Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea Fisica

Analisi Matematica II

prof. Antonio Greco

Seconda parte

Anno accademico 2023/24

MA 24 OTT 2023

INTORNI IN $\mathbb{R}^N$ (ALIAS: TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^N$)

DEFINIZIONE LA PALLA APERTA DI RAGGIO $\varepsilon > 0$ CENTRATA NEL PUNTO $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, O INTORNO SFERICO DI $\bar{x}$ DI RAGGIO ε, È L'INSIEME

$$B(\bar{x}, \varepsilon) = \left\{ \bar{y} \in \mathbb{R}^N : \|\bar{y} - \bar{x}\| < \varepsilon \right\}$$

DOVE $\|\bar{y} - \bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\bar{y}_i - \bar{x}_i)^2}$

DEFINIZIONE: UN PUNTO $\bar{x}$ SI DICE INTERNO A UN SOTTOINSIEME $A \subset \mathbb{R}^N$ SE ESISTE $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset A$.

IMPLICA $\bar{x} \in A$ MA NON VI EQUIVALE

DEFINIZIONE: UN SOTTOINSIEME $A \subset \mathbb{R}^N$ SI DICE APERTO SE OGNI (EVENTUALE) PUNTO $\bar{x} \in A$ È INTERNO.

DEFINIZIONE: UN INTORNO DI UN PUNTO $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ È UN APERTO $A \ni \bar{x}$.

DEFINIZIONE: UN PUNTO $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER UN INSIEME $X \subset \mathbb{R}^N$ (CHE CONTENGA $\bar{x}$ OPPURE NO) SE QUALUNQUE SIA $\varepsilon \in (0, +\infty)$ LA PALLA $B(\bar{x}, \varepsilon)$ CONTIENE INFINITI ELEMENTI DI X.

SI PUÒ ANCHE ADOTTARE, EQUIVALENTEMENTE, LA

DEFINIZIONE: UN PUNTO $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER UN INSIEME $X \subset \mathbb{R}^N$ SE QUALUNQUE SIA $\varepsilon \in (0, +\infty)$ LA PALLA $B(\bar{x}, \varepsilon)$ CONTIENE UN PUNTO DI X DISTINTO DA $\bar{x}$.

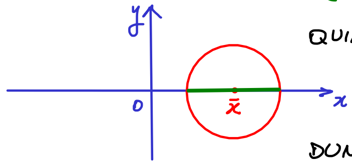
ESEMPIO: CERCHIAMO I PUNTI DI ACCUMULAZIONE DELL'INSIEME $X = \{ (x, y) : y = 0 \} \subset \mathbb{R}^2$

GI 26 OTT 2023

SVOLGIMENTO: PRENDO $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ E MI CHIEDO SE È O MENO UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER X, OVVERO SE APPARTIENE ALL'INSIEME DX (L'INSIEME DERIVATO).

DISTINGUIAMO DUE CASI. ① $\bar{y} = 0$. LA PALLA $B((\bar{x}, 0), \varepsilon)$ CONTIENE IL SEGMENTO

$$(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon) \times \{0\} = \{ (x, 0) : |x - \bar{x}| < \varepsilon \}$$

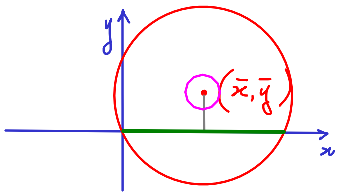


QUINDI CONTIENE INFINITI ELEMENTI DI X E DUNQUE $(\bar{x}, \bar{y}) \in DX$

② $\bar{y} \neq 0$. IN QUESTO CASO, SE $\varepsilon > |\bar{y}|$, LA PALLA $B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$ INTERSECA X LUNGO UN SEGMENTO INDIVIDUATO DALLA DISUGUAGLIANZA

$$(x - \bar{x})^2 + \bar{y}^2 < \varepsilon^2, \quad \text{OVVERO } (x - \bar{x})^2 < \varepsilon^2 - \bar{y}^2:$$

$$B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) \cap X = \left\{ (x, 0) : |x - \bar{x}| < \sqrt{\varepsilon^2 - \bar{y}^2} \right\}$$



IL SEGMENTO HA INFINITI PUNTI. SE PERÒ PRENDO $\varepsilon < |\bar{y}|$ HO CHE

$$B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) \cap X = \emptyset$$

JEAN DIEUDONNÉ, ANDRÉ WEIL, HENRI CARTAN E CLAUDE CHEVALLEY FONDARONO IL GRUPPO BOURBAKI

POICHÉ PER TALUNI VALORI DI ε L'INTERSEZIONE $B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) \cap X$ È VUOTA, IL PUNTO $(\bar{x}, \bar{y})$ NON È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER X.

IN CONCLUSIONE SI HA $DX = X$.

ESEMPIO: L'INSIEME $X = \{ (x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R} \}$ COINCIDE CON IL DERIVATO DX.

FELIX HAUSDORFF FONDÒ LA TOPOLOGIA GENERALE BASATA SULL'INSIEME $\mathcal{U}$ DI TUTTI I SOTTOINSIEMI APERTI DI UN DATO INSIEME Ω

GI 26 OTT 2023

CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI

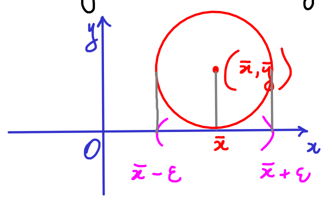
DEFINIZIONE: UNA $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^N$, SI DICE CONTINUA IN UN PUNTO $\bar{x} \in X$ SE:

① NEL CASO IN CUI $\bar x \in DX$: PER OGNI $\varepsilon \in (0,+\infty)$ ESISTE $\delta \in (0,+\infty)$ TALE CHE PER OGNI $x \in B(\bar x, \delta) \cap X$ RISULTA $|f(x)-f(\bar x)| < \varepsilon$.

② NEL CASO IN CUI $\bar x \notin DX$: f È CONTINUA.

ESEMPIO: $X=\mathbb{N}$, $f: X\to\mathbb{R}$, $f(x)=x!$ PER OGNI $x\in\mathbb{N}$, È CONTINUA.

ESEMPIO: LA FUNZIONE $\pi_1(x,y)$ DATA DA $\pi_1(x,y)=x$ PER $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ È CONTINUA:



PER OGNI $\varepsilon\in(0,+\infty)$ PRENDO $\delta=\varepsilon$ ED HO CHE $\pi_1(B((\bar x,\bar y),\delta)) \subset (\bar x-\varepsilon, \bar x+\varepsilon)$

IN GENERALE, LA FUNZIONE $\pi_i(x)$ DATA DA $\pi_i(x)=x_i$ PER $x\in\mathbb{R}^N$ È CONTINUA QUALUNQUE SIA $i\in\{1,\dots,N\}$.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE $f(x)$ E $g(x)$ SONO CONTINUE IN UNO STESSO PUNTO $\bar x$, ALLORA ANCHE LE FUNZIONI $f(x)\pm g(x)$ E $f(x)\cdot g(x)$ LO SONO. SE POI $g(\bar x)\neq 0$ ALLORA LA FUNZIONE $\frac{f(x)}{g(x)}$ È CONTINUA NEL PUNTO $\bar x$.

