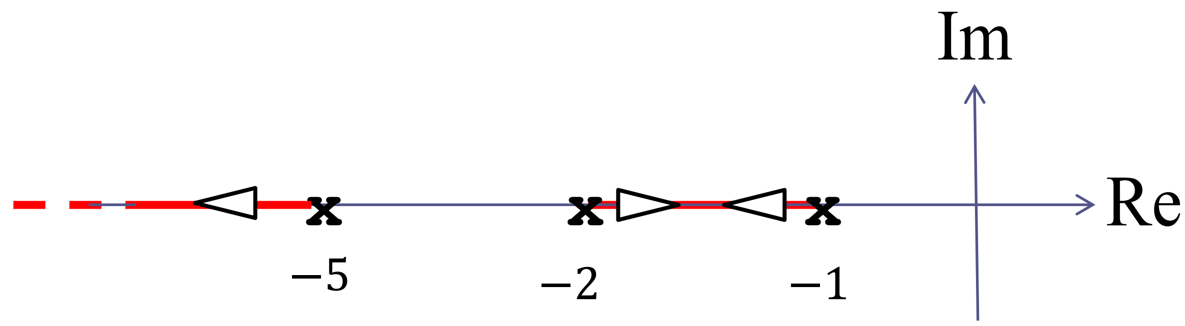
Regola della appartenenza al LdR dei segmenti dell'asse reale



Il segmento che va dal polo in -5 verso meno infinito è uno dei rami del LdR.

Il segmento che unisce i due poli in -1 e -2 invece non è un ramo del luogo.

I due rami che partono rispettivamente dai poli in -1 e -2 vanno l'uno verso l'altro e si incontrano in un punto doppio appartenente all'intervallo -2 , -1 per poi abbandonare l'asse reale e convergere verso gli asintoti.



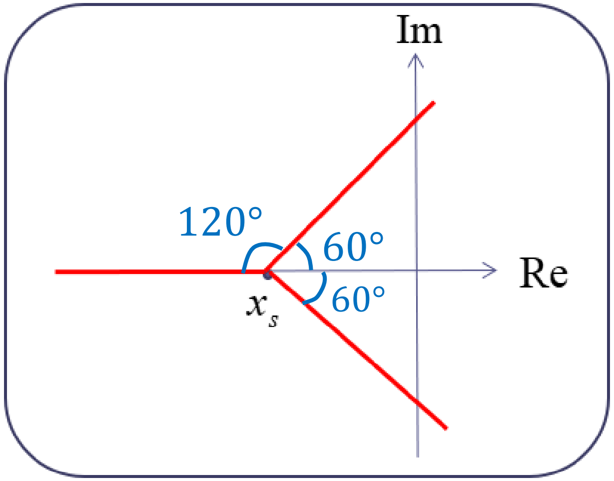
Individuiamo il centro stella e tracciamo gli asintoti.

Ascissa del centro stella:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \cancel{\sum_{i=1}^{m} z_i}}{n-m}$$

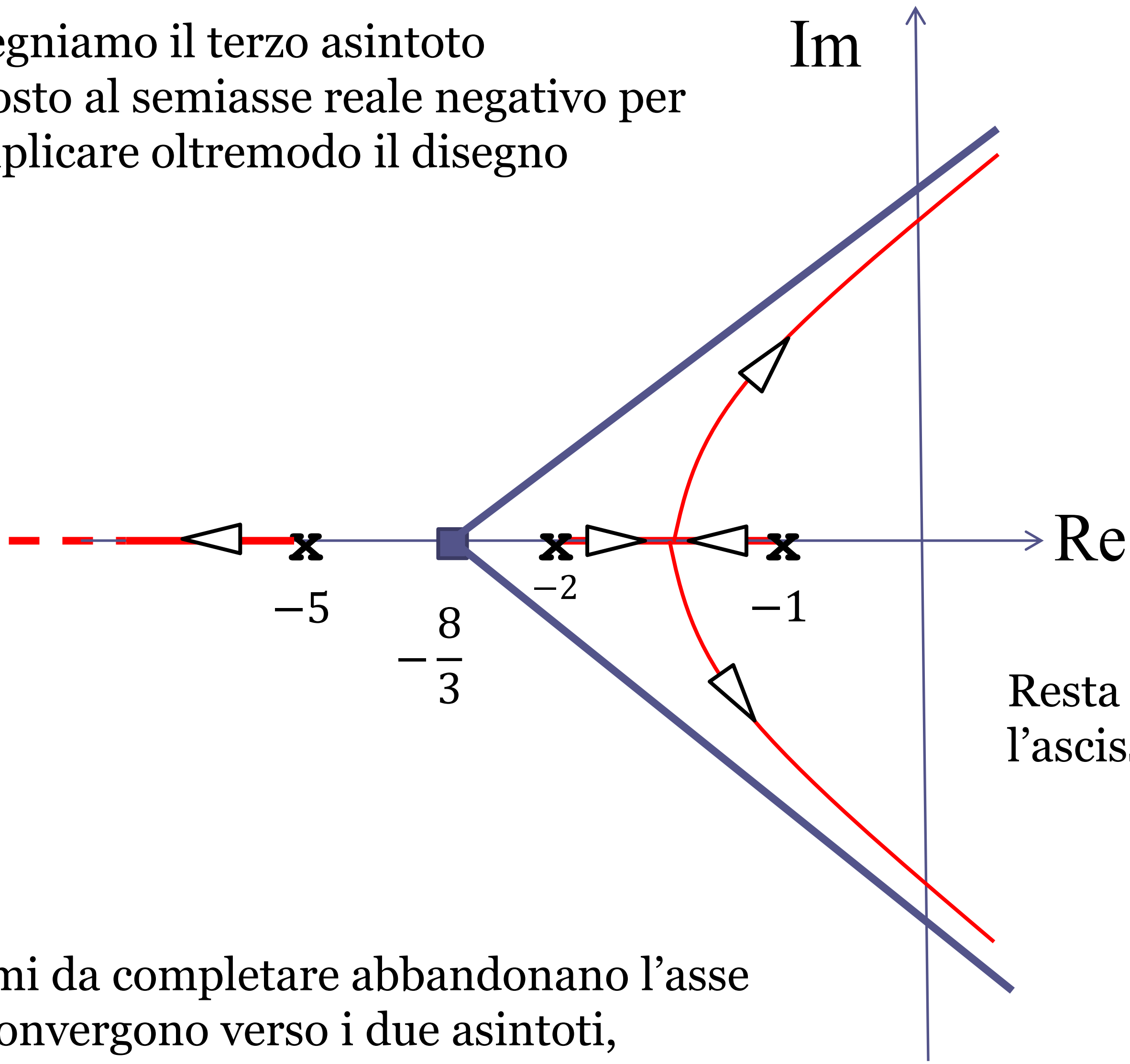
$$x_s = \frac{-1-2-5}{3} = -\frac{8}{3}$$

$n - m = 3$



Asintoti a +60, 180, e – 60 gradi

Non disegniamo il terzo asintoto sovrapposto al semiasse reale negativo per non complicare oltremodo il disegno



Resta da determinare l'ascissa del punto doppio

I due rami da completare abbandonano l'asse reale e convergono verso i due asintoti, confluendo quindi verso il semipiano destro per valori del guadagno sufficientemente elevati.

