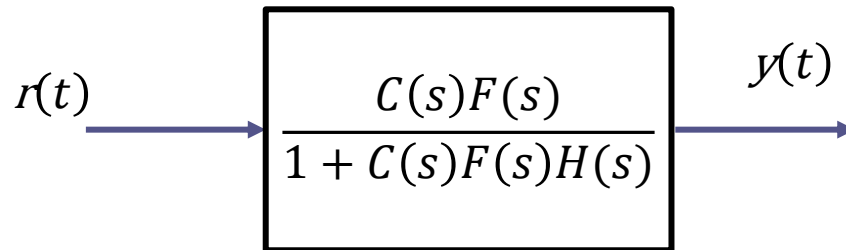


# Controlli automatici

## Sistemi dinamici elementari

**Ing. Alessandro Pisano**  
`pisano@diee.unica.it`

Ripartiamo dalla FdT a ciclo chiuso fra set point e uscita in un sistema di controllo



Sicuramente il controllore  $C(s)$  sarà scelto in modo da rendere asintoticamente stabile tale FdT

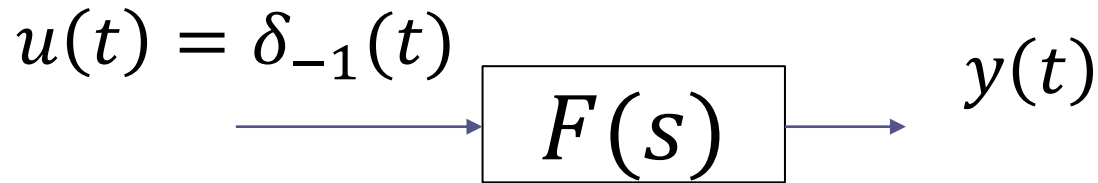
In particolare, stante il fatto che set-point costanti, o costanti a tratti, sono largamente impiegati nei sistemi di regolazione, ci interessa indagare le caratteristiche della **risposta al gradino** di FdT asintoticamente stabili al variare della posizione dei poli e degli zeri.

## ***Risposta al gradino delle FdT elementari***

La **risposta al gradino** è una delle caratteristiche maggiormente significative di un sistema dinamico. Essa infatti ne “cattura” le principali dinamiche, ed una chiara comprensione di come le sue caratteristiche siano influenzate dai parametri del sistema (guadagno, poli e zeri) è di grande rilevanza nell’ambito della analisi e della progettazione dei sistemi di controllo

In questa sede analizziamo le risposte al gradino di “semplici” FdT (FdT elementari) **asintoticamente stabili**, illustrando nel contempo alcuni concetti grazie ai quali desumere le principali caratteristiche della risposta al gradino di processi aventi una struttura più complicata.

## Risposta al gradino unitario



Dalla definizione di FdT: 
$$Y(s) = F(s)U(s) = F(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

Si ha pertanto, antitrasformando: 
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s} \right\}$$

Ovviamente:

$$u(t) = R \delta_{-1}(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = R \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s} \right\}$$

Ricordiamo che:

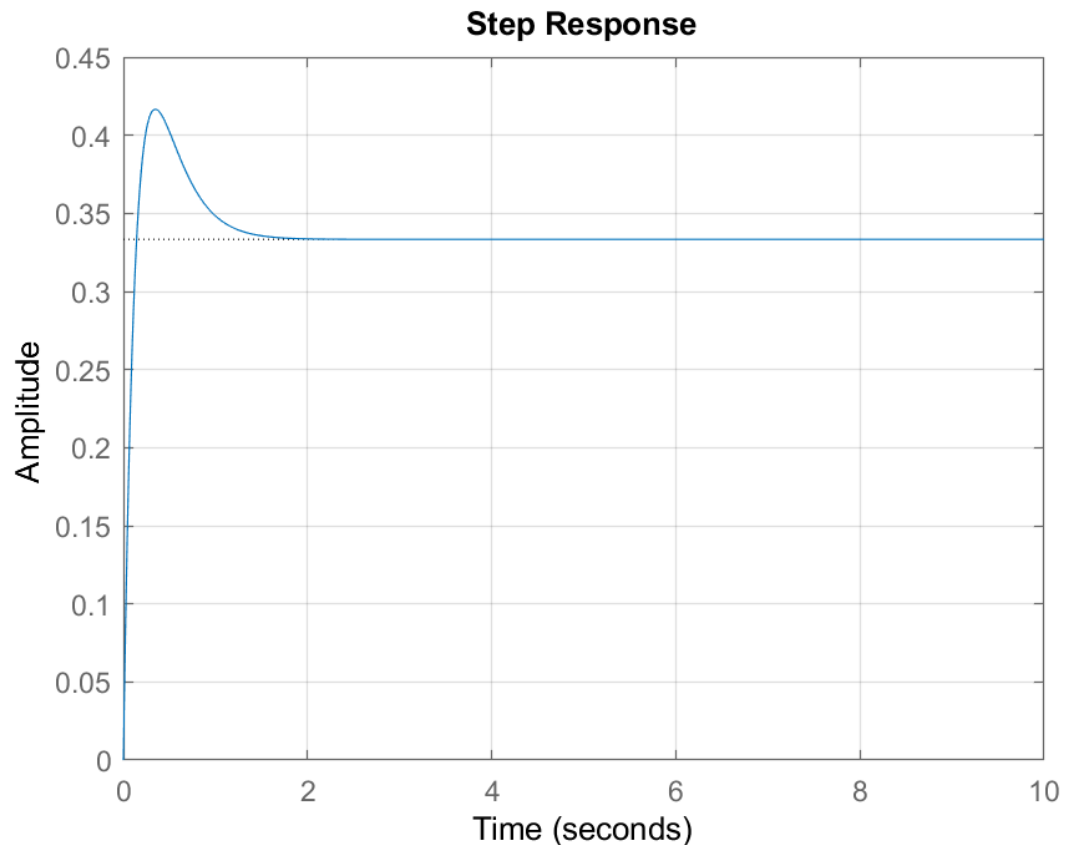
La risposta al gradino unitario di un sistema asintoticamente stabile (cioè un sistema con tutti i poli strettamente contenuti nel semipiano sinistro) tende asintoticamente al valore del guadagno statico

$$F(s) = \frac{4(s + 2)}{(s + 4)(s + 6)}$$

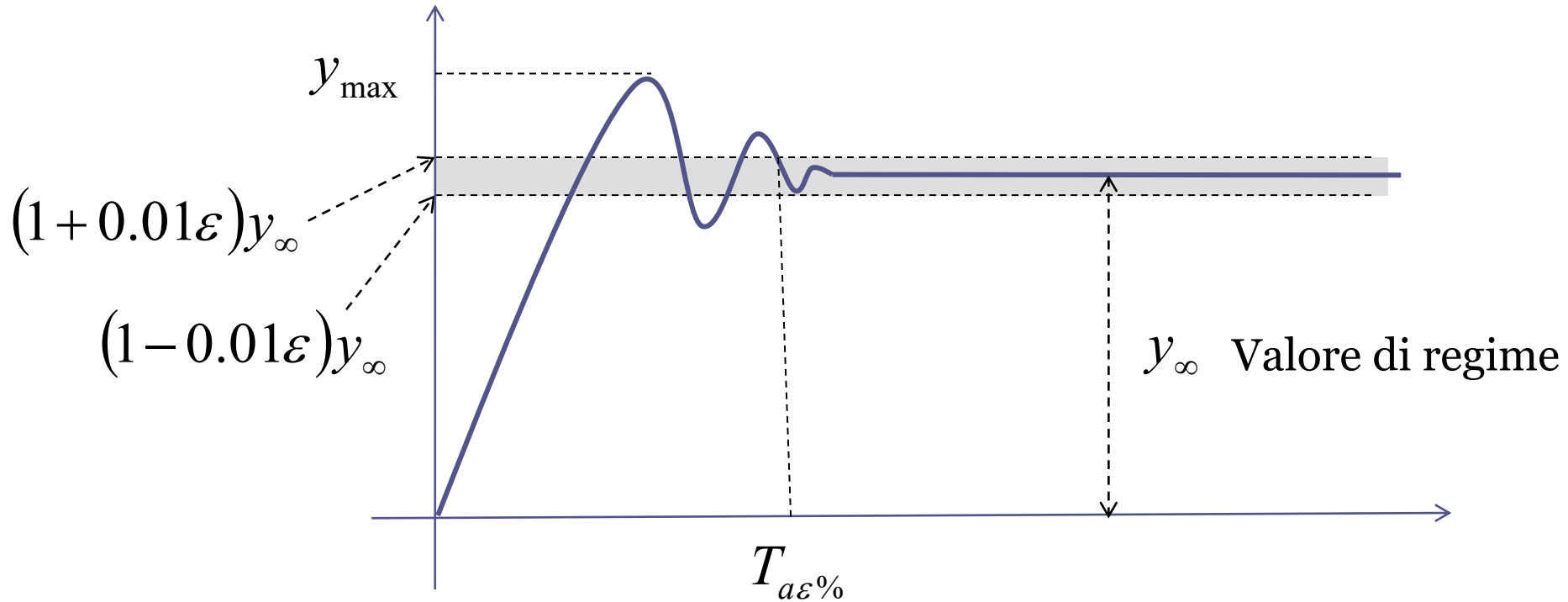
$$\mu = F(0) = \frac{8}{24} \cong 0.33$$

**Come mai la risposta transitoria presenta tale andamento ?  
Lo si poteva in qualche modo prevedere ?**

```
s=tf('s');
F=4*(s+2)/((s+4)*(s+6));
step(F,0:.01:10),grid
```



## Parametri significativi della risposta al gradino di sistemi LTI **asintoticamente stabili**



$$S_{\%} = 100 \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}}$$

**Sovraelongazione percentuale**

$T_{a\epsilon\%}$  **Tempo di assestamento all'  $\epsilon$  %** ( $\epsilon=1,2,5$ )

## *Sistemi as. stabili con poli e zeri **reali***

Termini «binomi»

$$F(s) = \frac{\mu(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots (1 + \tau_m s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)}$$

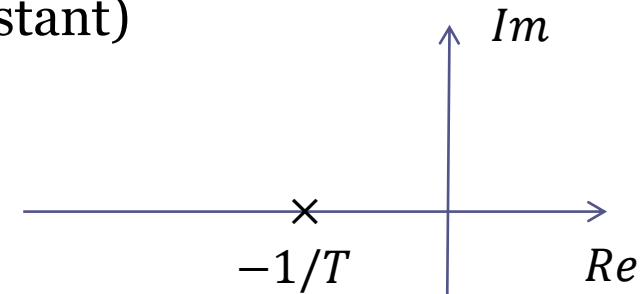
$\tau_i$      $T_i$     **Costanti di tempo degli zeri / dei poli**

$\mu$     **Guadagno statico (DC gain)**

$$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

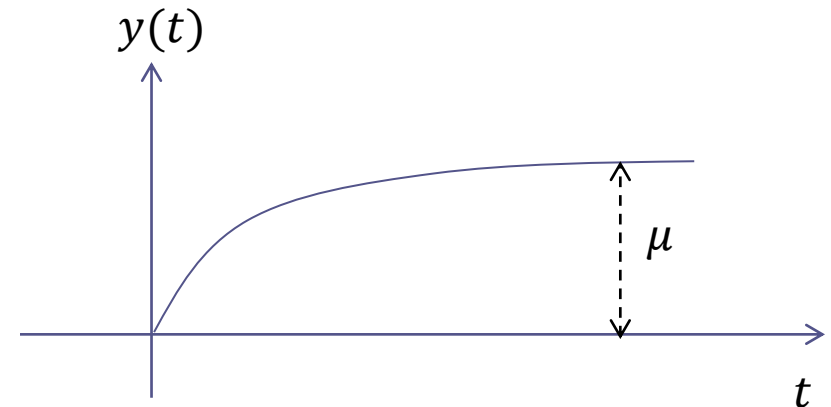
Sistema «STC» (single time constant)