INOLTRE, SE f È CONTINUA IN UN PUNTO $\bar x$, ALLORA ANCHE $\operatorname{sen} f(x)$, $\cos f(x)$, $e^{f(x)}$ SONO CONTINUE IN $\bar x$. SE POI $f(\bar x)>0$ ALLORA ANCHE $(f(x))^\alpha$, $\log(f(x))$ LO SONO.

IN GENERALE, SE IL VALORE $f(\bar x)$ STA NEL DOMINIO DI UNA FUNZIONE CONTINUA $\varphi(t)$ DELLA VARIABILE REALE t, ALLORA LA FUNZIONE COMPOSTA $\varphi(f(x))$ È CONTINUA NEL PUNTO $\bar x$.

APPLICAZIONE: LA FUNZIONE $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ È $\varphi(x^2+y^2)$ CON $\varphi(t)=\sqrt{t}$.

LA $g(x,y)=x^2+y^2$ È $g(x,y)=(\pi_1(x,y))^2+(\pi_2(x,y))^2$

INFINE $(\pi_1(x,y))^2$ È $\varphi(\pi_1(x,y))$ CON $\varphi(t)=t^2$

VE 03 NOV 2023

ESERCIZIO: DIMOSTRARE CHE SE f,g SONO CONTINUE IN UN PUNTO $\bar x$, ALLORA ANCHE LA FUNZIONE $f(x)+g(x)$ LO È. SVOLGIMENTO. VOGLIO DIMOSTRARE CHE $|f(x)+g(x)-(f(\bar x)+g(\bar x))|<\varepsilon$ SE PRENDO $x\in B(\bar x,\delta)$. DEVO TROVARE UN δ ADATTO. SO CHE ESISTONO δ_1 E $\delta_2\in(0,+\infty)$ TALI CHE:

$|f(x)-f(\bar x)|<\varepsilon$ PER $x\in B(\bar x,\delta_1)$

$|g(x)-g(\bar x)|<\varepsilon$ PER $x\in B(\bar x,\delta_2)$

PERCIÒ, POSTO $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ HO CHE NELLA PALLA $B(\bar x,\delta)=B(\bar x,\delta_1)\cap B(\bar x,\delta_2)$ RISULTA

$$|f(x)+g(x)-(f(\bar x)+g(\bar x))| = |f(x)-f(\bar x)+g(x)-g(\bar x)|$$

$$\le |f(x)-f(\bar x)|+|g(x)-g(\bar x)| < 2\varepsilon$$

E LA TESI SEGUE PER L'ARBITRARIETÀ DI ε.

VE 03 NOV 2023

DERIVATE PARZIALI

DEFINIZIONE. DATO $X \subset \mathbb{R}^N$ E UN PUNTO INTERNO $\bar{x} \in B(\bar{x}, r) \subset X$, UNA FUNZIONE $f: X \to \mathbb{R}$ SI DICE DERIVABILE PARZIALMENTE RISPETTO ALLA VARIABILE x_1 NEL PUNTO $\bar{x}$ SE LA FUNZIONE $\varphi_1(x_1) = f(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$ È DERIVABILE NEL PUNTO $x_1 = \bar{x}_1$.

IN TAL CASO LA DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A x_1 NEL PUNTO $\bar{x}$ SI DEFINISCE PONENDO

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = \frac{d\varphi_1}{dx_1}(\bar{x}_1) = \varphi_1'(\bar{x}_1).$$

IN MODO ANALOGO SI DEFINISCE $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ PER $i = 2, \dots, N$.

EQUIVALENTEMENTE, SE ESISTE FINITO IL LIMITE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N) - f(\bar{x})}{h}$$

LA FUNZIONE f SI DICE DERIVABILE PARZIALMENTE RISPETTO ALLA VARIABILE x_1 NEL PUNTO $\bar{x}$, ED IL VALORE DEL SUDDETTO LIMITE SI CHIAMA DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A x_1 NEL PUNTO $\bar{x}$ E SI DENOTA CON

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}).$$

IN MODO ANALOGO SI DEFINISCE $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ PER $i = 2, \dots, N$.

ESEMPIO. POSTO $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ E $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ RISULTA $\varphi_1(x) = f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$. SICCOME $\varphi_1(x)$ NON È DERIVABILE IN $x = \bar{x} = 0$, LA FUNZIONE $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ NON È DERIVABILE PARZIALMENTE RISPETTO ALLA x NEL PUNTO $(0,0)$.

PER RAGIONI ANALOGHE, LA $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ NON È DERIVABILE PARZIALMENTE RISPETTO ALLA y NEL PUNTO $(0,0)$. PRENDIAMO ALLORA $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0,0)$. SI TROVA $\varphi_1(x) = \sqrt{x^2 + \bar{y}^2}$ E SAPPIAMO CHE $\varphi_1'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \bar{y}^2}}$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ E QUINDI

$$\varphi_1'(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}$$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}$$

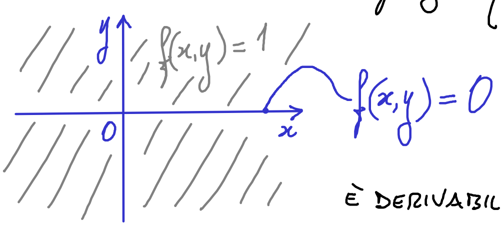
QUALUNQUE SIA $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0,0)$ E SIMILMENTE $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}$.

NOTA: UNA VOLTA ASSIMILATA LA DEFINIZIONE, I SOPRASSEGNI NON SI SCRIVONO. ESEMPIO:

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{PER } (x,y) \neq (0,0).$$

NOTA BENE: SE $N \geq 2$, LA DERIVABILITÀ PARZIALE DI $f(x)$ RISPETTO AD x_i PER OGNI $i = 1, \dots, N$ IN UN PUNTO $\bar{x}$ NON IMPLICA LA CONTINUITÀ DI $f(x)$ NEL PUNTO $\bar{x}$.

ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{SE } xy = 0 \\ 1, & \text{SE } xy \neq 0 \end{cases}$



È DERIVABILE PARZIALMENTE RISPETTO ALLA x IN TUTTI I PUNTI $(\bar{x}, \bar{y})$ CON $\bar{x} \neq 0$ E ANCHE NEL PUNTO $(0,0)$. NON LO È NEI PUNTI $(0, \bar{y})$ CON $\bar{y} \neq 0$: ESERCIZIO

CONSIDERIAMO IL PUNTO $(\bar{x},\bar{y})=(0,0)$. SI HA $\varphi_1(x)=f(x,0)=0$ PER OGNI $x\in\mathbb{R}$ E PERCIÒ $\varphi_1'(x)=0$ PER OGNI x E IN PARTICOLARE $\varphi_1'(0)=0$ DUNQUE $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. SIMILMENTE SI TROVA $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. CIÒ NON OSTANTE, f È DISCONTINUA NELL'ORIGINE. SI HA, INFATTI, $f(0,0)=0$. PRESO $\varepsilon\in(0,+\infty)$ DEVO VEDERE SE $|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$ CIOÈ $|f(x,y)|<\varepsilon$ CIOÈ $f(x,y)<\varepsilon$ IN UN CERCHIO $B((0,0),\delta)$ CON δ OPPORTUNO.

PER CONFUTARE LA TESI BASTA PRENDERE $\varepsilon\le 1$: IN TAL CASO, QUALUNQUE SIA $\delta\in(0,+\infty)$ IL CERCHIO $B((0,0),\delta)$ CONTIENE IL PUNTO $\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)$ DOVE $f\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)=1$ QUINDI LA DISUGUAGLIANZA $f(x,y)<\varepsilon$ NON È SODDISFATTA IN TALE PUNTO.

L'ANALOGO MULTIDIMENSIONALE DELLA DERIVABILITÀ NON È, DUNQUE, LA DERIVABILITÀ PARZIALE, MA È LA DIFFERENZIABILITÀ.

PREMESSA: UNA $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ CONTINUA IN UN PUNTO $x_0\in(a,b)$ SI DICE DIFFERENZIABILE NEL PUNTO x_0 SE ESISTONO $m,q\in\mathbb{R}$ TALI CHE

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(mx+q)}{x-x_0}=0$$

SI DIMOSTRA CHE f È DIFFERENZIABILE SE E SOLO SE È DERIVABILE, E IN TAL CASO $m=f'(x_0)$ E LA RETTA DI EQUAZIONE $y=mx+q$ È LA RETTA TANGENTE NEL PUNTO x_0.

$$\boxed{\text{LIMITE DI UNA } f:X\longrightarrow\mathbb{R} \text{ CON } X\subset\mathbb{R}^N}$$

SCELTO $\bar{x}\in DX$, SI DICE CHE $f(x)$ TENDE AD $\ell\in\mathbb{R}$ PER $x\to\bar{x}$ E SI SCRIVE $f(x)\xrightarrow[x\to\bar{x}]{}\ell$ OPPURE $\lim_{x\to\bar{x}}f(x)=\ell$ SE PER OGNI $\varepsilon\in(0,+\infty)$ ESISTE UN OPPORTUNO $\delta\in(0,+\infty)$ TALE CHE $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ IN $(B(\bar{x},\delta)\setminus\{\bar{x}\})\cap X$.

IL LIMITE NON C'ENTRA CON LA CONDIZIONE $\bar{x}\in X$ NÉ TANTOMENO CON IL VALORE DI $f(\bar{x})$.

RELAZIONE TRA IL LIMITE E LA CONTINUITÀ

SE $\bar{x}\in X\cap DX$ POSSO APPLICARE ENTRAMBE LE DEFINIZIONI E TROVO CHE f È CONTINUA NEL PUNTO $\bar{x}$ SE E SOLO SE $\lim_{x\to\bar{x}}f(x)=f(\bar{x})$.

ESERCIZIO: DEFINIRE UNA $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ TALE CHE $\lim_{x,y\to 0}f(x,y)\neq f(0,0)$.

LIMITE INFINITO: SI PONE $\lim_{x\to\bar{x}}f(x)=+\infty$ SE PER OGNI $M\in\mathbb{R}$ ESISTE UN OPPORTUNO $\delta\in(0,+\infty)$ TALE CHE $f(x)>M$ IN $(B(\bar{x},\delta)\cap X)\setminus\{\bar{x}\}=(B(\bar{x},\delta)\setminus\{\bar{x}\})\cap X$. SI PONE, INVECE, $\lim_{x\to\bar{x}}f(x)=-\infty$ SE PER OGNI $M\in\mathbb{R}$ ESISTE UN OPPORTUNO $\delta\in(0,+\infty)$ TALE CHE $f(x)<M$ IN $(B(\bar{x},\delta)\setminus\{\bar{x}\})\cap X$.

LA DIFFERENZIABILITÀ

DEFINIZIONE: DATO UN SOTTOINSIEME $X \subset \mathbb{R}^N$ ED UN PUNTO INTERNO $\bar{x} \in B(\bar{x}, r) \subset X$, UNA FUNZIONE $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA NEL PUNTO $\bar{x}$ SI DICE DIFFERENZIABILE NEL PUNTO $\bar{x}$ SE ESISTONO $m_1, \dots, m_N$ E q TALI CHE

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i + q\right)}{\| x - \bar{x} \|} = 0$$

NOTAZIONE: CONVIENE SCRIVERE $\sum_{i=1}^{N} m_i x_i + q$

$= \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - \bar{x}_i) + \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{x}_i + q$ IN MODO

CHE LA DEFINIZIONE DIVENTA

$$\frac{f(x) - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - \bar{x}_i) + \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{x}_i + q\right)}{\| x - \bar{x} \|} =$$

$$= \frac{f(x) - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \bar{x}_i + q\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - \bar{x}_i)}{\| x - \bar{x} \|}$$

$= o(1)$ IL CHE EQUIVALE A

$$f(x) - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \bar{x}_i + q\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - \bar{x}_i) =$$

$= o(1) \cdot \| x - \bar{x} \| = o(x - \bar{x})$ OVVERO

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \bar{x}_i + q\right) + \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - \bar{x}_i) +$$

$+ o(x - \bar{x})$ DA CUI SEGUE IMMEDIATAMENTE

CHE $f(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{x}_i + q$.

MA 07 NOV 2023

CONCLUSIONE: SFRUTTANDO L'IPOTESI $f(x) \to f(\bar{x})$ PER $x \to \bar{x}$, LA CONDIZIONE

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i + q\right)}{\| x - \bar{x} \|} = 0$$

SI PUÒ RISCRIVERE

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - \bar{x}_i)}{\| x - \bar{x} \|} = 0$$

VICEVERSA: SE f SODDISFA QUEST'ULTIMA CONDIZIONE, ALLORA È CONTINUA IN $\bar{x}$ E SODDISFA ANCHE LA PRECEDENTE. INFATTI DA

$$\frac{f(x) - f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - \bar{x}_i)}{\| x - \bar{x} \|} = o(1)$$ SEGUE

CHE $f(x) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - \bar{x}_i) + o(x - \bar{x})$

$\xrightarrow[x \to \bar{x}]{} f(\bar{x})$ DUNQUE f È CONTINUA IN $\bar{x}$.