Equazione dei punti doppi

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s^*-p_i}-\cancel{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s^*-z_i}}=0 \qquad p_1=-1 \qquad p_2=-2 \qquad p_3=-5$$

$$\frac{1}{s^*+1}+\frac{1}{s^*+2}+\frac{1}{s^*+5}=0$$

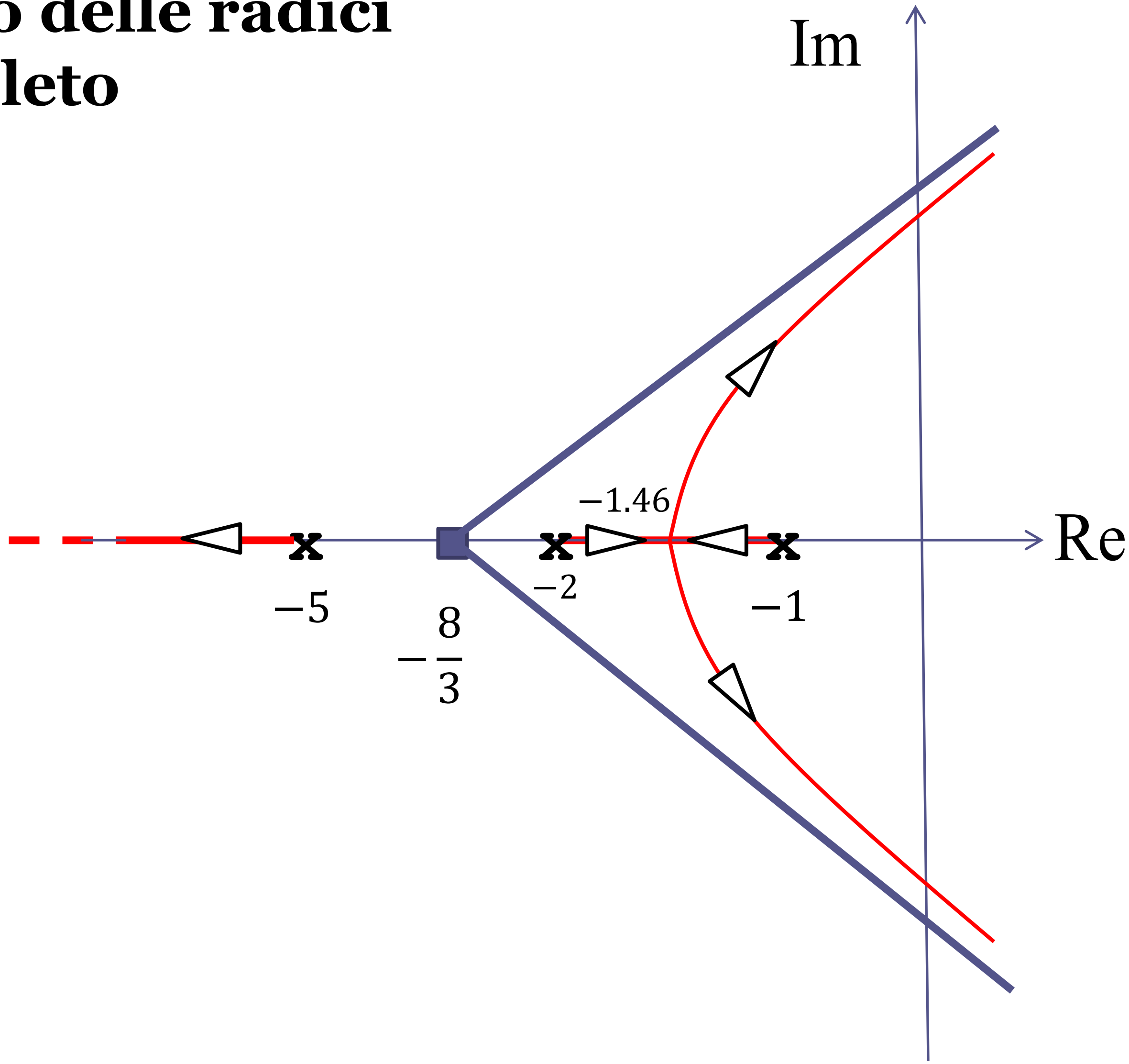
$$\frac{(s^*+2)(s^*+5)+(s^*+1)(s^*+5)+(s^*+1)(s^*+2)}{(s^*+1)(s^*+2)(s^*+5)}=0$$

$$(s^*+2)(s^*+5)+(s^*+1)(s^*+5)+(s^*+1)(s^*+2)=3s^2+16s+7$$

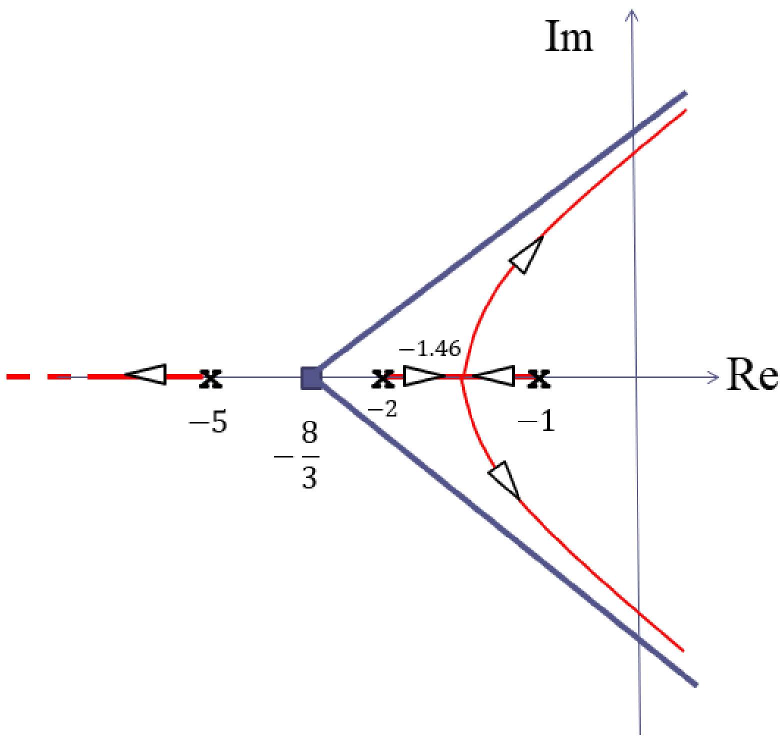
Il polinomio $3s^2+16s+7$ ammette le radici $r_1=-1.46$ e $r_2=-3.86$

Fra le due radici r_1 e r_2 è accettabile unicamente r_1 in quanto il punto -3.86 non appartiene al LdR. Il punto doppio sta pertanto nel punto -1.46

Luogo delle radici completo



Interpretazione



Esiste un valore limite per il guadagno k (guadagno critico k_{cr}) al di sopra del quale il sistema a ciclo chiuso diventa instabile.

Tale valore può essere determinato applicando al polinomio caratteristico della FdT a ciclo chiuso il criterio di Routh Hurwitz.

$$P_{car}(s) = s^3 + 8s^2 + 17s + 10 + k$$

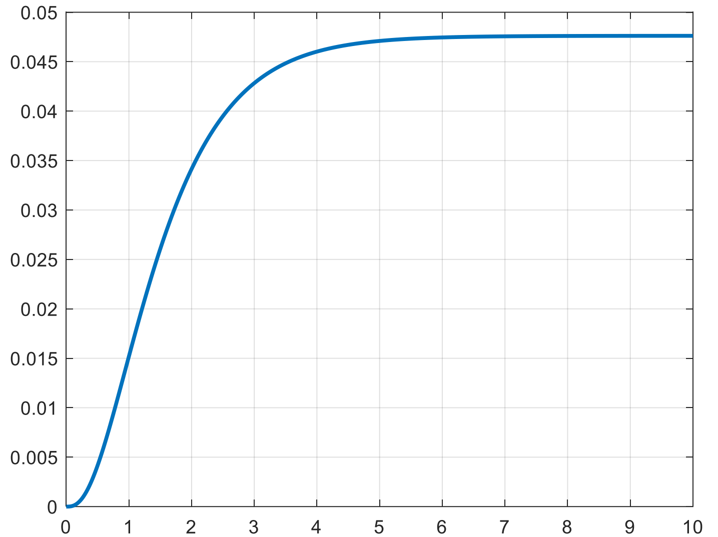
$$\Downarrow$$

$$k_{cr} = 126$$

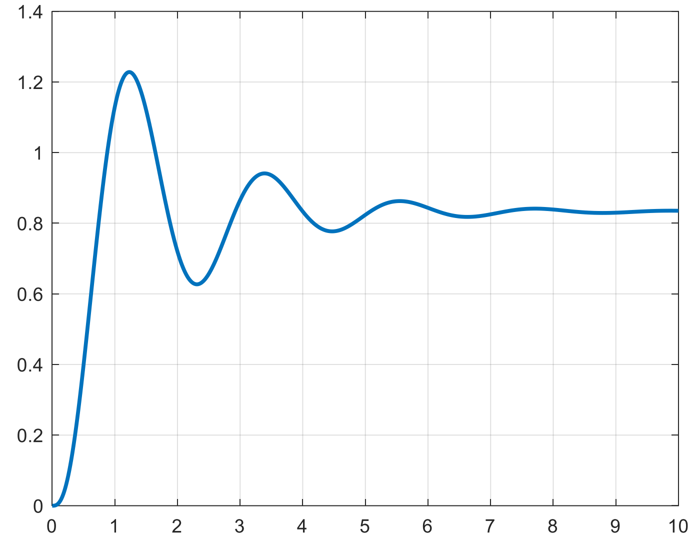
Per valori sufficientemente piccoli di k la risposta al gradino a ciclo chiuso è monotona crescente, e diventa progressivamente più rapida all'aumentare di k

Superato il valore di k associato al punto doppio (che ancora non sappiamo determinare, ma che vale 0.88) due fra i tre poli a ciclo chiuso diventano complessi coniugati, e nella risposta compaiono pertanto delle oscillazioni. Lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati decresce progressivamente all'aumentare di k da 0.88 fino a 126. In corrispondenza di $k = 126$ si ha una coppia di poli immaginari puri (limite di stabilità).