Sistema del primo ordine con un solo polo (reale negativo) e nessuno zero.



$$T\dot{y}(t) + y(t) = \mu u(t) \quad u(t) = \delta_{-1}(t)$$

$$y(t) = \mu \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \delta_{-1}(t)$$



La risposta al gradino ha un andamento **monotono crescente di natura esponenziale**

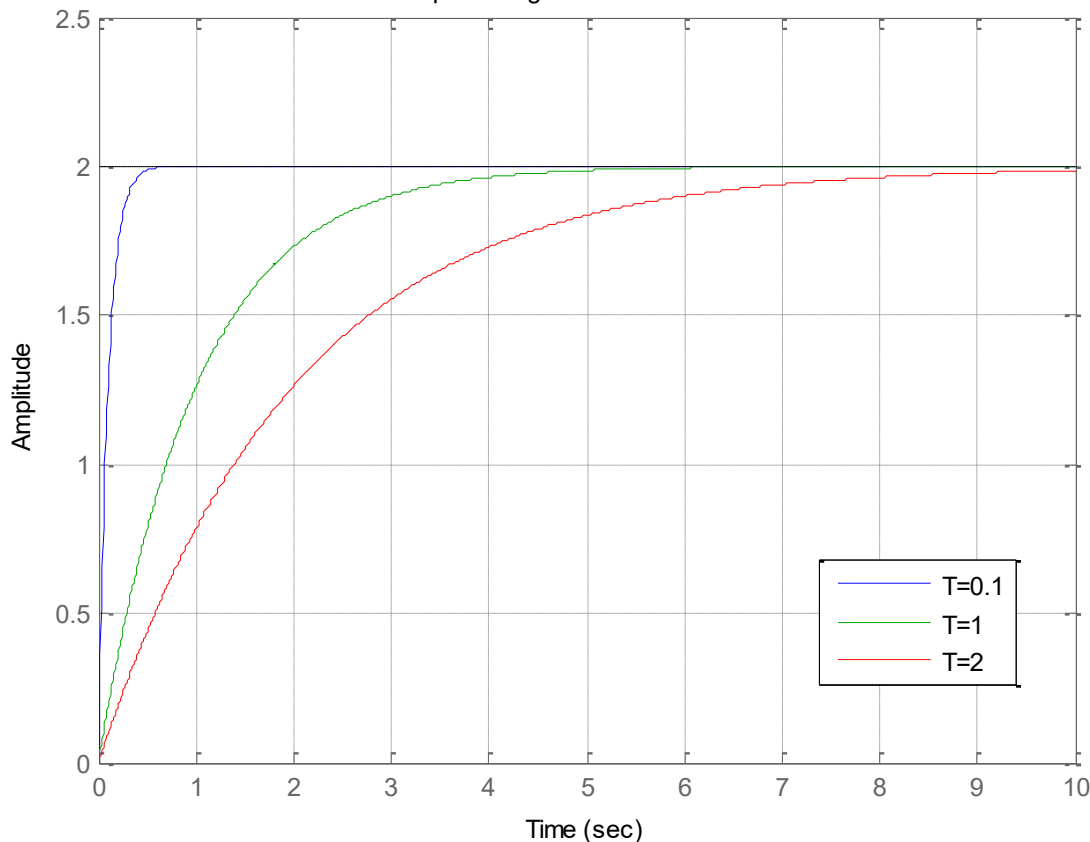
La rapidità di convergenza verso il valore di regime dipende dal valore della costante di tempo  $T$ .

$$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

Espressione analitica  
(lievemente approssimata)  
dei tempi di assestamento

$$\begin{array}{ccc} T_{a5\%} & T_{a2\%} & T_{a1\%} \\ 3T & 3.9T & 4.6T \end{array}$$

Risposta al gradino di sistemi STC



$$\mu = 2$$

$$T = 0.1s$$

*polo in  $-10$*

$$T = 1s$$

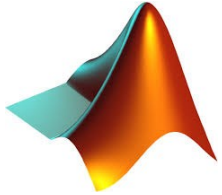
*polo in  $-1$*

$$T = 2s$$

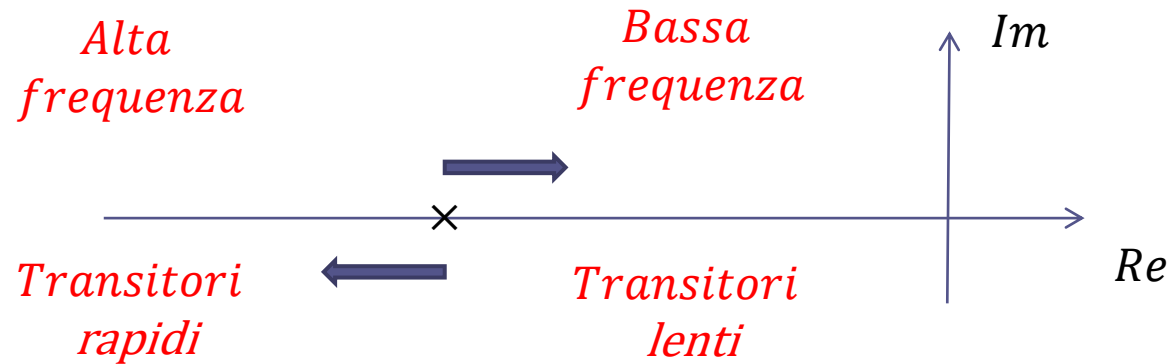
*polo in  $-1/2$*



## Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T1=0.1;  
T2=1;  
T3=2;  
  
S4=tf(mu, [T1 1]);  
S5=tf(mu, [T2 1]);  
S6=tf(mu, [T3 1]);  
  