INOLTRE, POSTO $q = f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{x}_i$ TROVIAMO

$$\frac{f(x) - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i + q\right)}{\| x - \bar{x} \|} =$$

$$\frac{f(x) - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i + f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{x}_i\right)}{\| x - \bar{x} \|} =$$

$$= \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - \bar{x}_i)}{\| x - \bar{x} \|} \longrightarrow 0$$

GI 09 NOV 2023

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA DIFFERENZIABILITÀ

UNA FUNZIONE $f: X \to \mathbb{R}$ CON $X \subset \mathbb{R}^N$ È DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO $\bar{x} \in B(\bar{x}, r) \subset X$ SE E SOLO SE ESISTE UN PIANO OPPORTUNO $z(x) = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i + q$ CHE:

1) PASSA PER IL PUNTO $(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{N+1}$ E TALE CHE 2) $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - z(x)}{\| x - \bar{x} \|} = 0.$

IL SUDDETTO PIANO $z = z(x)$ SI CHIAMA PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO $(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

DIMOSTRAZIONE DELL'ASSERTO

PRIMA PARTE: SUPPONIAMO CHE f SIA DIFFERENZIABILE NEL PUNTO $\bar{x}$. ALLORA f È ivi CONTINUA ED ESISTONO COSTANTI $m_1, \dots, m_N$ E q TALI CHE

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i + q\right)}{\| x - \bar{x} \|} = 0.$$

QUINDI, POSTO $z(x) = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i + q$ RISULTA

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - z(x)}{\| x - \bar{x} \|} = 0.$$

RESTA DA VERIFICARE IL PASSAGGIO DI $z(x)$ PER IL PUNTO $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, CIOÈ IL FATTO CHE $z(\bar{x}) = f(\bar{x})$. PER FARLO, SFRUTTIAMO LA CONTINUITÀ DI $z(x) = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i + q$ E RAPPRESENTIAMO $z(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}} z(x)$.

SAPENDO CHE $\frac{f(x) - z(x)}{\| x - \bar{x} \|} = o(1)$ POSSIAMO SCRIVERE $z(x) = f(x) + o(x - \bar{x})$, E SICCOME f È CONTINUA PER IPOTESI DEDUCIAMO CHE $z(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}} z(x) = f(\bar{x})$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

SECONDA PARTE. SUPPONIAMO CHE ESISTA UN PIANO $z(x) = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i + q$ TALE CHE $z(\bar{x}) = f(\bar{x})$ E $\frac{f(x) - z(x)}{\| x - \bar{x} \|} = o(1)$. ALLORA, EVIDENTEMENTE,

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i + q\right)}{\| x - \bar{x} \|} = 0.$$

RESTA DA VERIFICARE CHE f È CONTINUA NEL PUNTO $\bar{x}$, CIOÈ CHE $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$. PER FARLO, SCRIVO $f(\bar{x}) = z(\bar{x})$ (PASSAGGIO PER IL PUNTO DI TANGENZA) E RAPPRESENTO $f(x) = z(x) + o(x - \bar{x})$ QUINDI $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \lim_{x \to \bar{x}} z(x) = z(\bar{x}) = f(\bar{x})$ E LA DIMOSTRAZIONE È COMPLETA.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE IL PIANO TANGENTE AL GRAFICO DELLA FUNZIONE $f(x, y) = x^2 + y^2$ NELL'ORIGINE È IL PIANO $z = 0$.

GI 09 NOV 2023

ESEMPIO: VERIFICHIAMO CHE IL PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ NEL PUNTO $(0,0,R)$ È IL PIANO $z=R$.

1) SI HA, EVIDENTEMENTE, $z(0,0)=R=f(0,0)$.

2) $$\frac{f(x,y)-z(x,y)}{\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}}=\frac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}-R}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}-R}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}+R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}+R}$$

$$=\frac{-(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}+R\right)}=$$

$$=\frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}+R}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

OSSERVAZIONE: LA CONDIZIONE

$$\lim_{x\to\bar{x}}\frac{f(x)-f(\bar{x})-\sum_{i=1}^{N}m_i(x_i-\bar{x}_i)}{\|x-\bar{x}\|}=0$$

ESPRIME IL FATTO CHE L'INCREMENTO $\Delta f=f(x)-f(\bar{x})$ DIFFERISCE DALLA COMBINAZIONE LINEARE $\sum_{i=1}^{N}m_i(x_i-\bar{x}_i)=\sum_{i=1}^{N}m_i\,\Delta x_i$ PER UN $o(x-\bar{x})$.

TEOREMA: SE $f:X\to\mathbb{R}$ È DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO $\bar{x}\in B(\bar{x},r)\subset X\subset\mathbb{R}^N$ ALLORA È IVI DERIVABILE PARZIALMENTE, E RISULTA CHE

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})=m_i \quad \text{PER OGNI } i=1,\dots,N.$$

DIMOSTRAZIONE. FACCIAMO IL CASO $i=1$ ESSENDO GLI ALTRI ANALOGHI. CALCOLIAMO $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})=$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(\bar{x}_1+h,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_N)-f(\bar{x})}{h}.$$

POSTO $x_i=\bar{x}_i$ PER $i\geq2$ NELL'IPOTESI

$$\lim_{x\to\bar{x}}\frac{f(x)-f(\bar{x})-\sum_{i=1}^{N}m_i(x_i-\bar{x}_i)}{\|x-\bar{x}\|}=0$$

TROVIAMO $$\lim_{x_1\to\bar{x}_1}\frac{f(x_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_N)-f(\bar{x})-m_1(x_1-\bar{x}_1)}{|x_1-\bar{x}_1|}=0$$ QUINDI:

$$0=\lim_{x_1\to\bar{x}_1^+}\frac{f(x_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_N)-f(\bar{x})-m_1(x_1-\bar{x}_1)}{x_1-\bar{x}_1}$$

$$=\lim_{x_1\to\bar{x}_1^+}\frac{f(x_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_N)-f(\bar{x})}{x_1-\bar{x}_1}-m_1$$ DA CUI

$$\lim_{x_1\to\bar{x}_1^+}\frac{f(x_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_N)-f(\bar{x})}{x_1-\bar{x}_1}=m_1.$$

GI 09 NOV 2023

INOLTRE, SICCOME $0 =$

$$= \lim_{x_1 \to \bar{x}_1^-} \frac{f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N) - f(\bar{x}) - m_1(x_1 - \bar{x}_1)}{|x_1 - \bar{x}_1|}$$

$$= \lim_{x_1 \to \bar{x}_1^-} \frac{f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N) - f(\bar{x}) - m_1(x_1 - \bar{x}_1)}{-(x_1 - \bar{x}_1)}$$

$$= - \lim_{x_1 \to \bar{x}_1^-} \frac{f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N) - f(\bar{x}) - m_1(x_1 - \bar{x}_1)}{x_1 - \bar{x}_1}$$

POSSIAMO ANCHE SCRIVERE

$$\lim_{x_1 \to \bar{x}_1^-} \frac{f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N) - f(\bar{x}) - m_1(x_1 - \bar{x}_1)}{x_1 - \bar{x}_1} = 0$$

E DEDURRE CHE $\displaystyle \lim_{x_1 \to \bar{x}_1^-} \frac{f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N) - f(\bar{x})}{x_1 - \bar{x}_1} =$

$= m_1$ E LA TESI SEGUE.