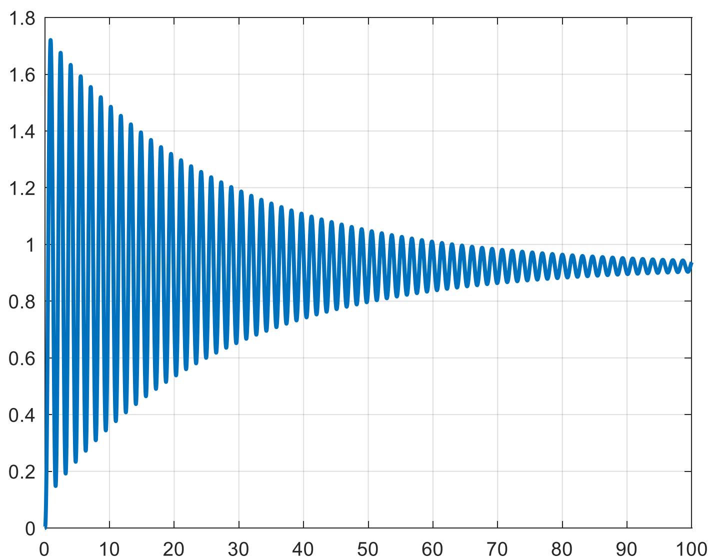
$k = 0.5$



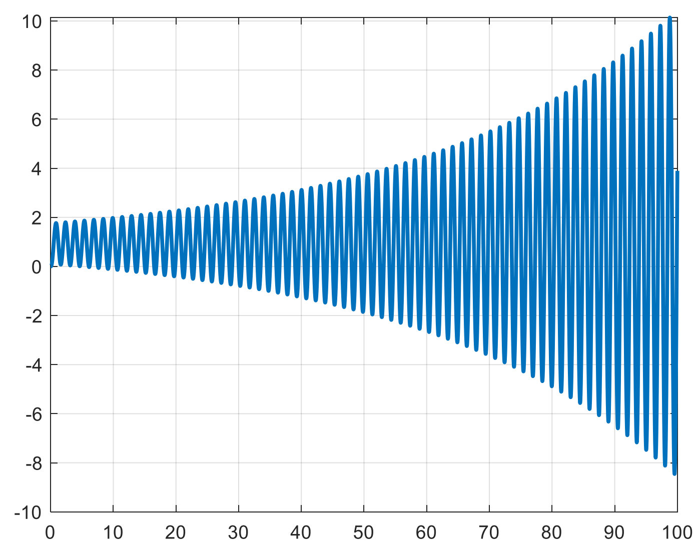
$k = 50$



$k = 120$



$k = 130$



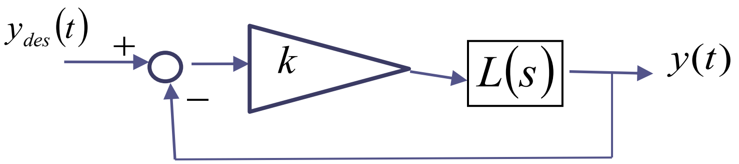
Come mai le risposte al gradino corrispondenti ai valori $k = 0.5$, $k = 50$ e $k = 120$ convergono asintoticamente verso valori di regime differenti?

Determinare analiticamente tali valori.

Taratura del luogo delle radici

Il problema della taratura del luogo delle radici consiste nella determinazione del valore del guadagno k associato ad un determinato punto P del luogo delle radici

$$L(s) = \bar{k}\,\frac{(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)}$$



Formula di taratura di un punto P del luogo

$$k = \frac{1}{\bar{k}}\,\frac{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}{r_1 r_2\ldots r_m} \qquad \rho_i = dist(P, p_i) \qquad r_i = dist(P, z_i)$$

$dist(P, p_i)$ Distanza del punto P dal generico polo p_i della L(s)

$dist(P, z_i)$ Distanza del punto P dal generico zero z_i della L(s)

Determinazione del guadagno in alta frequenza (HFG) di una FdT

Il guadagno in alta frequenza $\bar{k}$ di una generica funzione di trasferimento F(s) si calcola, analiticamente mediante la formula seguente

$$\bar{k} = \lim_{s \to \infty} s^{n-m} F(s)$$

in cui n ed m sono rispettivamente il grado del polinomio a denominatore ed il grado del polinomio a numeratore. Non si confonda tale parametro con il guadagno statico, che ha tutt'altro significato.

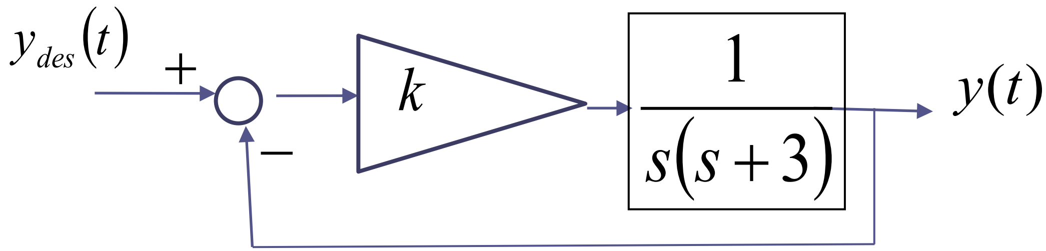
Operativamente, il calcolo di tale parametro può essere effettuato in maniera molto più semplice individuando, a numeratore e denominatore della $F(s)$, i termini polinomiali di grado più elevato, e facendo il rapporto fra i rispettivi coefficienti

Esempio

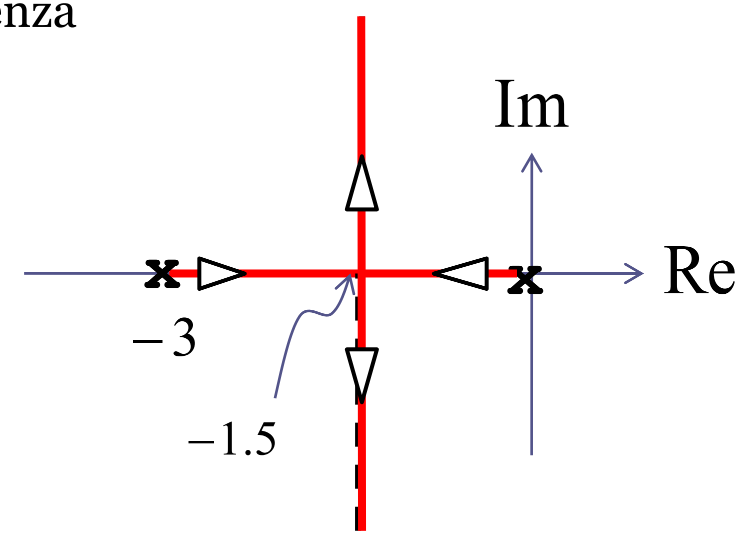
$$F(s) = \frac{3s + 10}{2s^2 + s + 1} \qquad \bar{k} = 3/2$$