step(S4,S5,S6, [0:0.01:10]),grid,  
axis([0 10 0 2.5])  
legend('T=0.1','T=1','T=2')  
title('Risposta al gradino di sistemi STC')
```



Se il polo si **sposta verso sinistra** (o, come si dice in gergo, «più in **alta frequenza**») la risposta si **velocizza**. Attenzione al fatto che se il polo si sposta più in alta frequenza la costante di tempo rimpicciolisce.

Dualmente, se il polo si sposta verso destra («più in bassa frequenza») la risposta viene rallentata. Se il polo si sposta più in bassa frequenza la relativa costante di tempo aumenta.

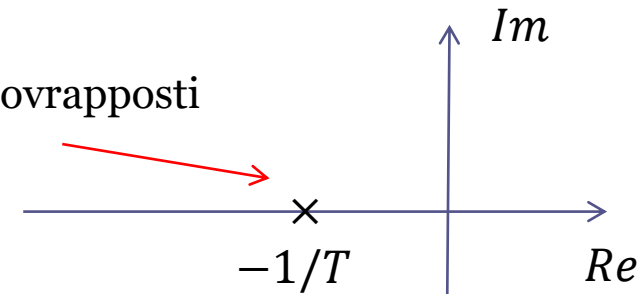
Poli in bassa frequenza  $\longleftrightarrow$  Tempi di risposta lenti

Poli in alta frequenza  $\longleftrightarrow$  Tempi di risposta rapidi

$$F(s) = \frac{\mu}{(1 + Ts)^2} = \frac{\mu}{T^2s^2 + 2Ts + 1}$$

Sistema con due poli reali negativi **coincidenti**

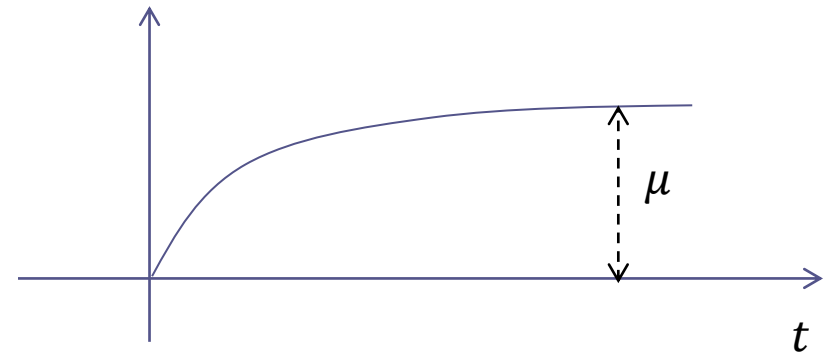
Due poli sovrapposti



$$T^2\ddot{y}(t) + 2T\dot{y}(t) + y(t) = \mu\delta_{-1}(t)$$

Soluzione in forma chiusa

$$y(t) = \mu \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right) \delta_{-1}(t)$$



La risposta al gradino ha ancora un andamento **monotono crescente**

La rapidità di convergenza verso il valore di regime dipende dal valore della costante di tempo T

I valori dei tempi di assestamento sono ancora determinabili in forma chiusa in funzione di  $T$ , e risultano essere **maggiori rispetto al caso precedente del sistema STC**

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$	$3T$	$3.9T$	$4.6T$
$F(s) = \frac{\mu}{(1 + Ts)^2}$	$4.7T$	$5.8T$	$6.6T$

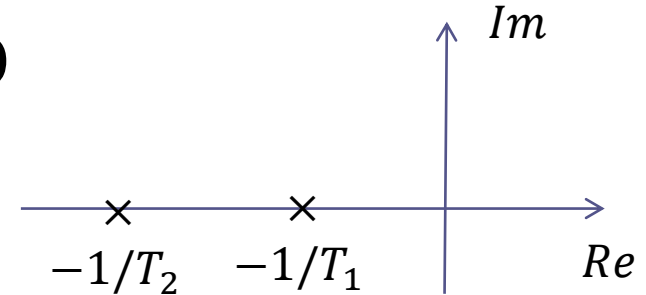
Per delle valutazioni di massima può essere utile riferirsi ai seguenti **valori approssimati**, maggiormente facili da ricordare

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$	$3T$	$4T$	$5T$
$F(s) = \frac{\mu}{(1 + Ts)^2}$	$5T$	$6T$	$7T$

Se la coppia di poli coincidenti si sposta verso **destra**/**sinistra** (cioè se la relativa costante di tempo  $T$  **aumenta**/**diminuisce**) la risposta diventa rispettivamente più **lenta** /**rapida**.

$$F(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

$$T_1 > T_2 > 0$$



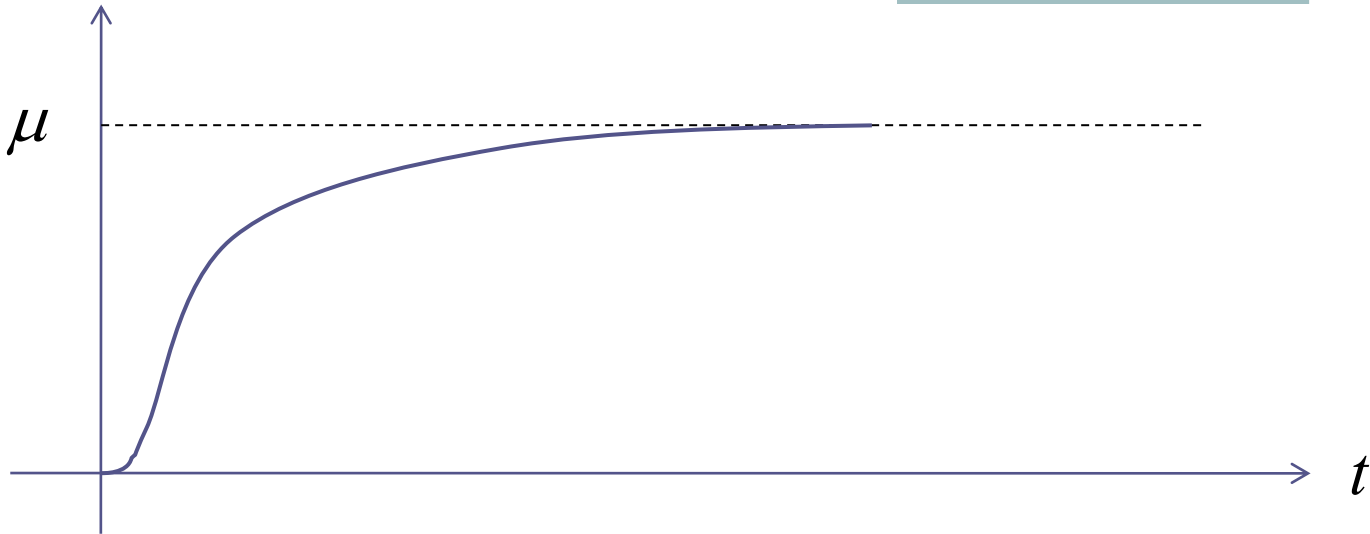
FdT del secondo ordine, senza zeri ( $m = 0$ ), e con due poli ( $n = 2$ ) reali negativi

$$p_1 = -\frac{1}{T_1} \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}$$

$$F(s) = \frac{\mu}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1} \Rightarrow T_1 T_2 \ddot{y}(t) + (T_1 + T_2)\dot{y}(t) + y(t) = \mu \delta_{-1}(t)$$

Soluzione in forma chiusa

$$y(t) = \mu \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \delta_{-1}(t)$$



Risposta al gradino **monotona crescente** (**senza sovraelongazione**)

La risposta si velocizza/**rallenta** se viene ridotta/**umentata** una fra le due costanti di tempo  $T_1$  e  $T_2$  (o entrambe).

Non esiste una espressione semplice e significativa per i tempi di assestamento in funzione dei valori delle costanti di tempo

Se le due costanti di tempo sono sensibilmente diverse ....

$$T_1 \gg T_2$$

$$y(t) = \mu \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

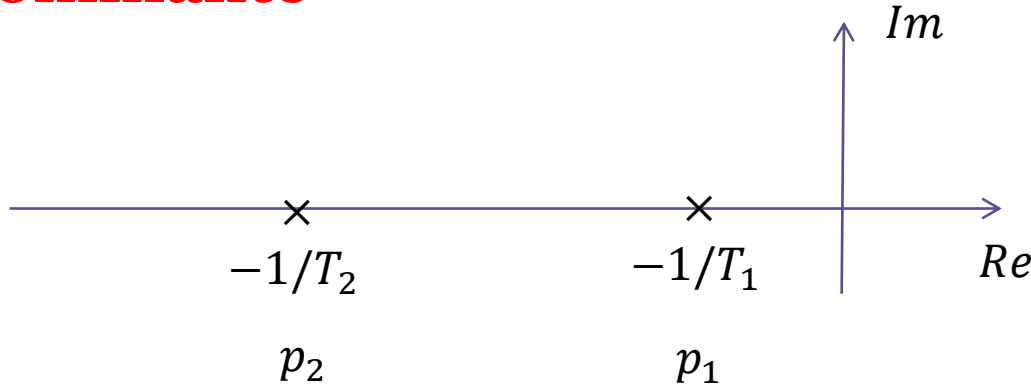
$$\frac{T_1}{T_1 - T_2} \approx 1 \qquad \frac{T_2}{T_1 - T_2} \approx 0$$