MA 14 NOV 2023

IL DIFFERENZIALE

DATA UNA $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^N$, DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO INTERNO $\bar{x} \in B(\bar{x}, r) \subset X$, IL DIFFERENZIALE df IN TALE PUNTO È L'APPLICAZIONE LINEARE CHE AL VETTORE $h = (h_1, \ldots, h_N) \in \mathbb{R}^N$ ASSOCIA $\displaystyle \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \cdot h_i$.

OSSERVAZIONE: USANDO IL DIFFERENZIALE, LA DEFINIZIONE DELLA DIFFERENZIABILITÀ DIVENTA $\Delta f - df(x - \bar{x}) = o(x - \bar{x})$

MA 14 NOV 2023

MOSTRIAMO CON UN CONTROESEMPIO CHE NON VALE IL VICEVERSA: LA FUNZIONE

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{SE } xy = 0 \\ 1, & \text{SE } xy \neq 0 \end{cases}$$

È DERIVABILE PARZIALMENTE NELL'ORIGINE E SAPPIAMO CHE $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. SAPPIAMO ANCHE (3 NOV) CHE f È DISCONTINUA IN $(0,0)$ QUINDI POSSIAMO CONCLUDERE CHE NON È DIFFERENZIABILE IN TALE PUNTO.

DERIVATE DIREZIONALI

DATA $f: X \to \mathbb{R}$ CON $X \subset \mathbb{R}^N$ E PRESO $\bar{x} \in B(\bar{x}, r) \subset X$ CONSIDERIAMO LA RETTA $x = \bar{x} + tv$ CON $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ E $t \in \mathbb{R}^N$.

SE LA FUNZIONE $\varphi(t) = f(\bar{x} + tv)$ È DERIVABILE PER $t = 0$ SI DICE CHE ESISTE LA DERIVATA DIREZIONALE DI $f(x)$ RISPETTO A v NEL PUNTO $\bar{x}$ E SI SCRIVE $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \varphi'(0)$.

NOTA: SE $v = e_i$ VERSORE DELL'ASSE x_i RISULTA

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}).$$

MA 14 NOV 2023

FORMULA DEL GRADIENTE

SE UNA $f : X \to \mathbb{R}$ CON $X \subset \mathbb{R}^N$ È DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO $\bar{x} \in B(\bar{x}, r) \subset X$ SI PUÒ DEFINIRE IL GRADIENTE DI f NEL PUNTO $\bar{x}$ PONENDO $\text{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\right)$

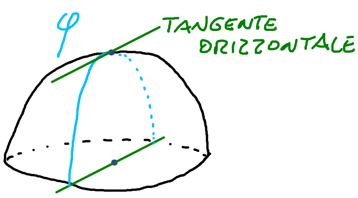
E SI DIMOSTRA CHE PER OGNI $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ RISULTA $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = v \cdot \nabla f(\bar{x})$.

ESEMPIO. PRENDIAMO $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ E SAPPIAMO CHE $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ E $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ E CHE f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ CON PIANO TANGENTE $z = R$.

IL GRADIENTE È PERTANTO $\nabla f(0,0) = (0,0)$

E LA FORMULA DEL GRADIENTE IMPLICA CHE PER OGNI $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ RISULTA

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = v \cdot \nabla f(0,0) = 0$$



GI 16 NOV 2023

OSSERVAZIONI:

- SE $v_1 = \lambda v_2 \neq \bar{0}$ HO CHE $\frac{\partial f}{\partial v_1}(\bar{x}) = v_1 \cdot \nabla f(\bar{x}) = \lambda v_2 \cdot \nabla f(\bar{x}) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v_2}(\bar{x})$
- MA ALLORA, POSTO $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$ HO CHE $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \|v\| \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\bar{x})$.
- SE $v \perp \nabla f(\bar{x})$ AVRÒ $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = 0$.
- SAPPIAMO CHE $|\hat{v} \cdot \nabla f| \leq \|\hat{v}\| \cdot \|\nabla f(\bar{x})\| = \|\nabla f(\bar{x})\|$ QUINDI $\left|\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\bar{x})\right| \leq \|\nabla f(\bar{x})\|$
- QUANDO $\hat{v} = \frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}$ TROVO

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\bar{x}) = \hat{v} \cdot \nabla f(\bar{x}) = \frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|} \cdot \nabla f(\bar{x}) = \|\nabla f(\bar{x})\|}$$

E SIMILMENTE

$$\frac{\partial f}{\partial(-\hat{v})}(\bar{x}) = -\|\nabla f(\bar{x})\|$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE $f \in C^1$ CIOÈ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ CONTINUA PER OGNI i, E SE $\nabla f(\bar{x}) \neq \bar{0}$ ALLORA $\nabla f(\bar{x})$ È PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE DI LIVELLO $\{x \in X : f(x) = f(\bar{x})\}$.

GI 16 NOV 2023

IL PIANO TANGENTE

SE $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^N$, È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x} \in B(\bar{x}, r) \subset X$, L'EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO $(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{N+1}$ È

$$\boxed{z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})\cdot(x_i - \bar{x}_i) + f(\bar{x})}$$

POSSIAMO ANCHE SCRIVERE

$$\boxed{z(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}$$

E POSSIAMO RIFORMULARE LA DIFFERENZIABILITÀ DI f IN $\bar{x}$ SCRIVENDO

$$\boxed{f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})}$$

FORMULA DI TAYLOR AL PRIMO ORDINE PER UNA FUNZIONE DI N VARIABILI

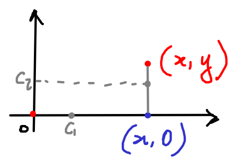
TEOREMA: LE FUNZIONI DI CLASSE C^1 SONO DIFFERENZIABILI.