ESEMPIO

$$L(s)=\frac{1}{s(s+3)}$$



LdR tracciato in precedenza



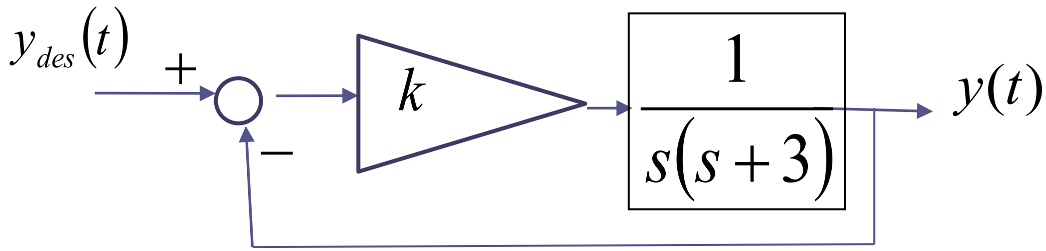
$$W_{y_{des}}^{y}(s)=\frac{k}{s(s+3)+k}$$

$$P_{car}(s)=s^2+3s+k$$

$$s_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-k}$$

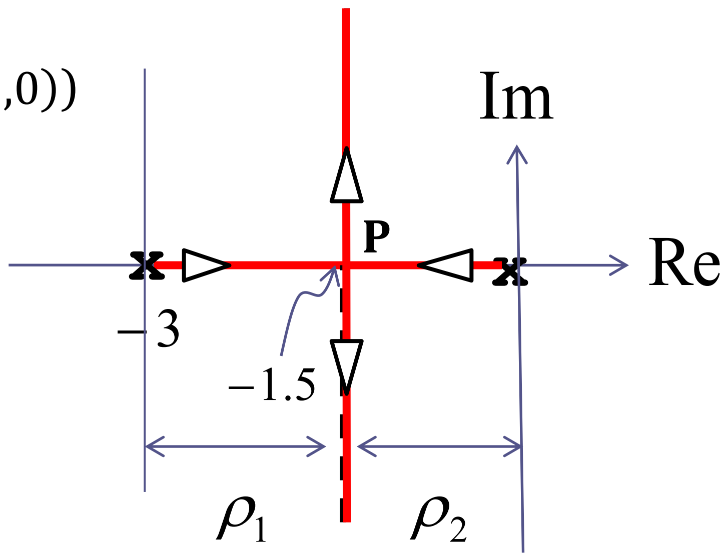
Per k =2.25 abbiamo a ciclo chiuso due poli reali coincidenti (entrambi pari a -3/2)

$$L(s)=\frac{1}{s(s+3)}$$



Facciamo la taratura del punto doppio ($P \equiv (-1.5,0)$)

$$k=\frac{1}{\bar{k}}\frac{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}{r_1r_2\ldots r_m}$$



$$\rho_1=\rho_2=1.5$$

$\bar{k}=1$ HFG della L(s)

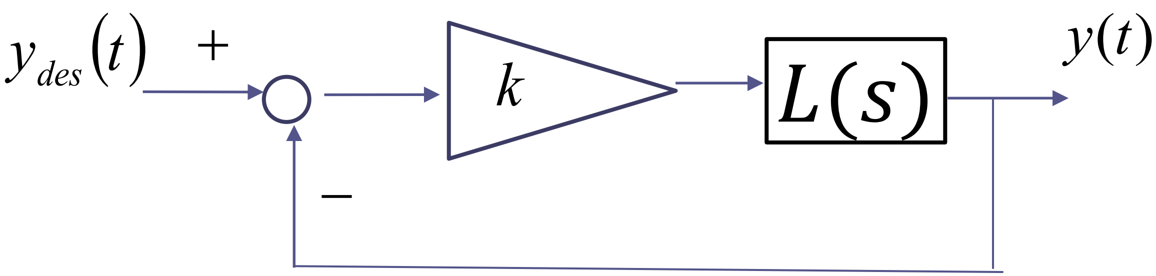
$$\rho_i = dist(P, p_i)$$

$$\cancel{r_i = dist(P, z_i)}$$

$$k=\frac{1}{\bar{k}}\rho_1\rho_2$$

$$k=(1.5)\cdot(1.5)=2.25$$

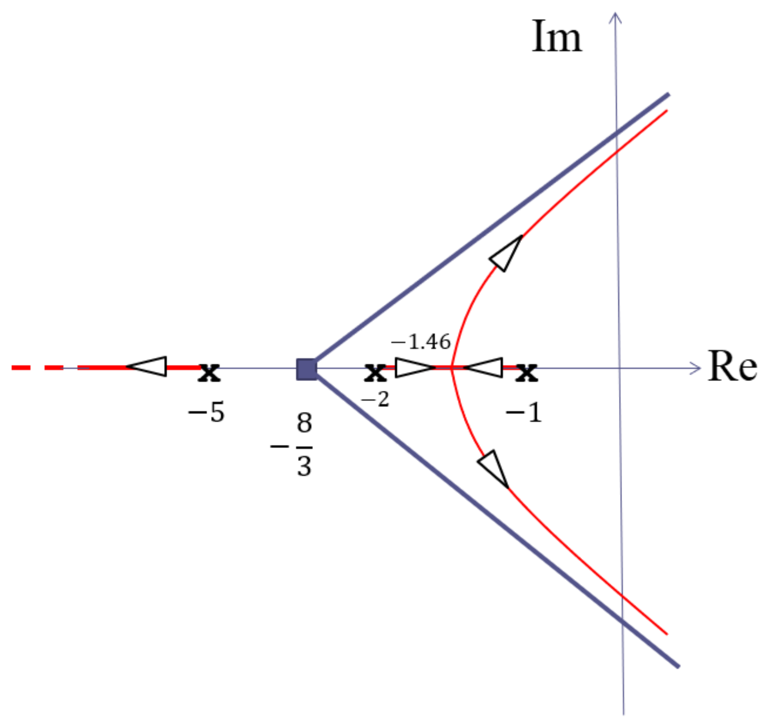
ESEMPIO Ritorniamo all'esempio precedentemente trattato



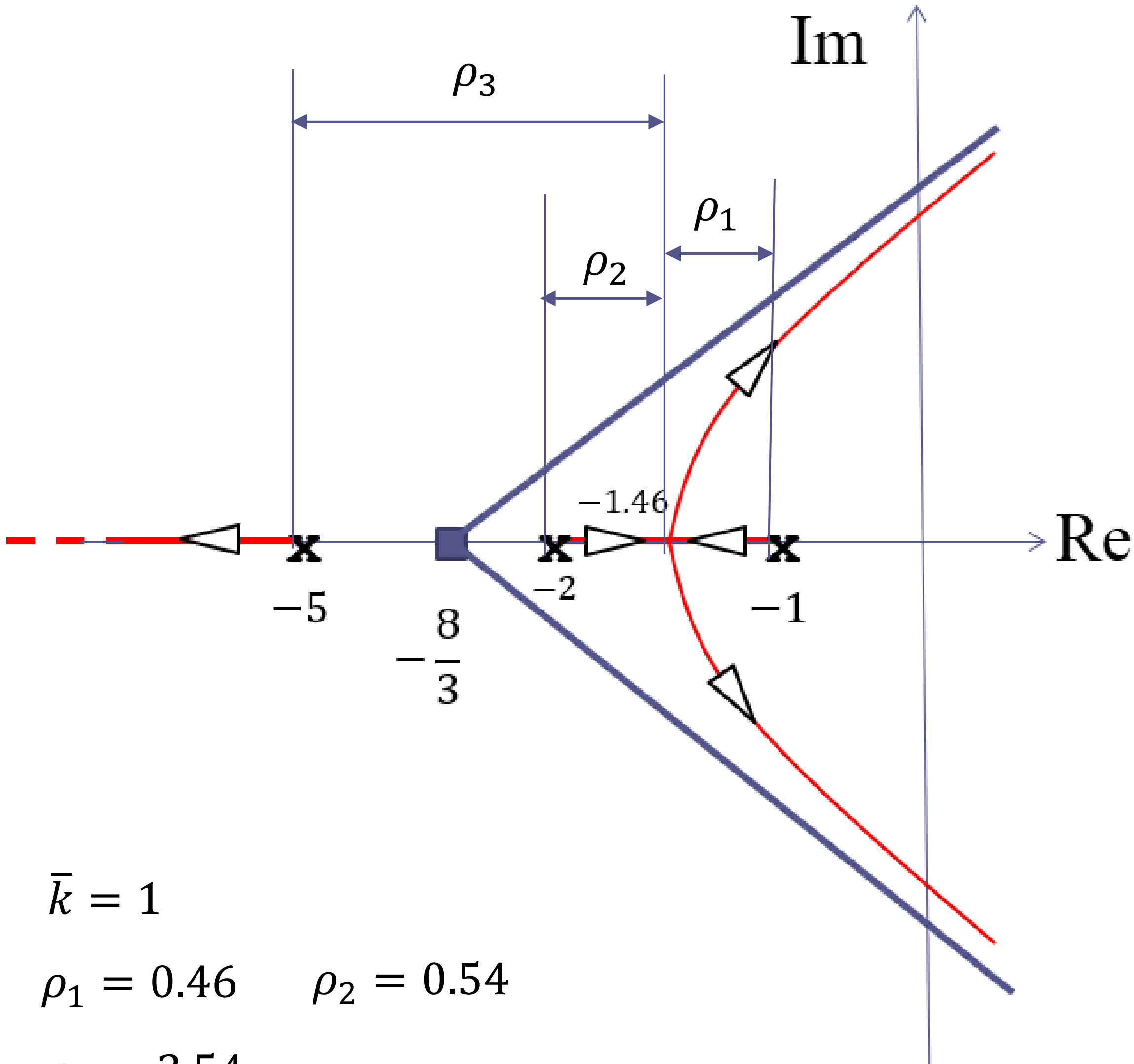
$$L(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$\bar{k} = 1$ Guadagno in alta frequenza della L(s)

con riferimento al quale era stato tracciato il seguente LdR



Tariamo il punto doppio in −1.46 per identificare il valore del guadagno k oltre il quale si inducono oscillazioni nella risposta al gradino a ciclo chiuso