$$y(t) \approx \mu \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

“polo (o costante di tempo) **dominante**”

L'approssimazione diventa (indicativamente) lecita quando  **$T_1 > 5 T_2$**

## Polo dominante



Se fra i due poli esiste un fattore di separazione almeno pari a 5 allora si può «trascurare» il polo  $p_2$  più in alta frequenza, ed il polo  $p_1$  viene detto «**dominante**»

In tale situazione, la risposta al gradino del sistema completo

$$F(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

risulta essere praticamente indistinguibile, o comunque estremamente simile, a quella del sistema **approssimato** di ordine ridotto

$$F_{appr}(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)}$$

## Esempio

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)} = \frac{1}{(s+1)(0.1s+1)}$$

Le costanti di tempo sono sensibilmente differenti (fattore 10), e per il tracciamento della risposta al gradino ci si può riferire alla approssimazione di **polo dominante**

$$F_{appr}(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

La risposta al gradino del «sistema di ordine ridotto»  $F_{appr}(s)$ , che sarà estremamente simile a quella del sistema completo, può essere tracciata facilmente sulla base di quanto visto in precedenza

$$F_{appr}(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$

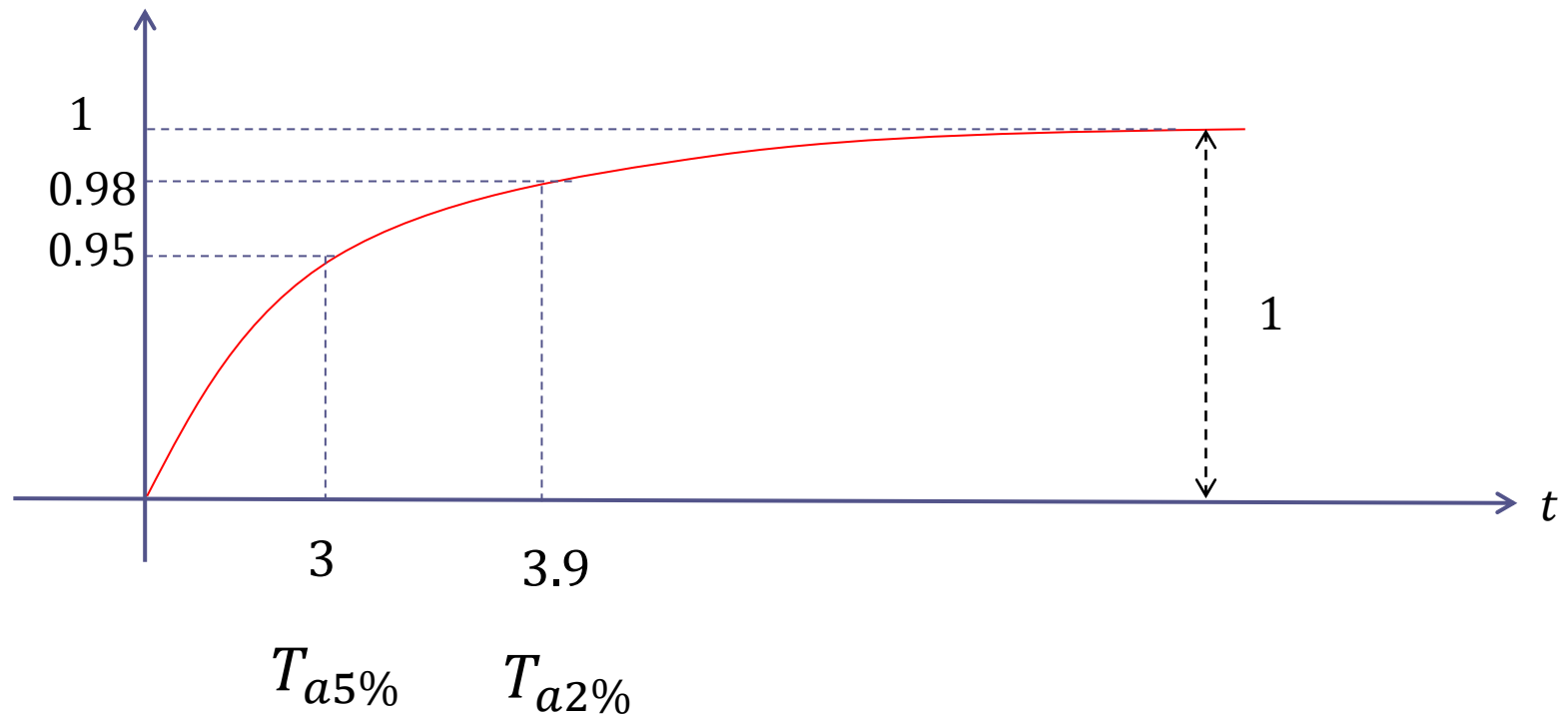
$$T = 1s$$

$$T_{a5\%}$$

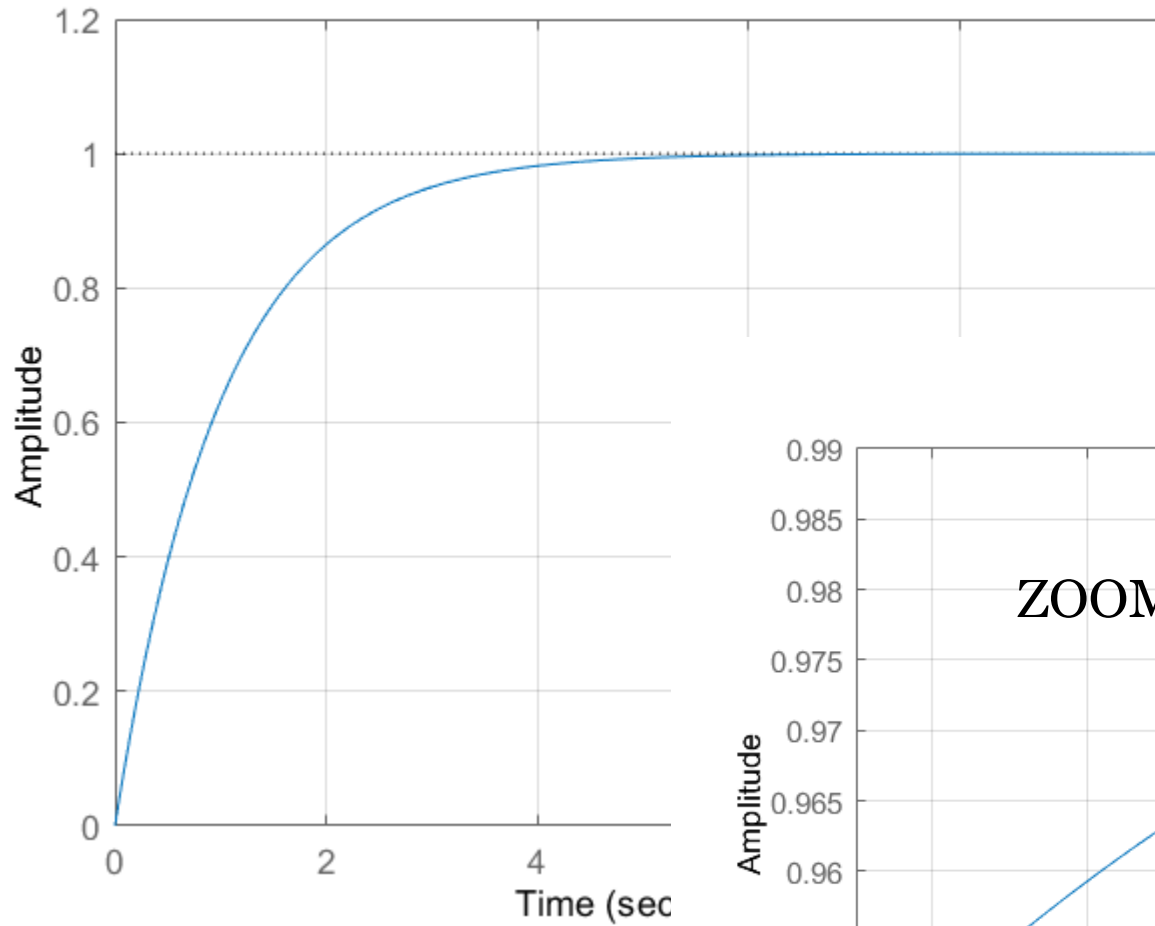
$$T_{a2\%}$$

$$3T$$

$$3.9T$$

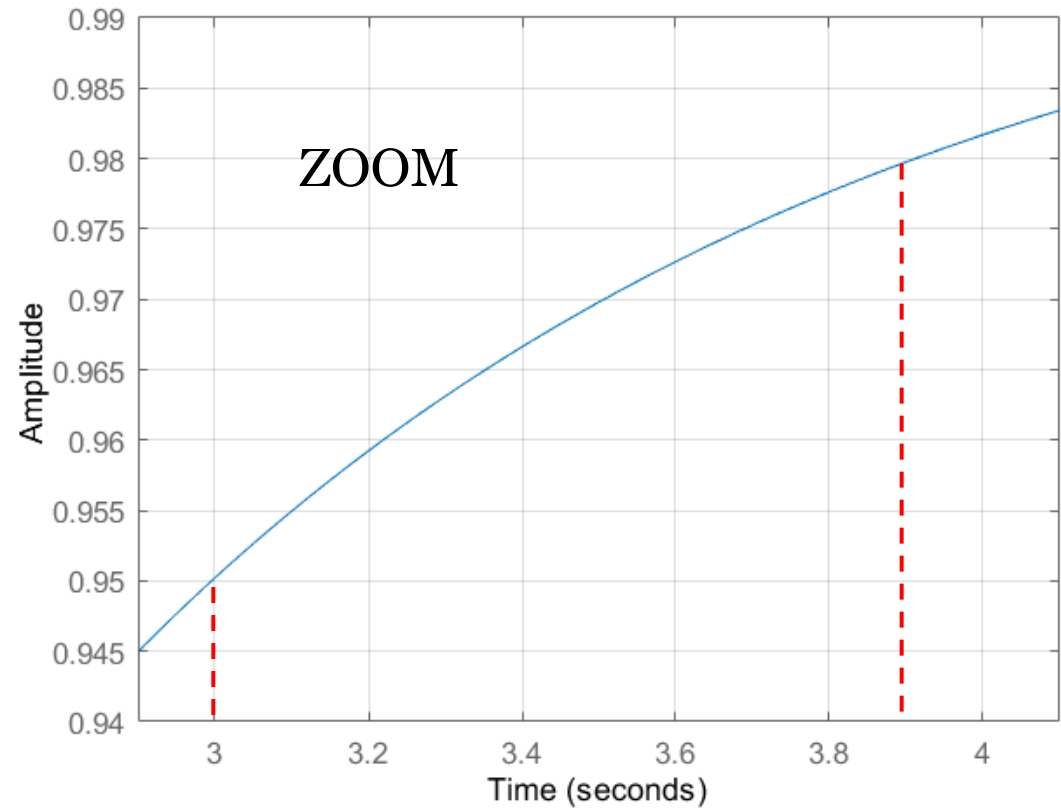


Step Response

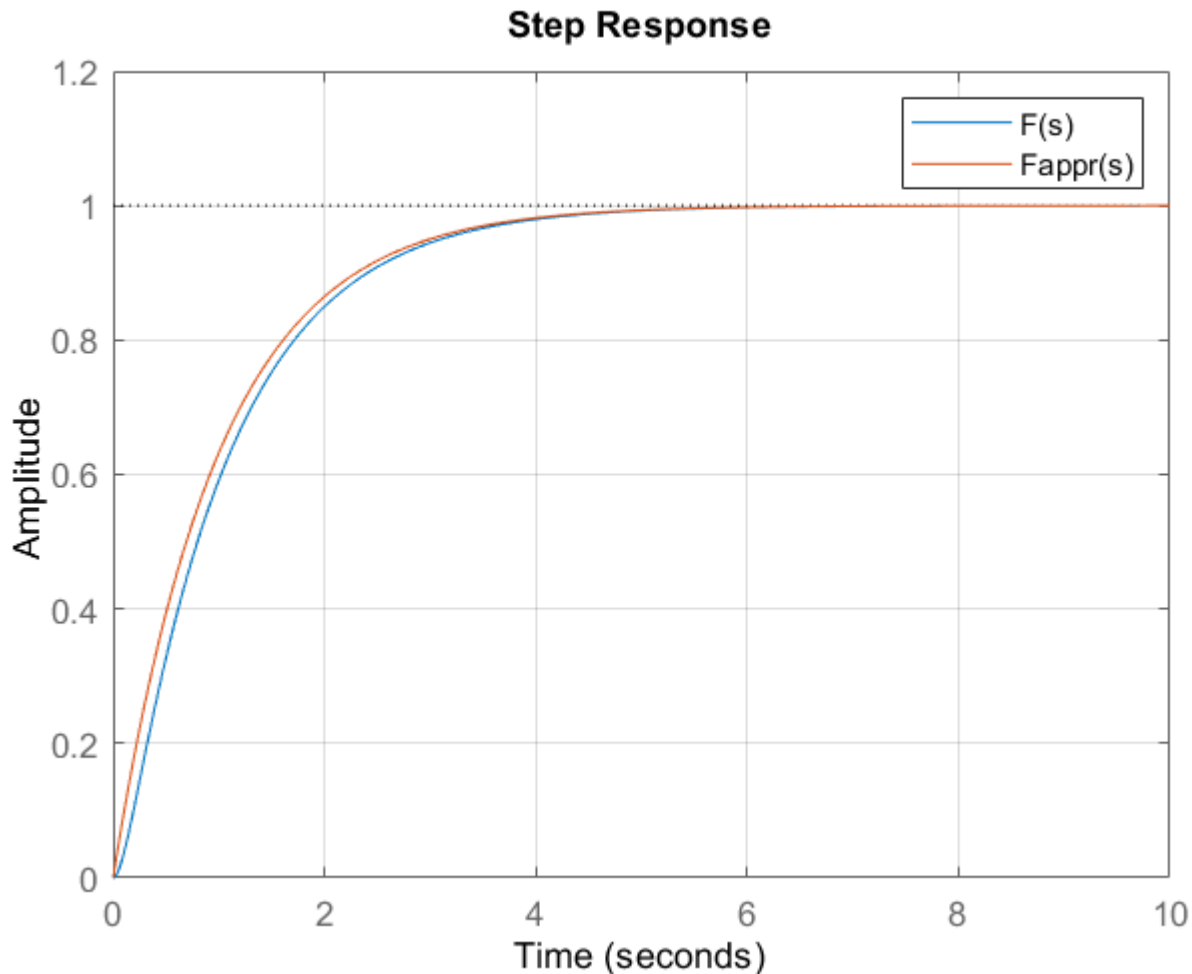


$$F_{appr}(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$

Step Response



Confronto fra la risposta al gradino unitario del sistema complessivo  $F(s)$  e quella del sistema di ordine ridotto  $F_{appr}(s)$

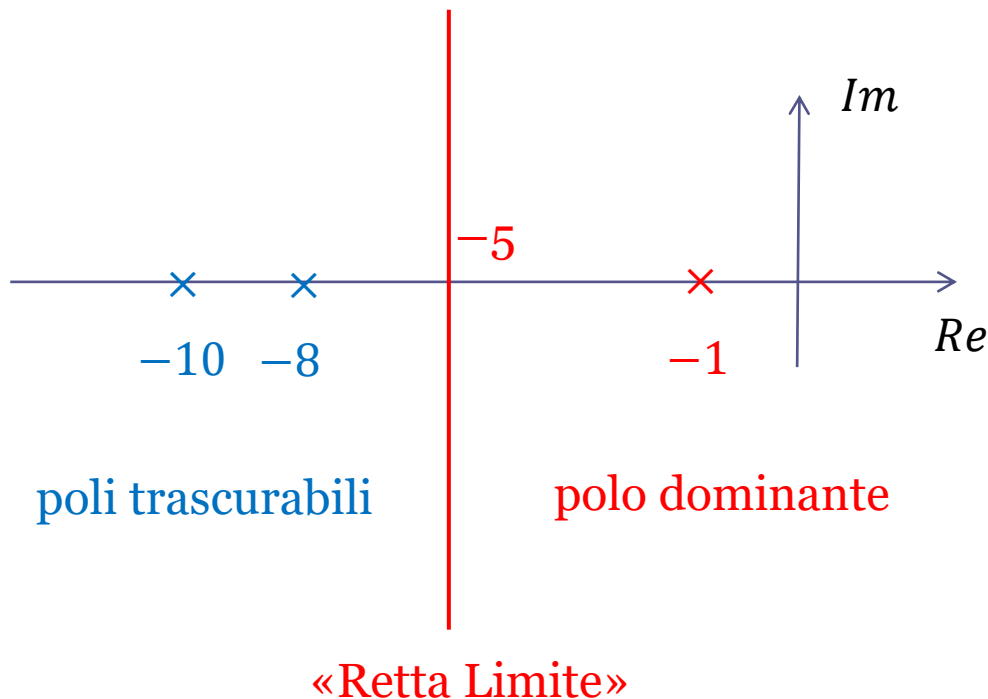


$$F(s) = \frac{1}{(s + 1)(0.1s + 1)}$$

$$F_{appr}(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$

Grazie al concetto di «polo dominante» possono essere trattati casi di natura anche più generale.

$$G(s) = \frac{20}{(s + 1)(s + 8)(s + 10)}$$



Tutti i poli (e gli eventuali zeri) alla sinistra della «retta limite» possono essere rimossi dalla FdT senza che le caratteristiche dinamiche principali della sua risposta al gradino risultino apprezzabilmente modificate

Quando si rimuovono da una FdT uno o più poli perché «trascurabili» vi è rischio di incorrere in un errore

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)(s+8)(s+10)}$$

$$G_{appr}(s) = \frac{20}{(s+1)}$$



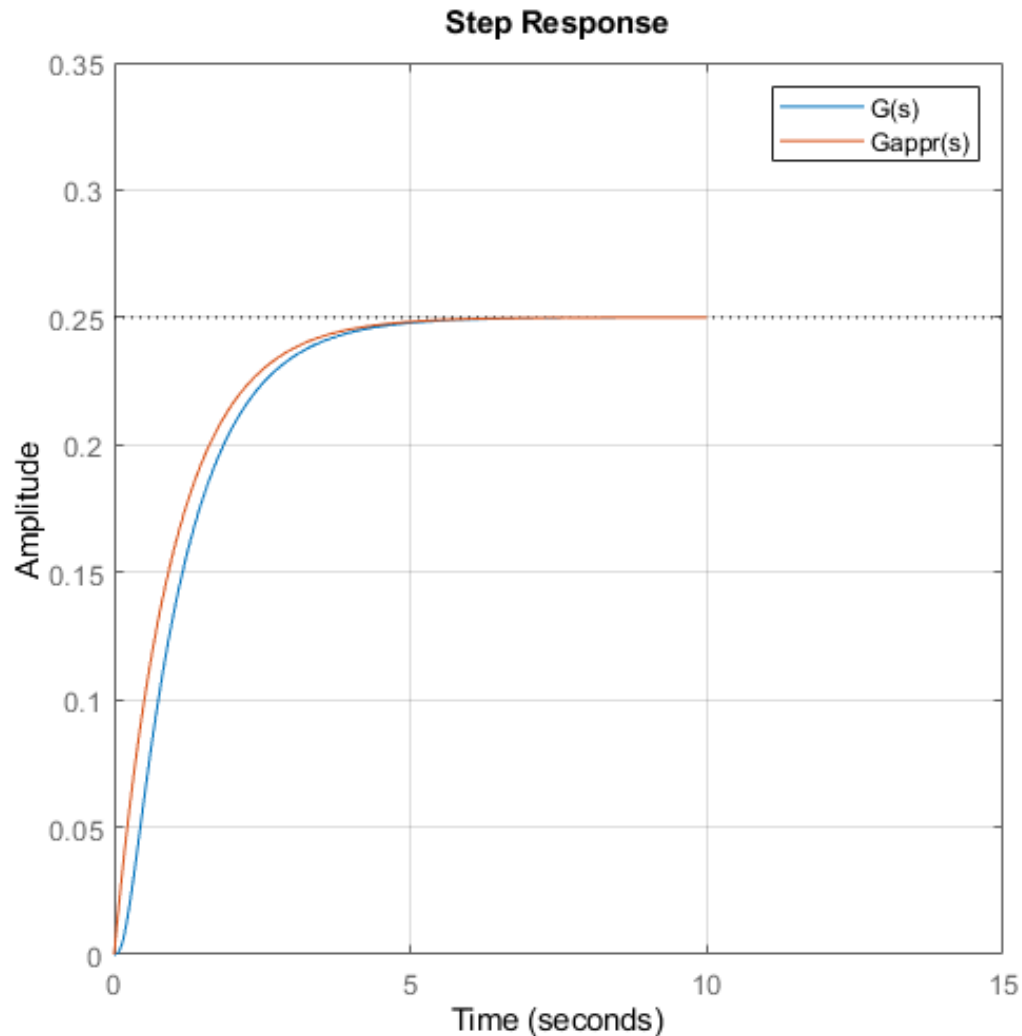
Questo è il modo **errato** di rimuovere dei poli, in quanto il guadagno statico della FdT approssimata  $G_{appr}(s)$  di ordine ridotto risulta essere differente da quello della FdT originale  $G(s)$ .

$$G_{appr}(s) = \frac{20}{(s+1) \cdot 8 \cdot 10} = \frac{0.25}{(s+1)}$$



I termini binomi, la cui rimozione non altera il valore del guadagno statico, possono invece essere «cancellati» senza problemi.

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)(s+8)(s+10)} = \frac{0.25}{(s+1) \left(\frac{1}{8}s+1\right) \left(\frac{1}{10}s+1\right)}$$



Le risposte differiscono lievemente nella parte iniziale del transitorio, ma i tempi di assestamento sono pressoché analoghi