SEGUE DAL LEMMA: SE ESISTONO $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ IN UNA $B(\bar{x}, r)$ PER OGNI $i = 1, \dots, N$ E SE

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \text{ PER OGNI } i = 1, \dots, N$$

ALLORA f È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$.

DIMOSTRIAMOLO PER $N = 2$ E $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ CONTINUE IN $(0,0)$. VOGLIAMO VERIFICARE CHE $f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. SCRIVIAMO $f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) - f(x,0) + f(x,0) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, c_2(x,y))\cdot y + \frac{\partial f}{\partial x}(c_1(x), 0)\cdot x$



PER IL TEOREMA DI LAGRANGE.

PER IPOTESI $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + o(1)$ E $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + o(1)$ QUINDI

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + o(1)\,x + o(1)\,y =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + o(1)\sqrt{x^2+y^2} + o(1)\sqrt{x^2+y^2}$$

DA CUI LA TESI

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA!

DATA UNA $f(x,y)$ DIFFERENZIABILE E DUE FUNZIONI DERIVABILI $x = x(t)$ E $y = y(t)$, LA FUNZIONE $f(x(t), y(t))$ È DERIVABILE E SI TROVA CHE

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

IN GENERALE, SE $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^N$ È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ E LA FUNZIONE $x(t)$ È DERIVABILE NELL'ISTANTE t_0 DOVE $x(t_0) = \bar{x}$ ALLORA $f(x(t))$ È DERIVABILE IN t_0 E $\left.\frac{d}{dt} f(x(t))\right|_{t_0} = \nabla f(\bar{x}) \cdot x'(t_0)$.

DEFINIZIONE: UNA FUNZIONE $x(t) \in \mathbb{R}^N$ SI DICE DERIVABILE ALL'ISTANTE t_0 SE LO SONO LE SUE COMPONENTI $(x_1(t), \dots, x_N(t)) = x(t)$ E IN TAL CASO SI DEFINISCE $x'(t) = (x_1'(t), \dots, x_N'(t))$. EQUIVALENTEMENTE, SI PUÒ DEFINIRE

$$x'(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

SE QUESTO LIMITE ESISTE. SI DICE CHE $\lim_{t \to t_0} x(t) = \bar{x} \in \mathbb{R}^N$ SE RISULTA $\lim_{t \to t_0} x_i(t) = \bar{x}_i$ PER OGNI $i = 1, \dots, N$ OVVERO SE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE $\| x(t) - \bar{x} \| < \varepsilon$ PER OGNI $t \neq t_0$ NELL'INTERVALLO $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

MA 21 NOV 2023

VEDIAMO LA DIMOSTRAZIONE NEL CASO $N = 2$, $\bar{x} = \bar{0}$, $t_0 = 0$. ABBIAMO DUNQUE $f(x,y)$ DIFFERENZIABILE NELL'ORIGINE: $f(x,y) - f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ E DUE FUNZIONI $x(t)$, $y(t)$ DERIVABILI IN $t_0 = 0$ E TALI CHE $x(0) = y(0) = 0$.

POSTO $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ VOGLIAMO VERIFICARE CHE $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, y'(0)$.

BASTA CALCOLARE IL $\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$. SI TROVA CHE

$$\varphi(t) - \varphi(0) = f(x(t), y(t)) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, x(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, y(t) + o\left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right)$$

E QUINDI

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \frac{x(t)}{t} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \frac{y(t)}{t} + \frac{o\left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right)}{t}.$$

PASSANDO AL LIMITE SI HA LA TESI, PERCHÉ $\frac{x(t)}{t} \longrightarrow x'(0)$, $\frac{y(t)}{t} \longrightarrow y'(0)$ E

$$\frac{o\left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right)}{t} = \frac{o\left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \cdot \frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}{t} \longrightarrow 0$$

IN QUANTO

$$\frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}{|t|} = \sqrt{\frac{x^2(t) + y^2(t)}{t^2}} = \sqrt{\left(\frac{x(t)}{t}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{t}\right)^2} \longrightarrow \sqrt{(x'(0))^2 + (y'(0))^2}$$

MA 21 NOV 2023

ESEMPIO: $\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$ È UNA FUNZIONE DA $\mathbb{R}$ VERSO $\mathbb{R}^2$. PRESA DUNQUE UNA $f(x,y)$ DIFFERENZIABILE, HO CHE $\frac{d}{dt} f(R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t) =$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t) \cdot R\,\mathrm{sen}\, t + \frac{\partial f}{\partial y}(R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t) \cdot R\cos t$$

COROLLARIO (FORMULA DEL GRADIENTE): SE PONIAMO $x = \bar{x} + tv$, $v \in \mathbb{R}^N$, OTTENIAMO

$$\frac{d}{dt} f(x(t))\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot x'(t_0) = v \cdot \nabla f(\bar{x})$$

DERIVATE SUCCESSIVE

SE LA DERIVATA $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ESISTE IN UNA $B(\bar{x}, r) \subset \mathbb{R}^2$ ED È DERIVABILE RISPETTO A x_1 O x_2 RESTANO DEFINITE LE DERIVATE SECONDE $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ E $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$.

SIMILMENTE SI DEFINISCE $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ CON $i, j = 1, \dots, N$ PER UNA $f(x_1, \dots, x_N)$. IN GENERALE LE DERIVATE SECONDE SONO N^2 E SI DISPONGONO IN UNA MATRICE QUADRATA DETTA MATRICE HESSIANA $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^N =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2} \end{pmatrix}$$

INDICATA CON $H_f(x)$ OPPURE $D^2 f(x)$ ECCETERA.

LE DERIVATE $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ SI DICONO DERIVATE PURE,

LE $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ CON $i \neq j$ SI DICONO MISTE.

LA SOMMA $\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ SI DICE LAPLACIANO DI f E SI INDICA CON $\nabla^2 f$ O CON Δf E RISULTA $\Delta f = \mathrm{Tr}(D^2 f)$.

SIMILMENTE SI DEFINISCE $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}$ CON $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$

MA 21 NOV 2023

FORMULA DI TAYLOR AL SECONDO ORDINE CON IL RESTO DI PEANO

SE $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^N$, È DIFFERENZIABILE IN UNA $B(\bar{x}, r) \subset X$ E LE $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ SONO DIFFERENZIABILI NEL PUNTO $\bar{x}$ ALLORA

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x}) D^2 f(\bar{x}) \cdot \begin{pmatrix} x - \bar{x} \end{pmatrix} + o(\|x - \bar{x}\|^2).$$

ESERCIZIO: TROVARE LO SVILUPPO DI $f(x,y) = x^2 + y^2$.