Taratura del punto doppio in -1.46

$$k = \frac{1}{\bar{k}}\rho_1\rho_2\rho_3$$

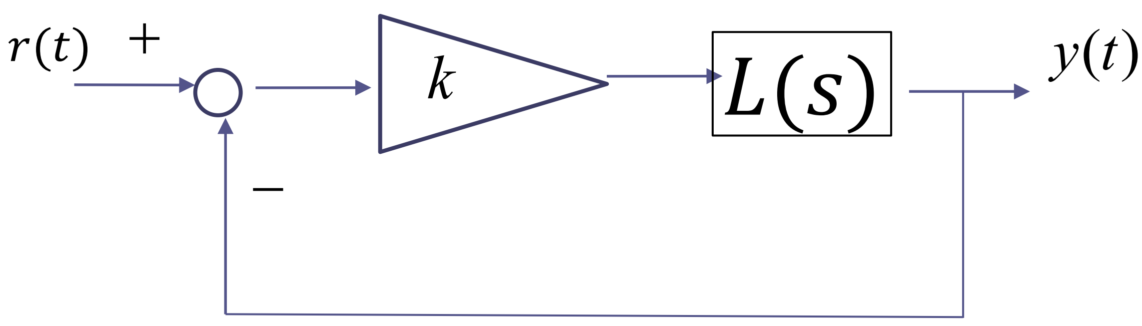
$\bar{k} = 1$

$\rho_1 = 0.46 \qquad \rho_2 = 0.54$

$\rho_3 = 3.54$

$k = 0.46 \cdot 0.54 \cdot 3.54 \approx 0.88$

ESEMPIO Con riferimento al seguente sistema in retroazione



$$L(s) = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

Tracciare il luogo delle radici e valutare di conseguenza al variare del guadagno k le proprietà di stabilita a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta ad un set point costante.

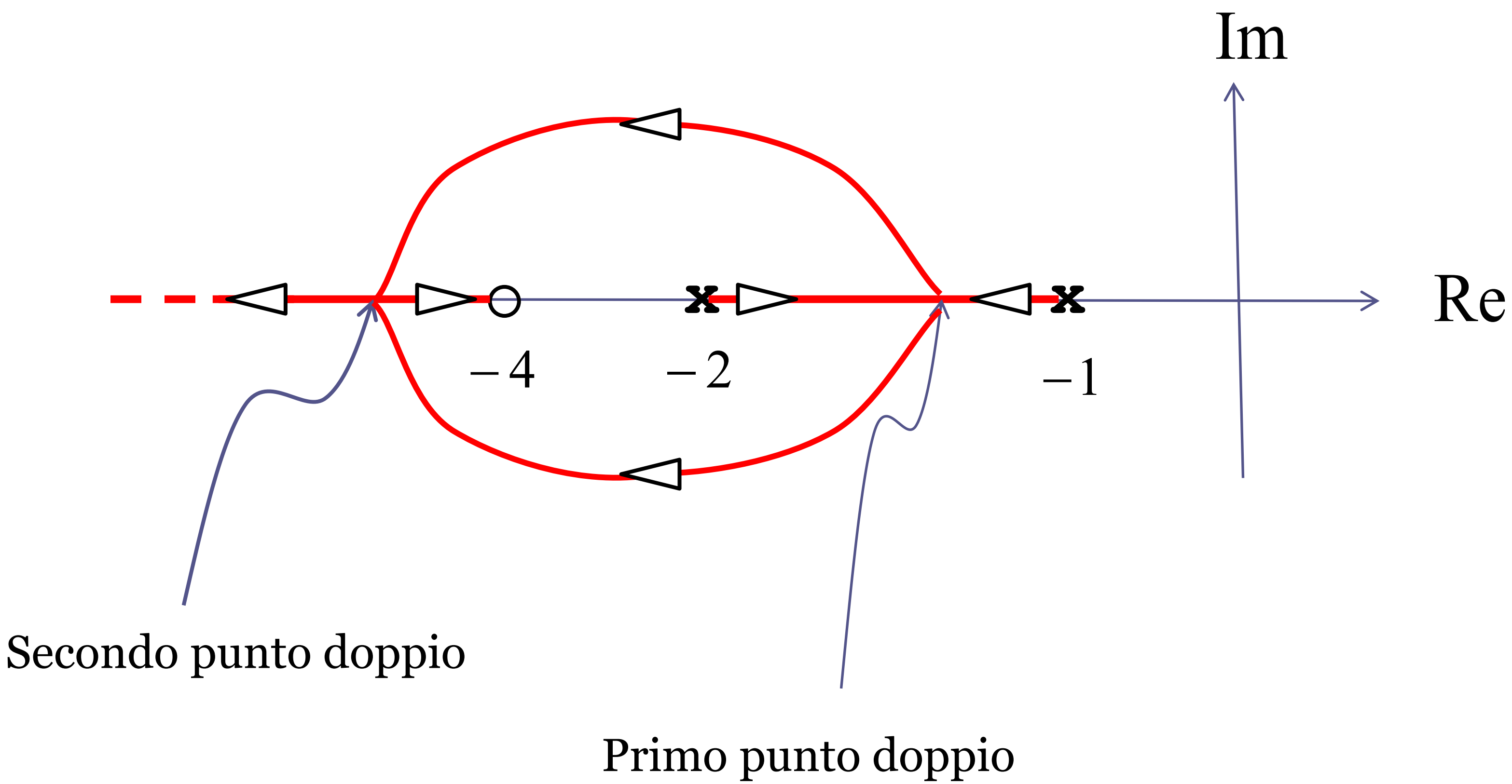
FdT a ciclo chiuso

$$W_r^y(s) = \frac{kL(s)}{1+kL(s)} = \frac{\frac{2k(s+4)}{(s+1)(s+2)}}{1+\frac{2k(s+4)}{(s+1)(s+2)}} = \frac{2k(s+4)}{(s+1)(s+2)+2k(s+4)}$$

Guadagno statico della FdT a ciclo chiuso $\mu = W_r^y(0) = \frac{8k}{2+8k}$

$$L(s) = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

Mappa poli-zeri della L(s) e segmenti dell'asse reale che appartengono al LdR. Nessuno di tali segmenti è un ramo del LdR.



Superato il primo punto doppio i rami abbandonano l'asse reale per farvi ritorno in corrispondenza di un secondo punto doppio posizionato alla sinistra dello zero.