```
s=tf('s');
G=20/((s+1)*(s+8)*(s+10))
Gappr=0.25/((s+1))
step(G,Gappr,0:.01:10),grid
legend('G(s)', 'Gappr(s)')
```

## Sistema as. stabile con tutti i poli reali e nessuno zero

$$F(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1s)(1 + T_2s) \dots (1 + T_ns)}$$

La risposta al gradino unitario è **monotona crescente**.

I poli più vicini all'origine (quelli cioè cui sono associate le costanti di tempo più grandi) sono quelli che influenzano in maniera più incisiva i tempi di assestamento della risposta al gradino unitario.

Ora includiamo nella FdT del sistema anche degli zeri.

$$F(s) = \frac{\mu(1 + \tau s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

$$T_1 > T_2 > 0$$

**FdT** del secondo ordine ( $n=2$ ), con uno zero ( $m=1$ ), e con due poli reali negativi

### Soluzione in forma chiusa

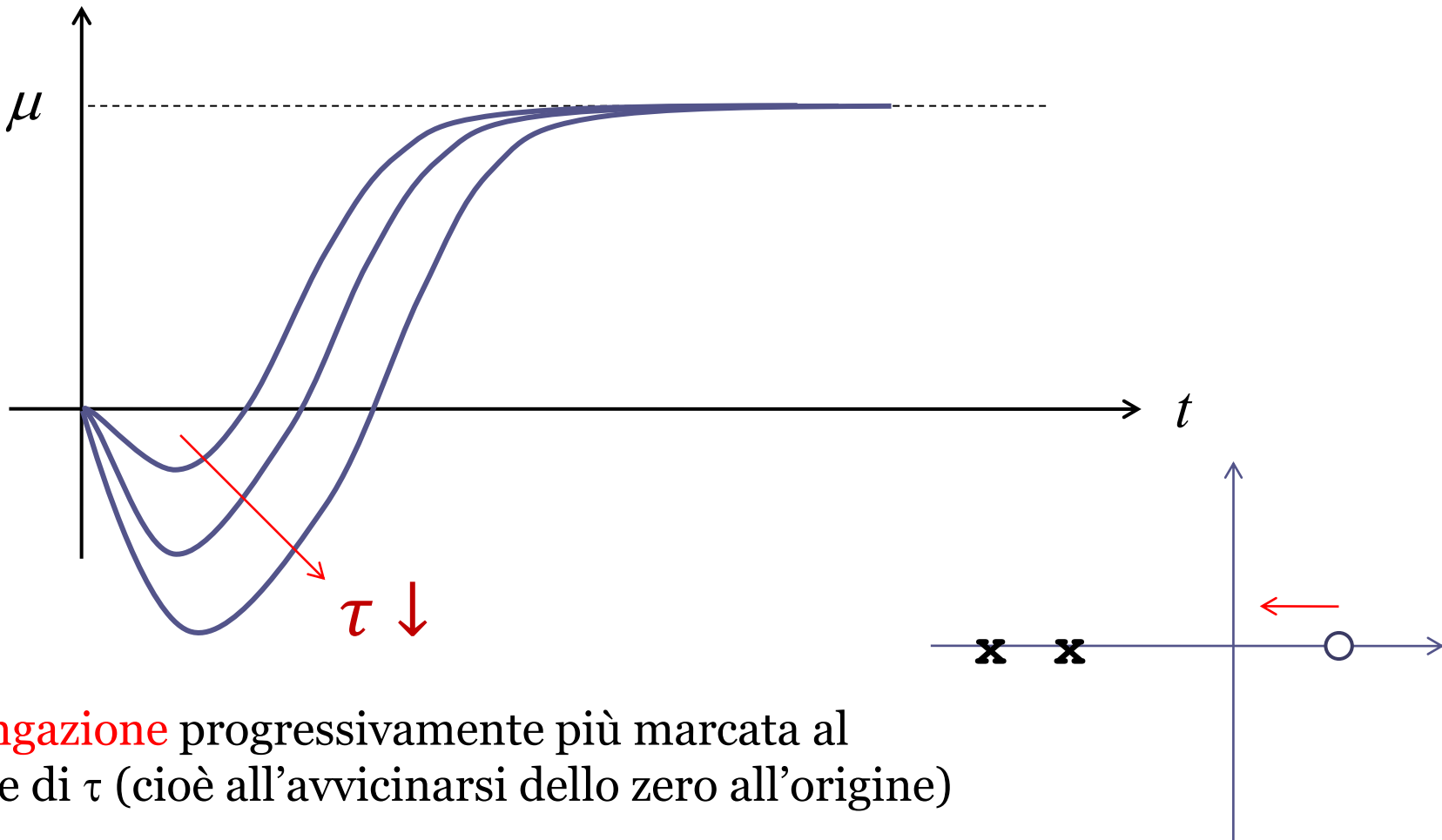
$$y(t) = \mu \left( 1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad \dot{y}(0) = \frac{\mu \tau}{T_1 T_2}$$

Se la costante di tempo dello zero è negativa ( $\tau < 0$ ), cioè se lo zero è posizionato nel semiasse reale positivo, si ha che

$$\dot{y}(0) < 0$$

La risposta al gradino presenta quindi il fenomeno dell' **undershooting**

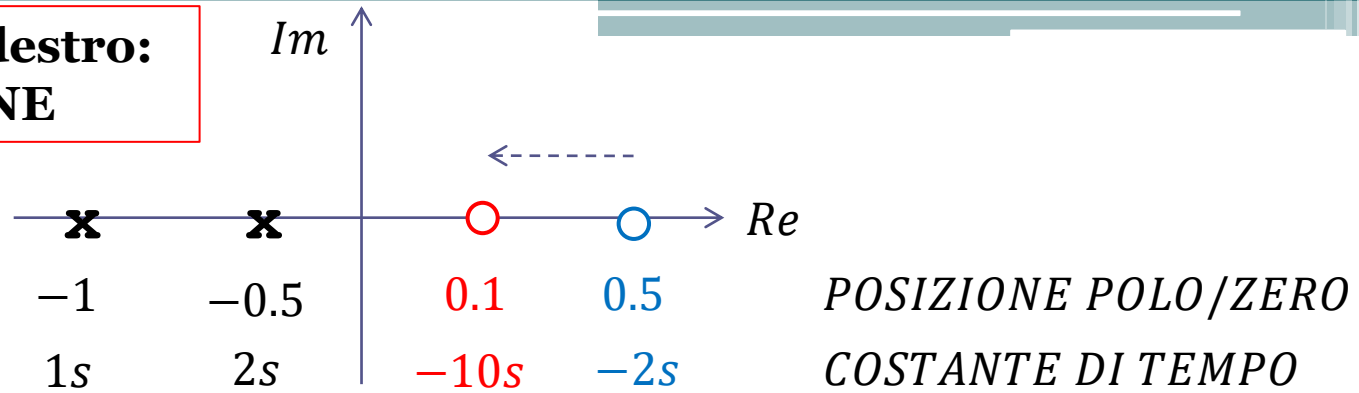
$\tau < 0$  Sistema con zero a parte reale positiva (sistema a **fase non minima**)



**Sottoelongazione** progressivamente più marcata al diminuire di  $\tau$  (cioè all'avvicinarsi dello zero all'origine)

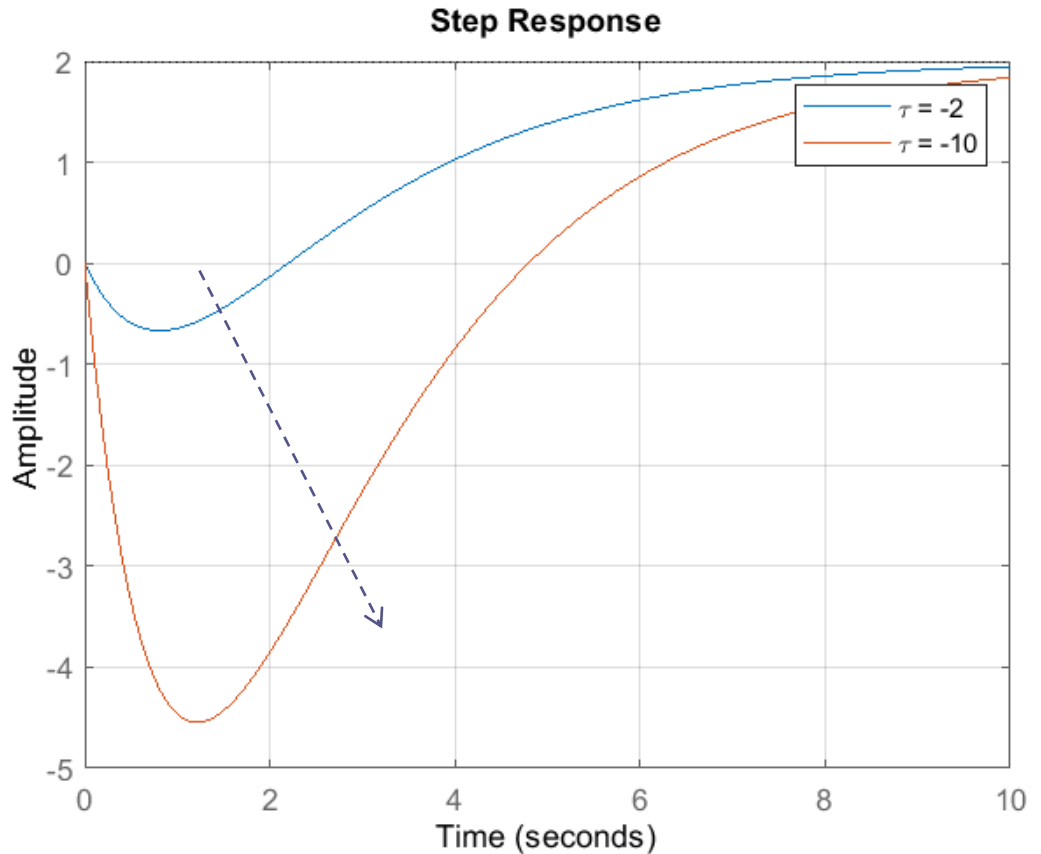
Superato il punto di minimo, la risposta evolve verso il regime con andamento **monotono**

**Zero nel semipiano destro:  
SOTTOELONGAZIONE**

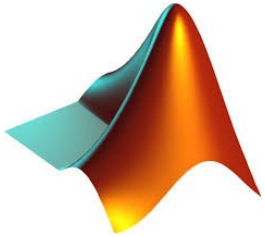


$$F(s) = \frac{2(1 - 2s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

$$F(s) = \frac{2(1 - 10s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

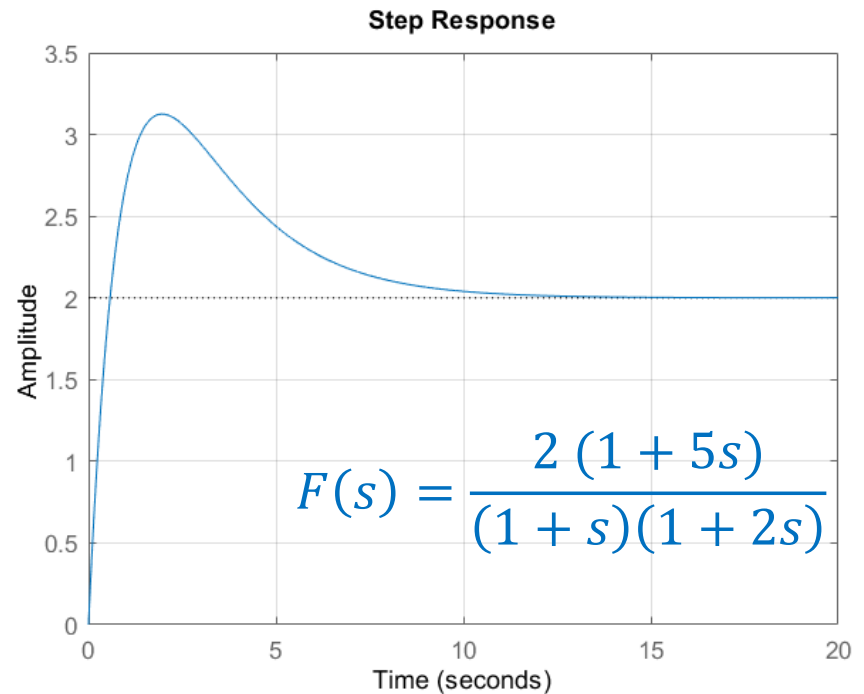
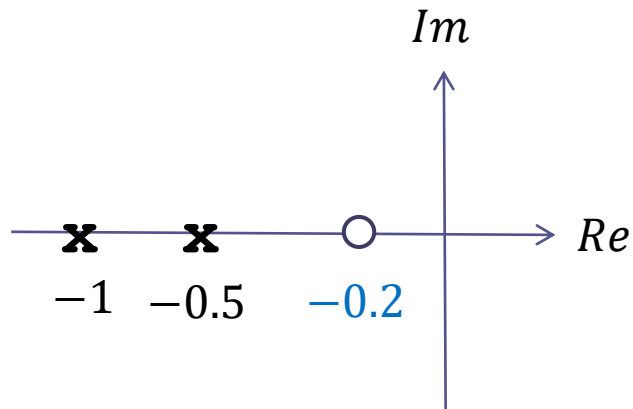


## Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T2=1;  
T1=2;  
tau1=-10;  
tau2=-2;  
  
S11=tf(mu*[tau1 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
S12=tf(mu*[tau2 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
figure(1)  
step(S12,S11,[0:0.01:10]),grid  
legend('\tau = -2','\tau = -10')
```