ESEMPIO: PRENDIAMO $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ E TROVIAMO $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{-1}{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -\frac{1}{R}$ QUINDI AVREMO $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

$$= R + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(x^2 + y^2) =$$

$$= R + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} -\frac{x}{R} \\ -\frac{y}{R} \end{pmatrix} + o(x^2 + y^2) =$$

$= R - \frac{x^2 + y^2}{2R} + o(x^2 + y^2)$. CERCHIAMO RISCONTRO STUDIANDO $\varphi(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$. TROVIAMO

$\varphi'(r) = \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ E $\varphi''(0) = -\frac{1}{R}$ E PERCIÒ

$$\varphi(r) = \sqrt{R^2 - r^2} = R - \frac{1}{2R} r^2 + o(r^2)$$

MA 21 NOV 2023

TEOREMA DI SCHWARZ: SE $f \in C^2$ ALLORA $D^2 f$ È UNA MATRICE SIMMETRICA:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$ (PAG. 323 VOL. 1)

GI 23 NOV 2023

MASSIMI E MINIMI

DATA UNA FUNZIONE $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^N$, UN PUNTO $\bar{x} \in X$ PER IL QUALE RISULTA $f(x) \leq f(\bar{x})$ PER OGNI $x \in X \cap B(\bar{x}, r)$ CON UN r OPPORTUNO SI PUÒ CHIAMARE:

- (PUNTO DI) MASSIMO
- (PUNTO DI) MASSIMO RELATIVO
- (PUNTO DI) MASSIMO LOCALE

SE POI RISULTA $f(x) \leq f(\bar{x})$ PER OGNI $x \in X$, IL PUNTO $\bar{x}$ SI PUÒ CHIAMARE:

- (PUNTO DI) MASSIMO
- PUNTO DI MASSIMO RELATIVO
- (PUNTO DI) MASSIMO LOCALE
- (PUNTO DI) MASSIMO ASSOLUTO
- (PUNTO DI) MASSIMO GLOBALE

IN QUEST'ULTIMO CASO, IL NUMERO $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ SI PUÒ CHIAMARE:

- MASSIMO (DI f)
- VALORE MASSIMO (DI f)

E SI DENOTA CON: $\max_X f$, $\max_{x \in X} f(x)$, $\max\{f(x) : x \in X\}$. ANALOGHE DEFINIZIONI VALGONO PER I PUNTI DI MINIMO.

GI 23 NOV 2023

ESEMPIO: IL PUNTO $(\bar{x},\bar{y})=(0,0)$ È UN PUNTO DI MINIMO DELLA FUNZIONE $f(x,y)=x^2+y^2$ PERCHÉ $f(0,0)=0\leq f(x,y)=x^2+y^2$ PER OGNI $(x,y)\in X=\mathbb{R}^2$ E RISULTA CHE $\min_X f=0$. NOTA: SICCOME $\nabla f(x,y)=$ $=2(x,y)\neq\bar{0}$ PER OGNI $(x,y)\neq(0,0)$, NON CI SONO ALTRI PUNTI DI MINIMO, NÉ CI SONO PUNTI DI MASSIMO.

ESEMPIO: IL PUNTO $(\bar{x},\bar{y})=(0,0)$ È UN PUNTO DI MINIMO PER LA $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ DATA DA $f(x,y)=x^2$ PERCHÉ $f(0,0)=0\leq f(x,y)$ PER OGNI $(x,y)\in X$. IDEM IL PUNTO $(0,\bar{y})$ QUALUNQUE SIA $\bar{y}\in\mathbb{R}$.

ESEMPIO: IL PUNTO $(\bar{x},\bar{y})=(1,0)$ È UN PUNTO DI MINIMO PER $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ PERCHÉ $f(1,0)=0\leq f(x,y)$ PER OGNI $(x,y)\in X=$ $=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 1\}=\bar{B}_1(0,0)\subset\mathbb{R}^2$. IDEM QUALUNQUE $(\bar{x},\bar{y})$ TALE CHE $\bar{x}^2+\bar{y}^2=1$. RISULTA $\min_X f=0$. INOLTRE, L'ORIGINE È UN PUNTO DI MASSIMO PERCHÉ $f(0,0)=1\geq f(x,y)$ $=\sqrt{1-x^2-y^2}$ PER OGNI $(x,y)\in X=\bar{B}_1(0,0)$. QUINDI $\max_X f=1$.

RISULTA DI PARTICOLARE UTILITÀ IL

TEOREMA: SE $\bar{x}\in B(\bar{x},r)\subset X$, E SE ESISTE UNA $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ (OPPURE UNA $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$) ALLORA CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ $\bar{x}$ SIA UN PUNTO DI MASSIMO O DI MINIMO È CHE $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})=0$ (OVVERO $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})=0$).

COROLLARIO: SE f È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ ALLORA LA CONDIZIONE DIVENTA $\nabla f(\bar{x})=\bar{0}$.

OSSERVAZIONE: LA $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ È MINIMA NEI PUNTI $(\bar{x},\bar{y})\in\partial B_1(0,0)=\{(x,y):\ x^2+y^2=1\}$ MA NON È DIFFERENZIABILE IN TALI PUNTI, ANZI, TALI PUNTI NON SONO INTERNI.

OSSERVAZIONE: LA $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ HA UN MINIMO IN $(\bar{x},\bar{y})=(0,0)$ PERCHÉ $f(0,0)=0\leq$ $\leq\sqrt{x^2+y^2}=f(x,y)$ PER OGNI $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. DUNQUE $\min_{\mathbb{R}^2} f=0$. ADESSO $(0,0)$ È INTERNO AL DOMINIO $X=\mathbb{R}^2$ MA $\varphi(t)=f(tv_x,tv_y)$ $=\sqrt{t^2}\sqrt{v_x^2+v_y^2}=|t|$ NON È DERIVABILE ALL'ISTANTE $t=0$ QUINDI f NON È DERIVABILE IN NESSUNA DIREZIONE.

PUÒ ESSERE ANCHE UTILE IL

TEOREMA: SE $\bar{x} \in B(\bar{x}, r) \subset X$ E LA FUNZIONE $f: X \to \mathbb{R}$ È DIFFERENZIABILE DUE VOLTE IN $\bar{x}$ ALLORA CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÉ $\bar{x}$ SIA UN PUNTO DI MINIMO È CHE: $\bar{x}$ SIA UN PUNTO CRITICO, CIOÈ $\nabla f(\bar{x}) = 0$, E LA MATRICE HESSIANA $D^2 f(\bar{x})$ SIA DEFINITA POSITIVA, CIOÈ PER OGNI $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ RISULTI $(v) \, D^2 f(\bar{x}) \begin{pmatrix} v \end{pmatrix} > 0$.

CIÒ EQUIVALE AL FATTO CHE TUTTI GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE SIMMETRICA $D^2 f(\bar{x})$ SIANO POSITIVI.