Superato il secondo punto doppio, un ramo evolve verso lo zero, ed un ramo va verso meno infinito

$$L(s)=\frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

Calcoliamo le coordinate dei due punti doppi

Equazione dei punti doppi

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s^{*}-z_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s^{*}-p_i}=0$$

$p_1 = -1, \quad p_2 = -2, \qquad z_1 = -4$

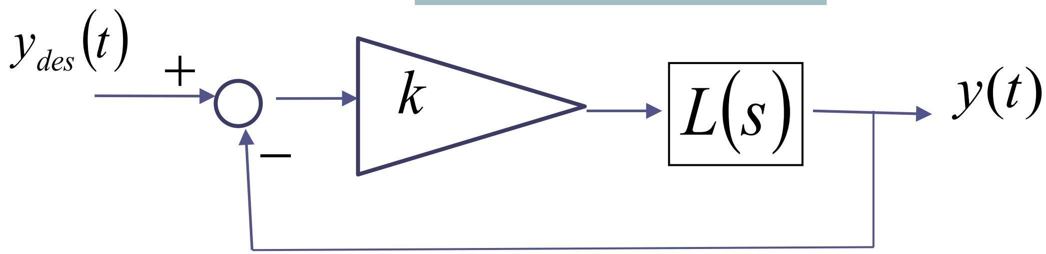
$$\frac{1}{s^{*}+4}-\frac{1}{s^{*}+1}-\frac{1}{s^{*}+2}=0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{s^{*2}+8s^{*}+10}{(s^{*}+1)(s^{*}+2)(s^{*}+4)}=0$$

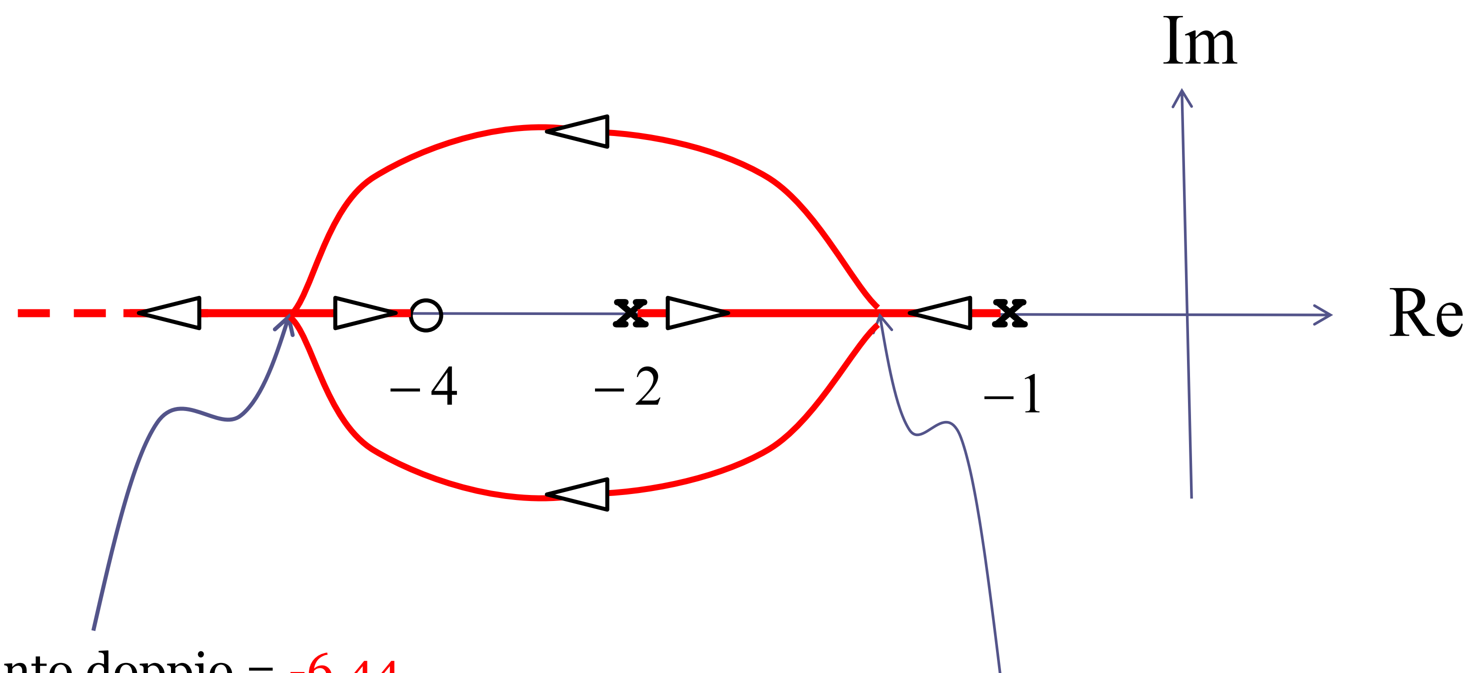
$$s^{*2}+8s^{*}+10=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} s_1=-1.55 \\ s_2=-6.44 \end{array}$$