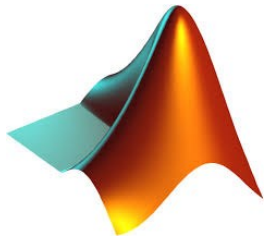
Zero nel semipiano sinistro collocato **più in bassa frequenza rispetto a entrambi i poli**: **SOVRAELONGAZIONE**



La presenza di uno zero più in bassa frequenza rispetto a tutti i poli induce una **sovraelongazione** nella risposta al gradino.

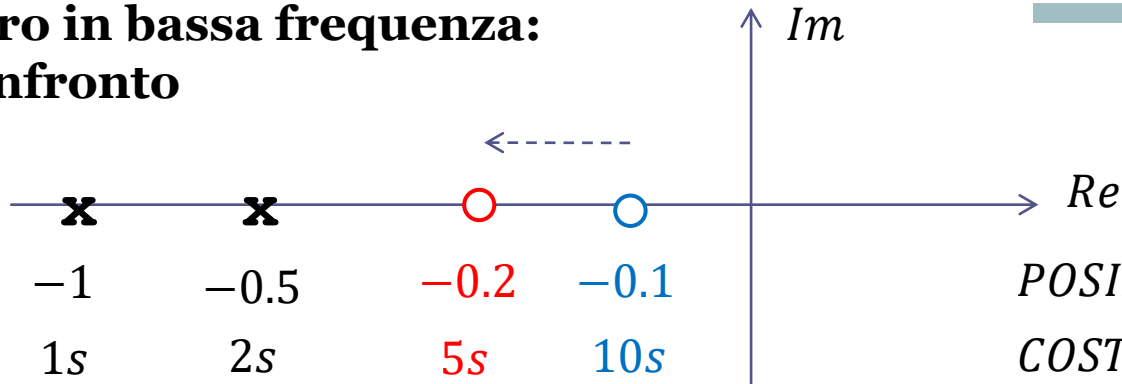
Superato il punto di massimo, la risposta evolve verso il regime con andamento **monotono**

## Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T2=1;  
T1=2;  
tau=5;  
  
S11=tf(mu*[tau 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
figure(1)  
step(S11,[0:0.01:20]),grid
```

## Zero in bassa frequenza: confronto



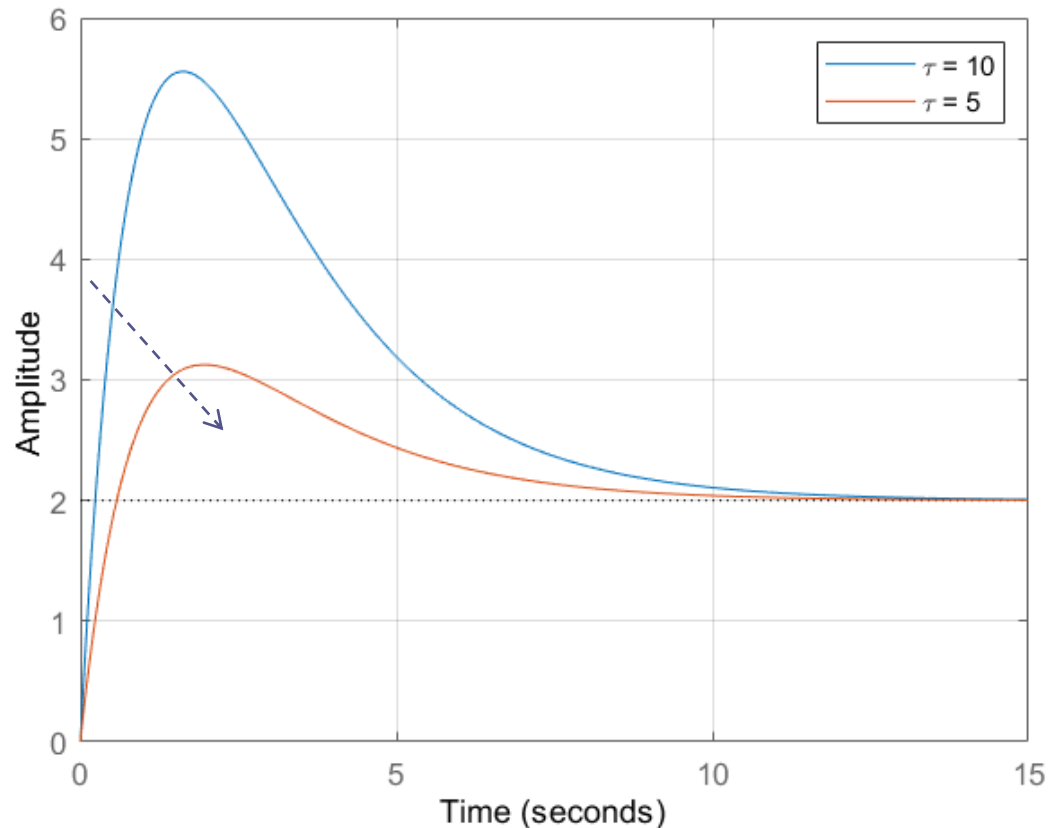
*POSIZIONE POLO/ZERO*  
*COSTANTE DI TEMPO*

$$F(s) = \frac{2(1 + 10s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

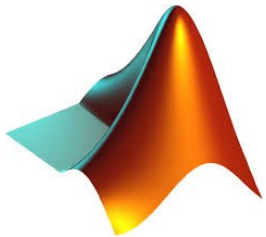
$$F(s) = \frac{2(1 + 5s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

**La sovraelongazione è progressivamente più marcata quanto più lo zero risulta prossimo all'origine)**

Step Response

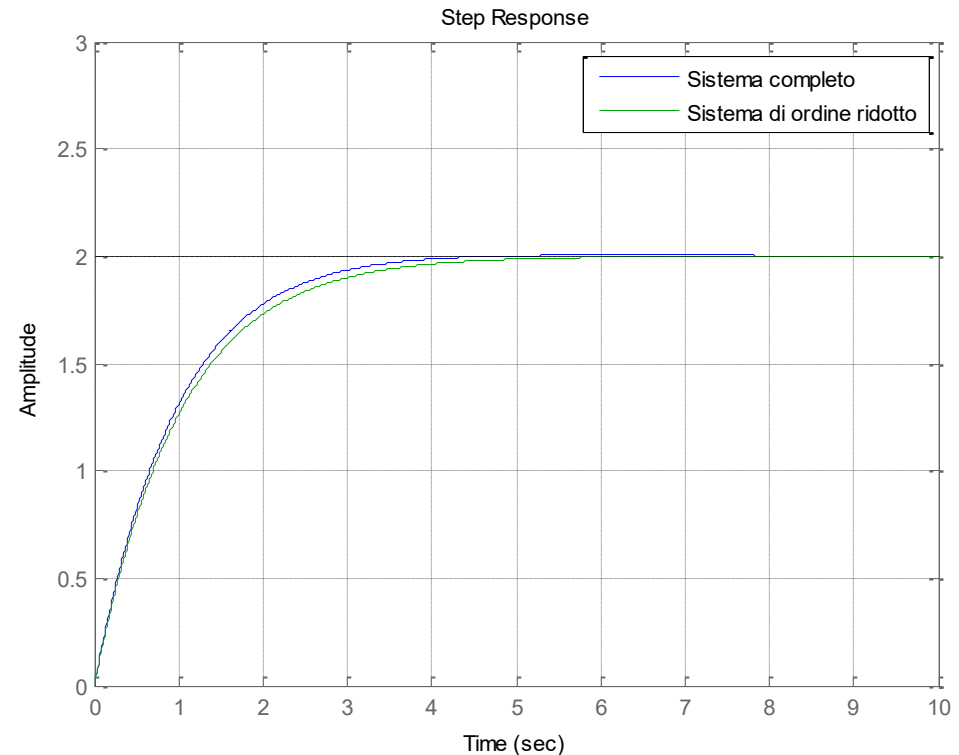
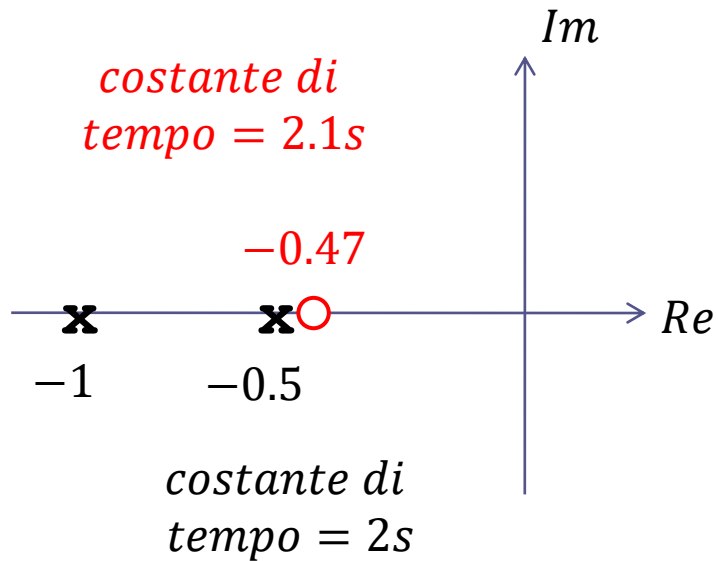


## Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T2=1;  
T1=2;  
tau1=10;  
tau2=5;  
  
S11=tf(mu*[tau1 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
S12=tf(mu*[tau2 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
figure(1)  
step(S11,S12,[0:0.01:15]),grid  
legend('\tau = 10','\tau = 5')
```