NOTA: SE $N = 2$, LA MATRICE $D^2 f(\bar{x}) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$ È DEFINITA POSITIVA

SE E SOLO SE $\det D^2 f(\bar{x}) > 0$ E $\mathrm{Tr}\, D^2 f > 0$.

UNA VOLTA STABILITO CHE $\det D^2 f(\bar{x}) > 0$, È SUFFICIENTE CHE $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, O CHE $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$, PER AVERE $\mathrm{Tr}\, D^2 f > 0$.

INFATTI

LA MATRICE SI PUÒ DIAGONALIZZARE E DIVENTA $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ E SI VEDE CHE $(v_x \; v_y) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

$= \lambda_1 v_x^2 + \lambda_2 v_y^2 > 0$ PER OGNI $v \neq 0$ SE E SOLO SE $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. MA SAPPIAMO CHE

$\det D^2 f(\bar{x}) = \lambda_1 \lambda_2$ E $\mathrm{Tr}\, D^2 f(\bar{x}) = \lambda_1 + \lambda_2$

GI 23 NOV 2023

DIMOSTRAZIONE: SAPPIAMO CHE PER $x \to \bar{x}$

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x}) D^2 f(\bar{x}) \cdot \begin{pmatrix} x - \bar{x} \end{pmatrix} + o\left(\|x - \bar{x}\|^2\right)$$

QUINDI $f(x) > f(\bar{x})$ PER OGNI $x \in B(\bar{x}, r) \setminus \{\bar{x}\}$ CON UN r OPPORTUNO.

$$\boxed{\text{CAMPI VETTORIALI}}$$

UNA FUNZIONE $F: X \to \mathbb{R}^k$, CON $X \subset \mathbb{R}^N$ È DATA DA k FUNZIONI SCALARI $f_i: X \to \mathbb{R}$ CHE SONO LE COMPONENTI DI $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$.

ESEMPI: $f(t) = \operatorname{sen} t$ SODDISFA LA DEFINIZIONE CON $N = 1 = k$; $f(x,y) = x^2 + y^2$ LA SODDISFA CON $N = 2$ E $k = 1$. L'APPLICAZIONE LINEARE $L(x,y) =$

$$= (ax + by, \; cx + dy) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

È UN ESEMPIO CON $N = k = 2$ E IN GENERALE, PER $x \in \mathbb{R}^N$ POSSIAMO DEFINIRE $Lx = Ax$ CON A MATRICE A k RIGHE E N COLONNE $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \dots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kN} \end{pmatrix}$

LE k COMPONENTI SCALARI SONO LE FUNZIONI

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \quad \text{PER } i = 1, \dots, k.$$

GI 23 NOV 2023

UN ESEMPIO NON LINEARE: LE COORDINATE POLARI

PER OGNI $\rho \in [0, +\infty)$ ED OGNI $\theta \in \mathbb{R}$ PONIAMO

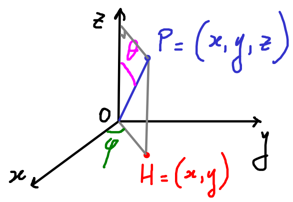
$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

ED OTTENIAMO UNA $F: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ DUNQUE $N = k = 2$.

SIMILMENTE, PER OGNI $\rho \in [0, +\infty)$, $\theta \in (0, \pi)$ E $\varphi \in [0, 2\pi)$ PONIAMO

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

E OTTENIAMO UNA $F: [0, +\infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ DUNQUE $N = k = 3$



$\overline{OH} = \rho \operatorname{sen}\theta$

SE PONIAMO $\rho = R$ FISSATO OTTENIAMO UNA $F(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ LA CUI IMMAGINE STA NELLA SFERA $\partial B_R(0,0,0) \subset \mathbb{R}^3$ QUINDI $N = 2$ E $k = 3$.

SE, INVECE, PONIAMO $\theta = \frac{\pi}{4}$ OTTENIAMO

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \cos\varphi \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \operatorname{sen}\varphi \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \end{cases}$$

CHE È UNA $F: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ LA CUI IMMAGINE È IL CONO $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$.

INFINE, POSTO $\rho = R$ FISSATO E $\theta = \frac{\pi}{4}$, OTTENIAMO

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} R \cos\varphi \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} R \operatorname{sen}\varphi \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} R \end{cases}$$

CHE È UNA $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ LA CUI IMMAGINE È L'INTERSEZIONE DEL CONO PRECEDENTE COL PIANO $z = \frac{\sqrt{2}}{2} R$

MA 28 NOV 2023

MATRICE JACOBIANA

DATA UNA $F: X \to \mathbb{R}^k$, $X \subset \mathbb{R}^N$, E PRESO UN $\bar{x} \in B(\bar{x}, r) \subset X$, SE LE COMPONENTI SCALARI $(f_1(x), \dots, f_k(x)) = F(x)$ SONO DIFFERENZIABILI IN $\bar{x}$ SI DICE CHE F È IVI DIFFERENZIABILE E SI DEFINISCE LA MATRICE JACOBIANA

$$DF(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

ESEMPIO: SE $F(x) = Ax$ CON $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \dots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kN} \end{pmatrix}$

ABBIAMO $f_i(x) = (a_{i1} \dots a_{iN}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j$

QUINDI $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}$ E PERTANTO $DF = A$.

ESEMPIO: DEFINIAMO $F(\rho, \theta) = (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))$

DOVE $\begin{cases} x(\rho, \theta) = \rho \cos\theta \\ y(\rho, \theta) = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$. SI TROVA CHE

$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\theta$; $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho \operatorname{sen}\theta$

$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \operatorname{sen}\theta$; $\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho \cos\theta$

E QUINDI

$$DF(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho \cos\theta \end{pmatrix}$$

MA 28 NOV 2023

ESERCIZIO: CONSIDERIAMO $F(\rho,\theta,\varphi) = \left(x(\rho,\theta,\varphi),\ y(\rho,\theta,\varphi),\ z(\rho,\theta,\varphi)\right)$

DOVE $\begin{cases} x(\rho,\theta,\varphi) = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y(\rho,\theta,\varphi) = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z(\rho,\theta,\varphi) = \rho \cos\theta \end{cases}$

STABILIRE SE F È DIFFERENZIABILE E IN CASO AFFERMATIVO TROVARE LA MATRICE JACOBIANA.

ESERCIZIO: FISSIAMO $R \in (0,+\infty)$ E CONSIDERIAMO

$F(\theta,\varphi) = \left(x(\theta,\varphi),\ y(\theta,\varphi),\ z(\theta,\varphi)\right)$

DOVE $\begin{cases} x(\rho,\theta,\varphi) = R \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y(\rho,\theta,\varphi) = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z(\rho,\theta,\varphi) = R \cos\theta \end{cases}$

STESSA DOMANDA.