Entrambi OK

$$L(s)=\frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

$$\bar{k}=2$$



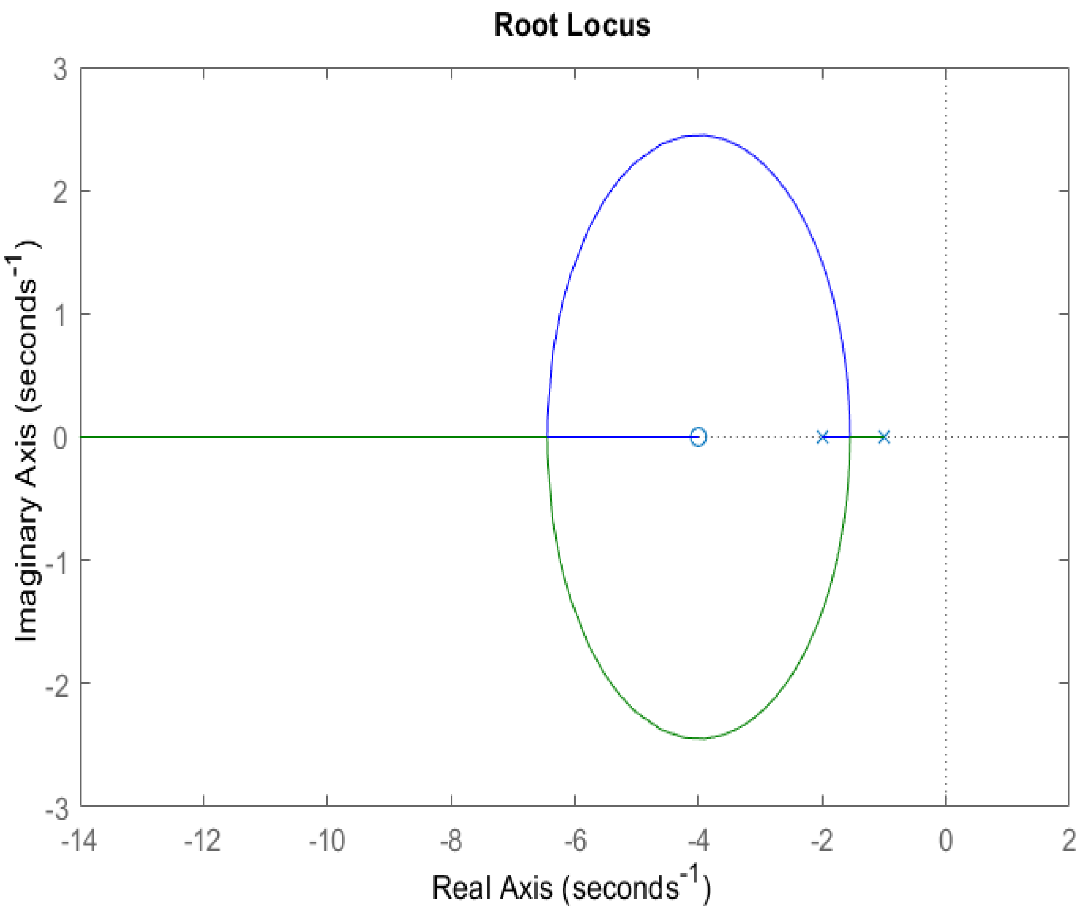


Punto doppio = -6.44

Punto doppio = -1.55

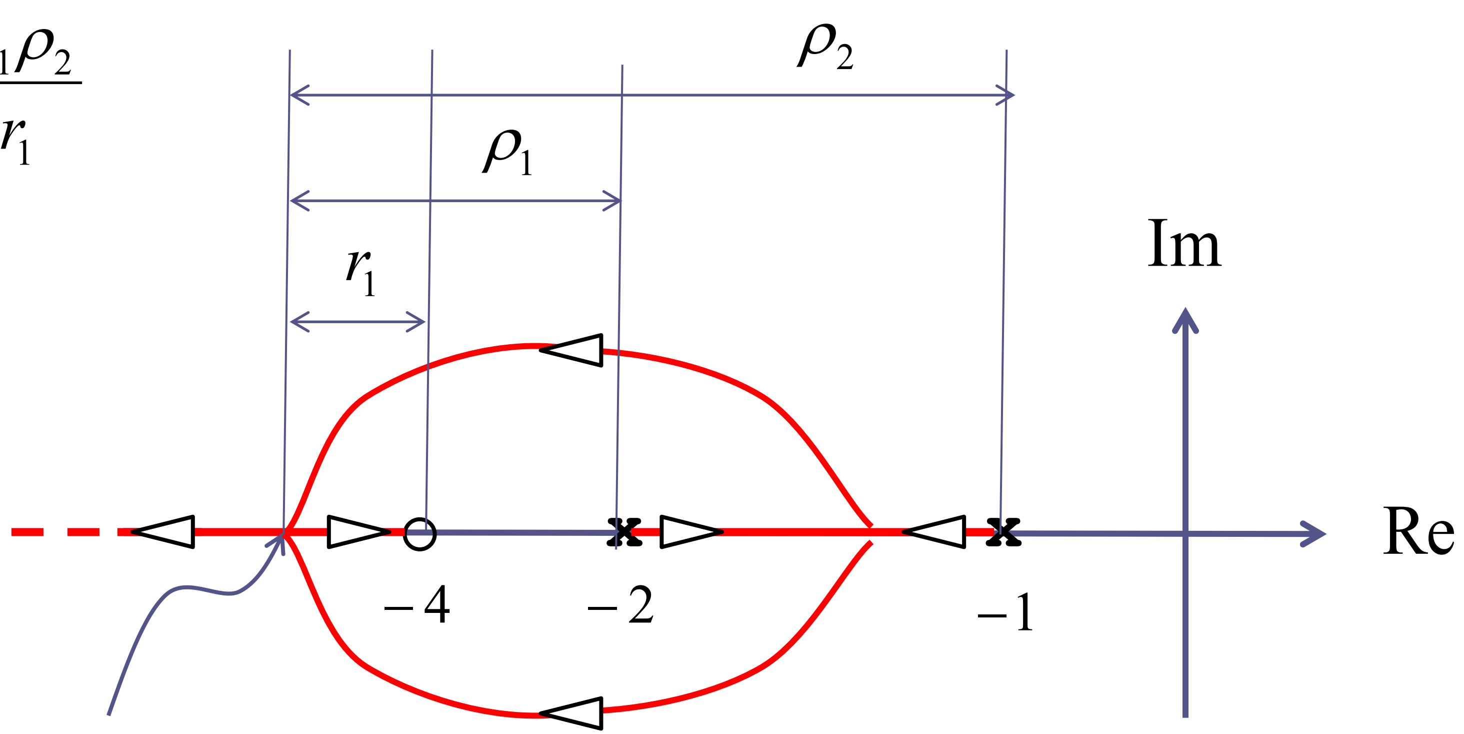
```
s=tf('s')
L=2*(s+4)/((s+1)*(s+2));

rlocus(L)
```



Per quale valore di k i due poli del sistema a ciclo chiuso sono pari entrambi a -6.44 ?

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_1}$$



Punto doppio = -6.44

$r_1 = 2.44 \qquad \rho_1 = 4.44 \qquad \rho_2 = 5.44$

Taratura del
punto doppio in -6.44

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_1} = \frac{1}{2} \frac{(4.44) \cdot (5.44)}{(2.44)} = 4.94$$

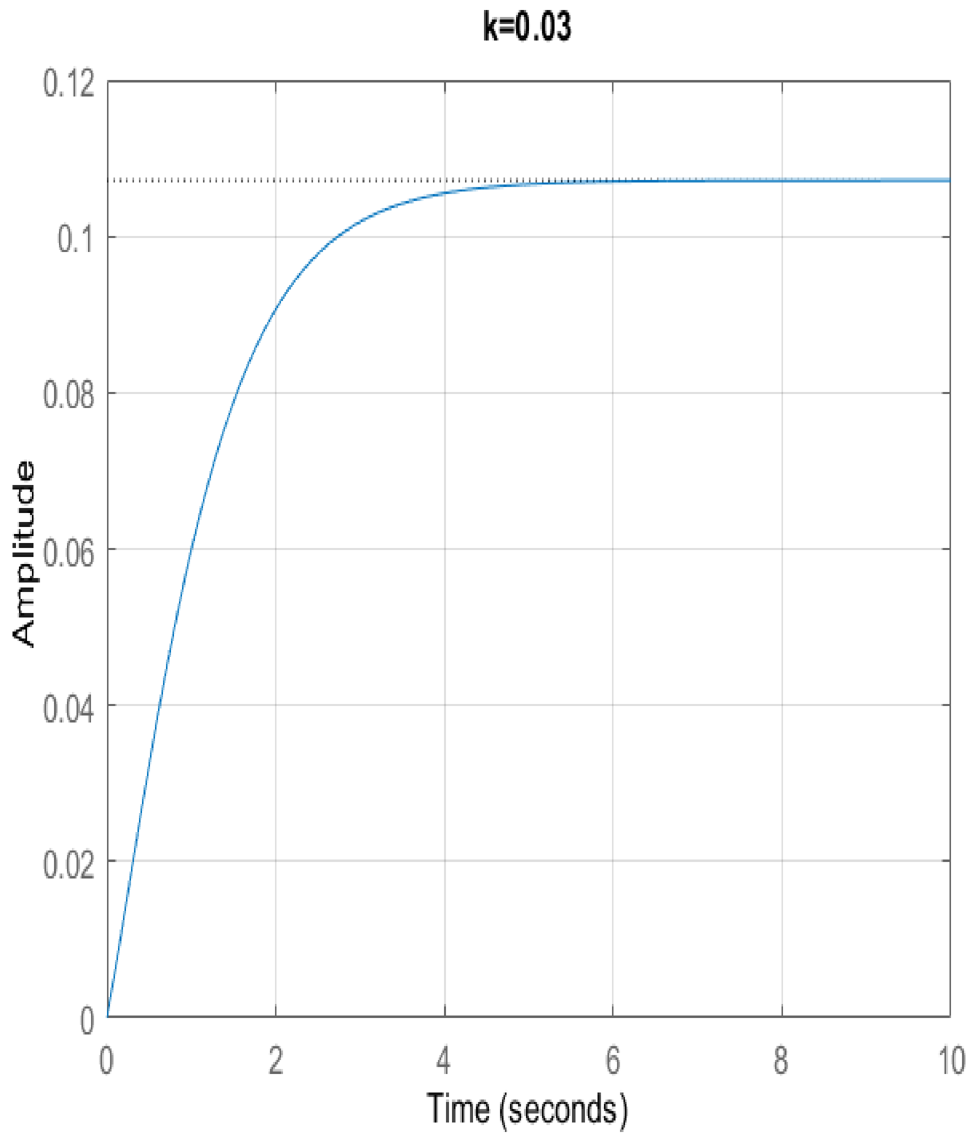
Taratura del
punto doppio in -1.55

$$k = \frac{1}{2}\frac{(0.55)\cdot(0.45)}{2.45} = 0.05$$

$0 < k < 0.05$ Risposta monotona crescente (due poli reali negativi ed un o zero più in alta frequenza rispetto ai due poli).

$0.05 < k < 4.94$ Risposta oscillatoria

$k > 4.94$ Risposta con sovraelongazione seguita da una convergenza monotona verso il valore di regime (due poli reali negativi ed uno zero più in bassa frequenza rispetto ai due poli)

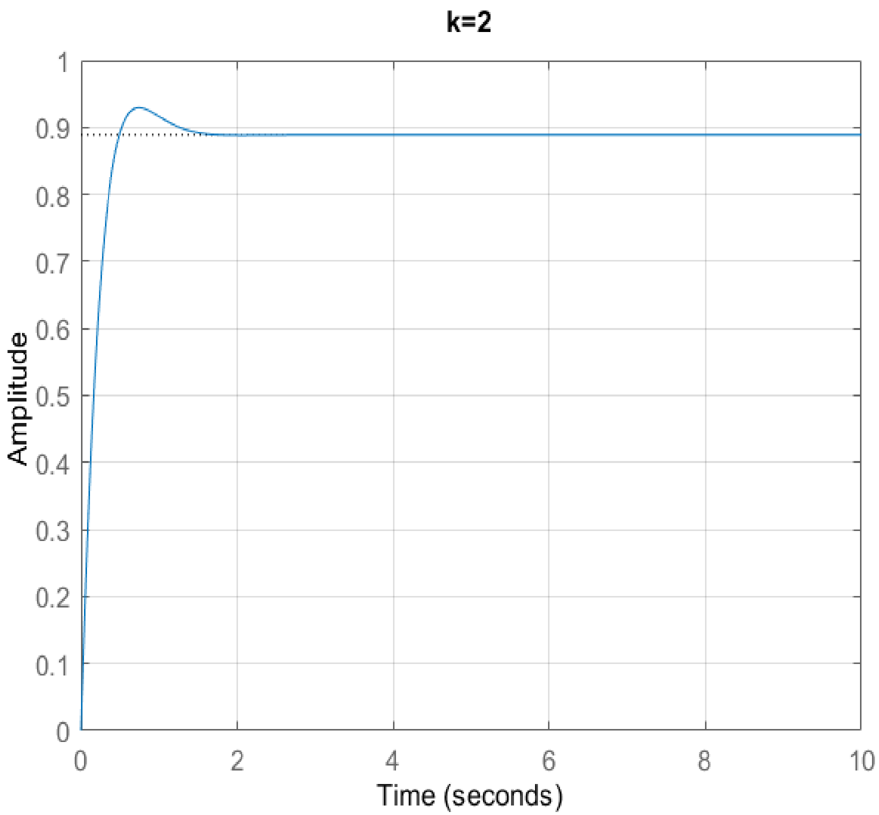


$$0 < k < 0.05$$

Risposta monotona crescente (due poli reali negativi ed uno zero più in alta frequenza rispetto ai due poli).