## Cancellazione polo-zero



Quando uno zero ed un polo sono molto prossimi fra loro, è **talvolta** possibile rimuoverli entrambi dalla FdT (operare cioè una «cancellazione polo-zero») senza alterare la risposta in maniera significativa

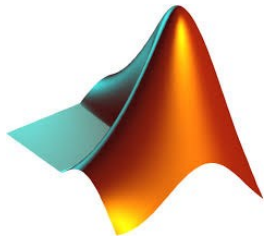
Sistema completo:

$$F(s) = \frac{2(1 + 2.1s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

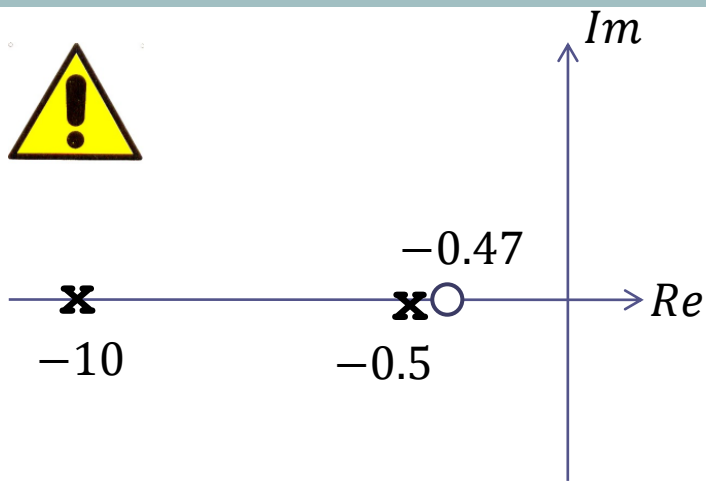
Sistema di ordine ridotto:

$$F(s) = \frac{2}{(1 + s)}$$

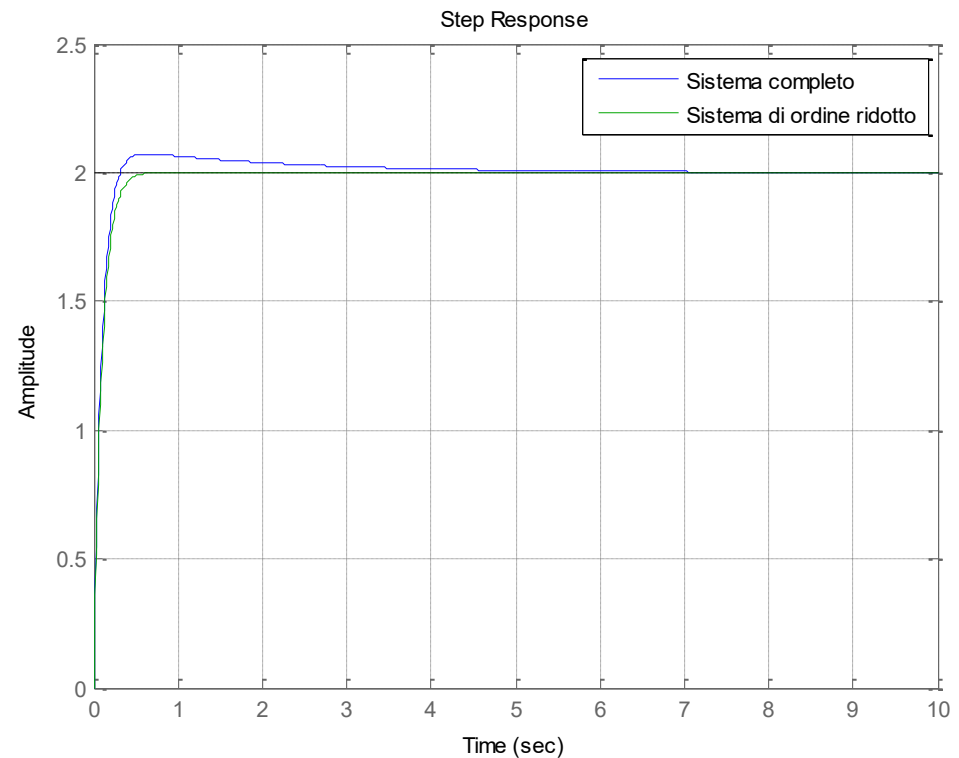
## Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T2=1;  
T1=2;  
tau=2.1;  
  
S11=tf(mu*[tau 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
S12=tf(mu,[T2 1]);  
figure(1)  
step(S11,S12,[0:0.01:10]),grid  
legend('Sistema completo','Sistema di ordine ridotto')
```



La cancellazione polo-zero da luogo a differenza significative fra le risposte del sistema complessivo e di quello di ordine ridotto quando si cancella una coppia PZ “lenta”, e le costanti di tempo residue sono molto più piccole, come in questo esempio

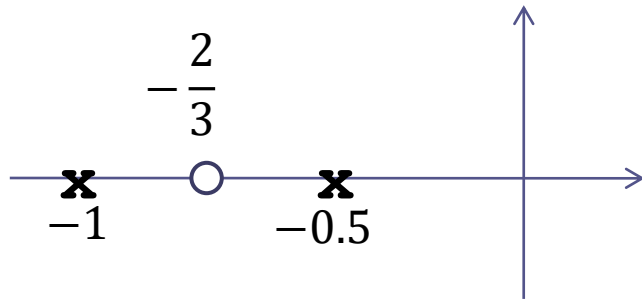


Sistema completo: 
$$F(s) = \frac{2(1 + 2.1s)}{(1 + 0.1s)(1 + 2s)}$$

Sistema di ordine ridotto:

$$F(s) = \frac{2}{(1 + 0.1s)}$$

## Zero posizionato fra i due poli

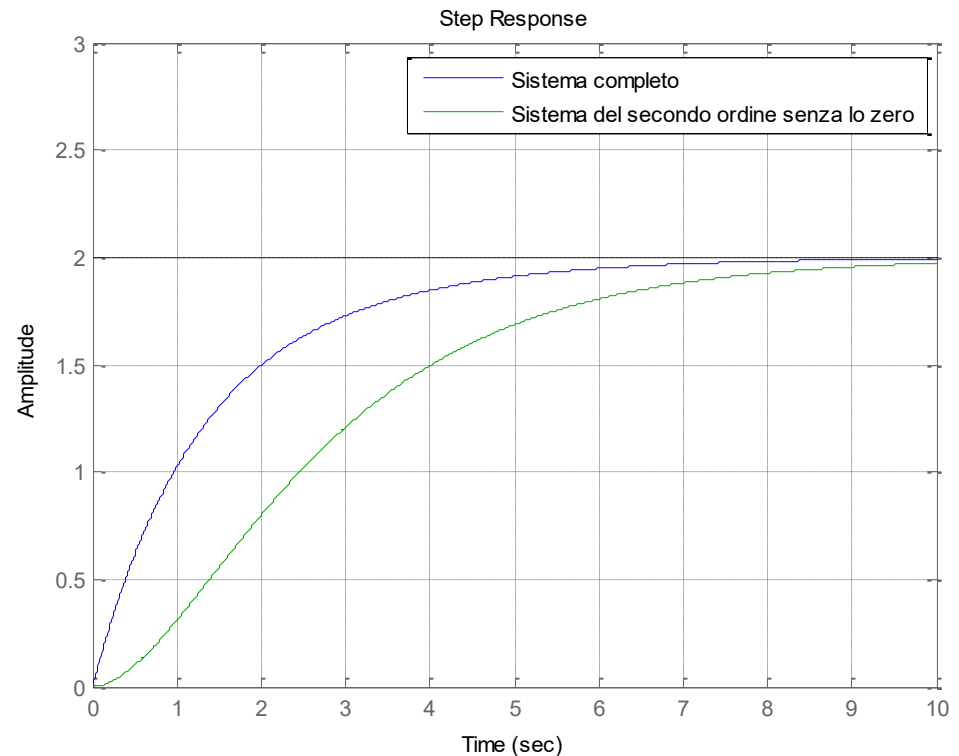


La risposta è monotona crescente, con un andamento qualitativo assimilabile a quello visto nel caso in cui lo zero non è presente

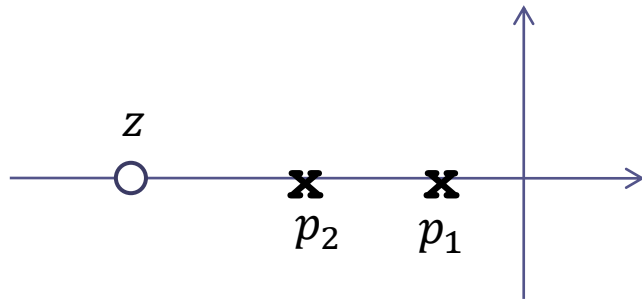
L'effetto della presenza dello zero è quello di velocizzare la risposta rispetto alla situazione in cui lo zero non c'è

$$F_1(s) = \frac{2 \left(1 + \frac{3}{2}s\right)}{(1+s)(1+2s)}$$

$$F_2(s) = \frac{2}{(1+s)(1+2s)}$$



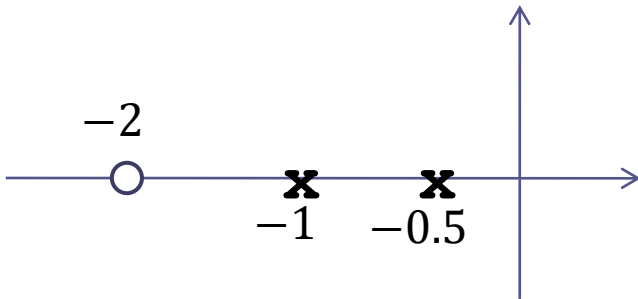
## Zero posizionato più in alta frequenza rispetto ad entrambi i poli



La presenza di uno zero più in alta frequenza rispetto a entrambi i poli, e non eccessivamente vicino al polo  $p_2$  (nel qual caso subentra la cancellazione polo-zero) ha un effetto alquanto ridotto.

L'unico effetto è una **debole velocizzazione della risposta**

## Zero posizionato più in alta frequenza rispetto ad entrambi i poli

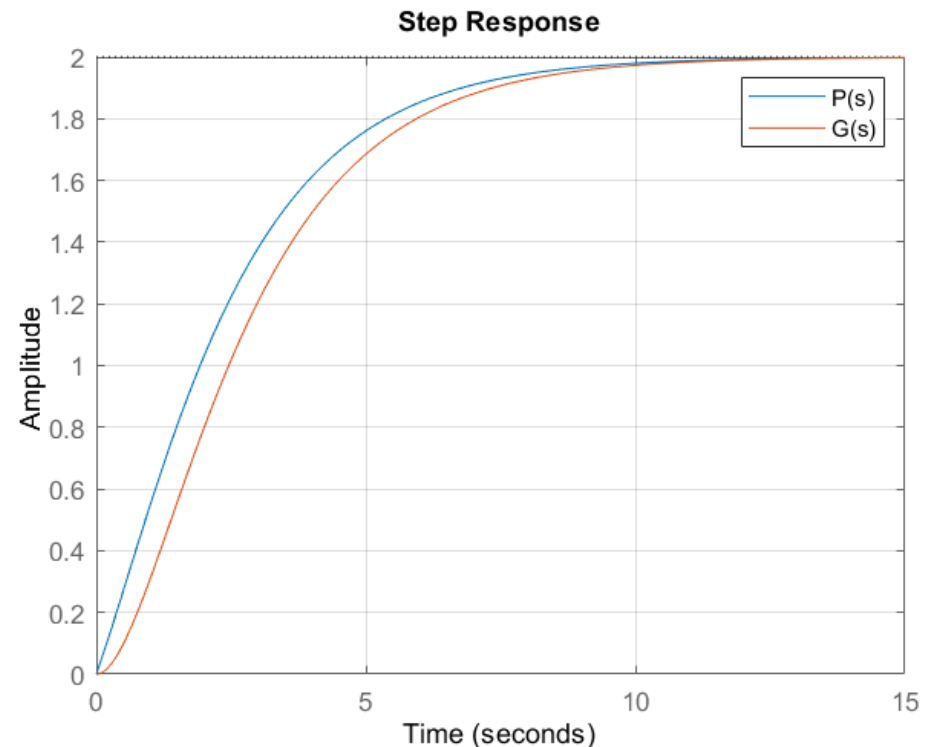


La presenza di uno zero più in alta frequenza rispetto a entrambi i poli ha un effetto alquanto ridotto.

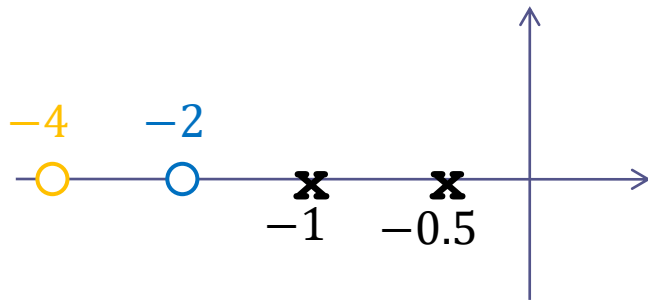
La risposta al gradino del sistema che include anche lo zero ha dei tempi di assestamento lievemente inferiori.

$$P(s) = \frac{2 \left(1 + \frac{1}{2}s\right)}{(1+s)(1+2s)}$$

$$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+2s)}$$



## Zero posizionato più in alta frequenza rispetto ad entrambi i poli

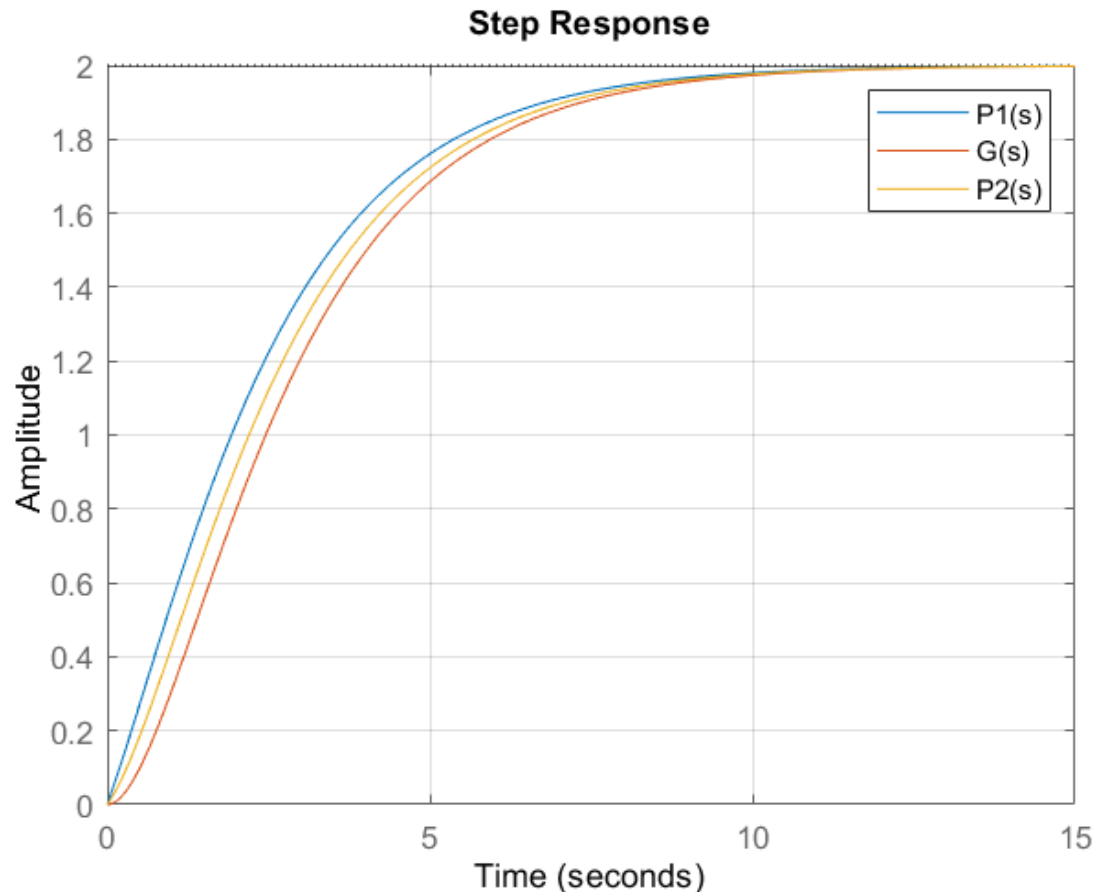


Man mano che lo zero si sposta verso le alte frequenze diventa progressivamente sempre meno rilevante

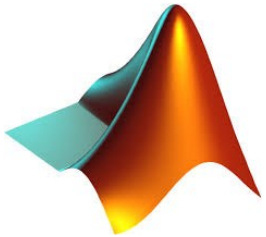
$$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+2s)}$$

$$P_1(s) = \frac{2(1 + \frac{1}{2}s)}{(1+s)(1+2s)}$$

$$P_2(s) = \frac{2(1 + \frac{1}{4}s)}{(1+s)(1+2s)}$$



## Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2
p1=-0.5
p2=-1
z=-2
z2=-4;
s=tf('s')
P1=-(mu*p1*p2/z)*(s-z)/((s-p1)*(s-p2))
P2=-(mu*p1*p2/z2)*(s-z2)/((s-p1)*(s-p2))
G=(mu*p1*p2)/((s-p1)*(s-p2))
step(P1,G,P2,[0:0.01:15]),grid
legend('P1(s)', 'G(s)', 'P2(s)')
```