$$k = 0.03$$

$$\mu = \frac{8k}{2+8k} = 0.107$$



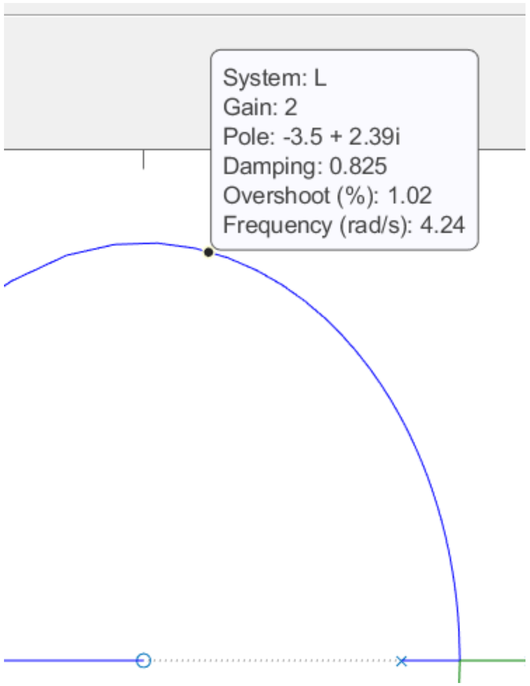
$$0.05 < k < 4.94$$

Risposta oscillatoria

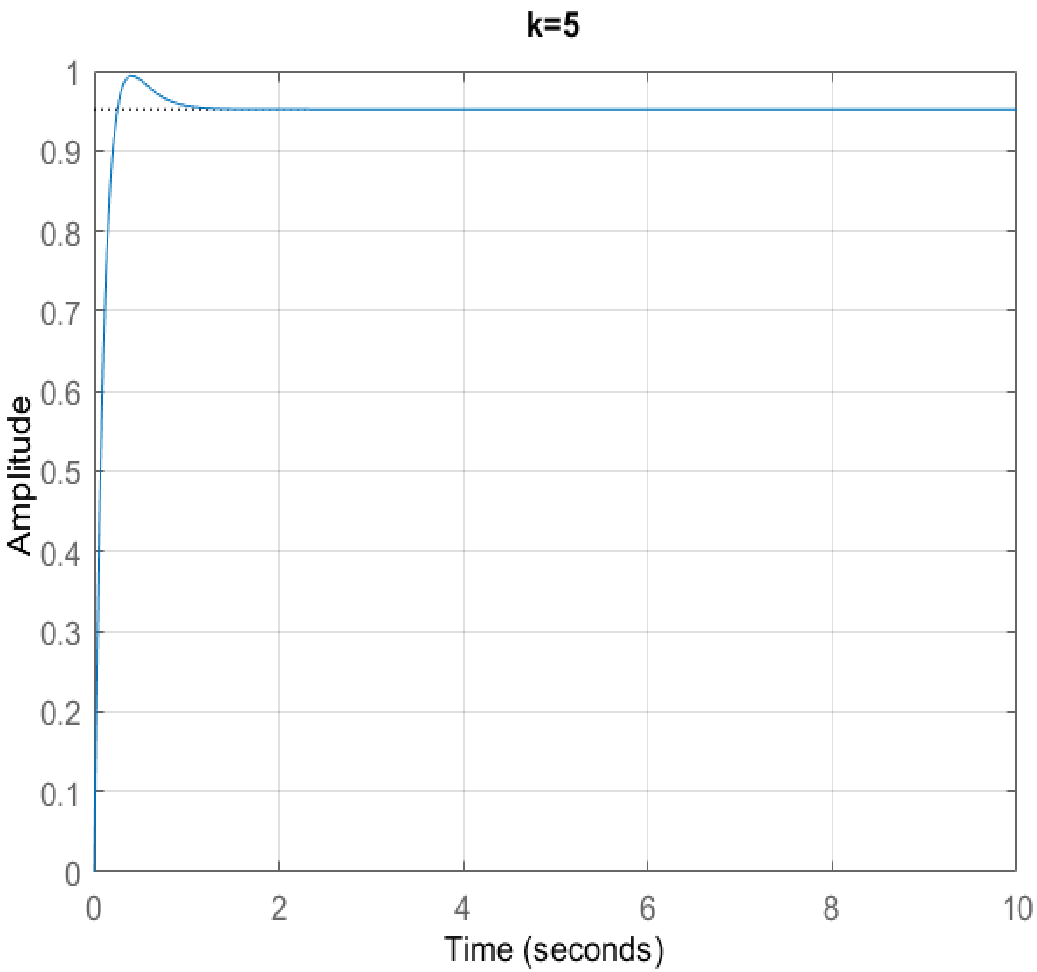
$$k = 2$$

$$\mu = \frac{8k}{2+8k} \approx 0.89$$

Le oscillazioni previste non sono visibili.
Come mai?



In corrispondenza del valore $k = 2$, lo smorzamento è pari a 0.82, cui corrisponde una sovraelongazione dell'1% ed un DR percentuale ancora minore. Quindi, le oscillazioni ci sono ma sono «invisibili» ad occhio nudo e si smorzano in maniera pressoché completa dopo un periodo.



$k > 4.94$

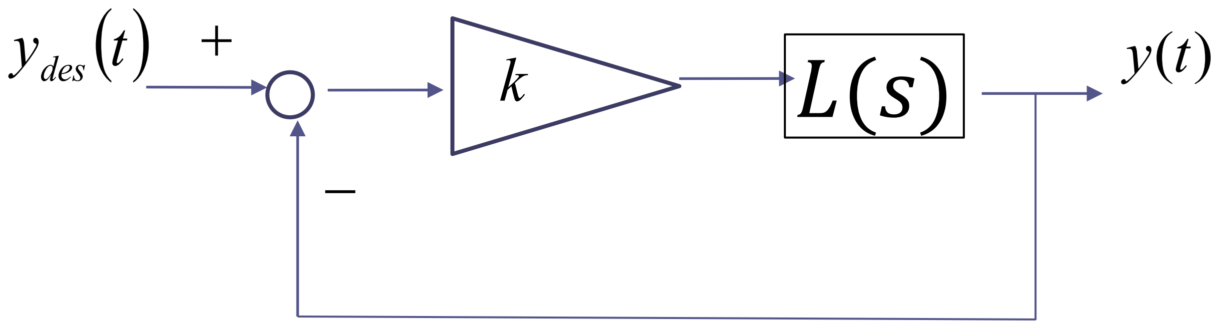
Risposta con sovraelongazione seguita da una convergenza monotona verso il valore di regime (due poli reali negativi ed un o zero più in bassa frequenza rispetto ai due poli)

```
k=0.03;
G=2*k*(s+4)/((s+1)*(s+2)+2*k*(s+4));
figure(1)
step(G,[0:0.01:10]),grid
title ('k=0.03')

k=2;
G=2*k*(s+4)/((s+1)*(s+2)+2*k*(s+4));
figure(2)
step(G,[0:0.01:10]),grid
title ('k=2')

k=5;
G=2*k*(s+4)/((s+1)*(s+2)+2*k*(s+4));
figure(3)
step(G,[0:0.01:10]),grid
title ('k=5')
```

ESERCIZI **Con riferimento ai seguenti sistemi in retroazione**



$$L(s)=\frac{5(s+2)}{s^2+2s+3}$$

$$L(s)=\frac{5(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

Tracciare il luogo delle radici e valutare di conseguenza le proprietà di stabilita a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k.