**Es.**

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta al gradino unitario dei sistemi descritti dalle seguenti funzioni di trasferimento. Si espliciti anche il legame differenziale ingresso-uscita

$$G_1(s) = \frac{4}{s + 2}$$

$$G_2(s) = \frac{3}{(s + 1) \left( \frac{1}{7}s + 1 \right)}$$

$$G_3(s) = \frac{3 + 0.2s}{(s + 1) \left( \frac{1}{7}s + 1 \right)}$$

$$G_4(s) = \frac{1 - s}{(s + 1)(2s + 1)}$$

## Traccia soluzioni

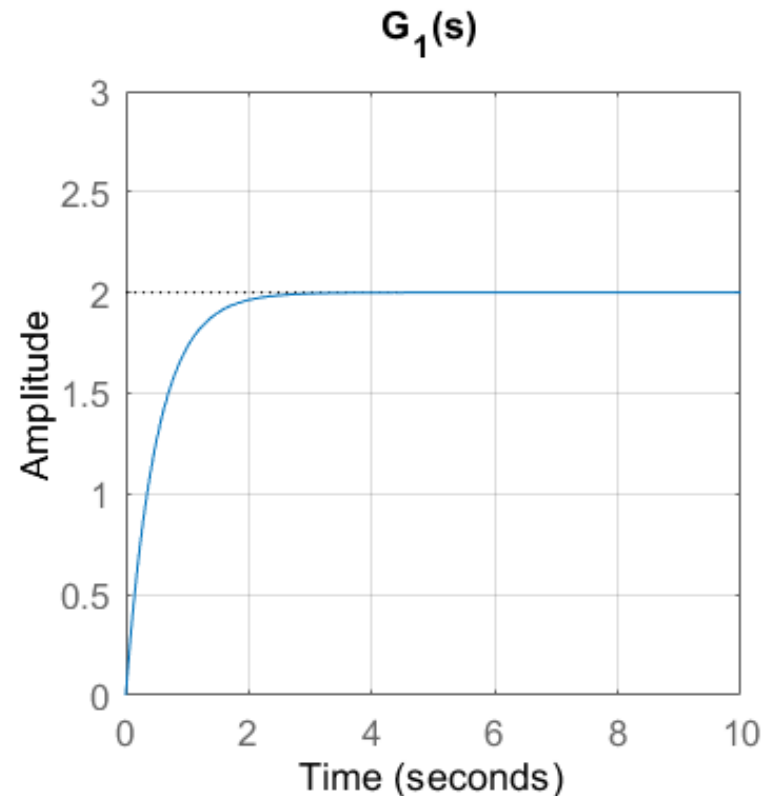
$$G_1(s) = \frac{4}{s+2} \longleftrightarrow \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4u(t)$$

$G_1(s)$  è della forma

$$G_1(s) = \frac{\mu_1}{1 + T_1 s}$$

con  $\mu_1 = G_1(0) = 2$

$$T_1 = 0.5$$



$$G_2(s) = \frac{3}{(s + 1)\left(\frac{1}{7}s + 1\right)}$$

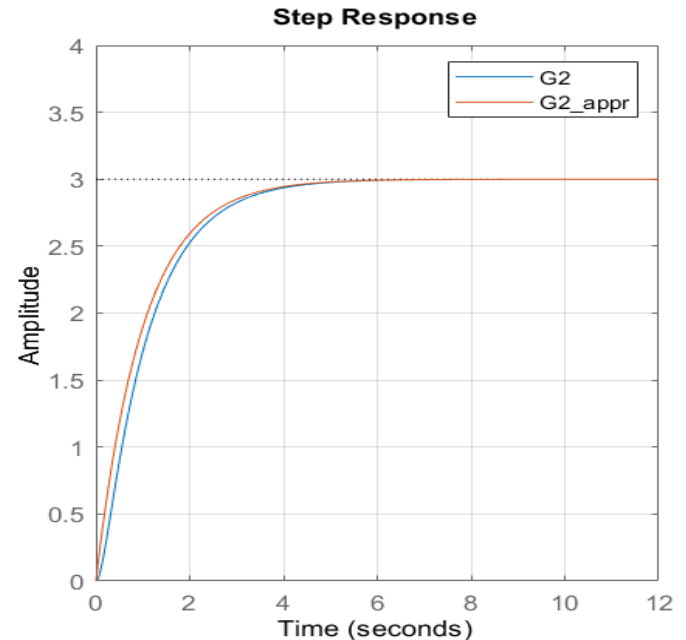
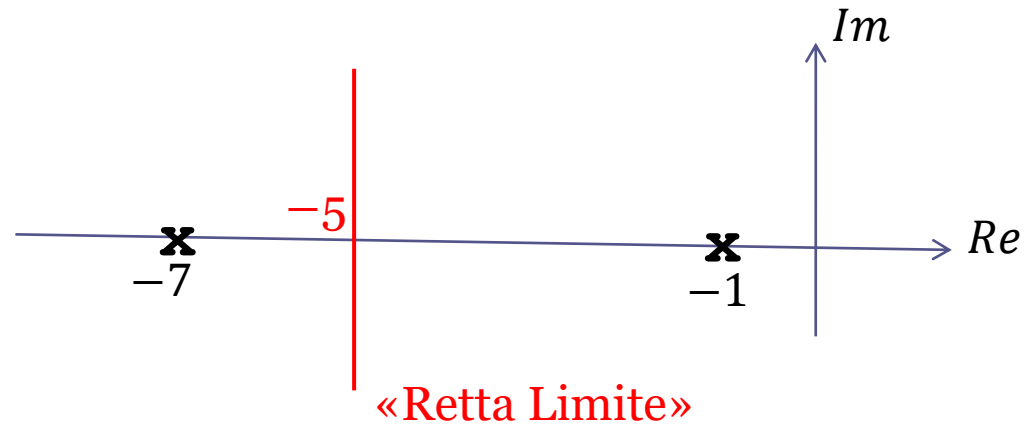
$$\mu_2 = G_2(0) = 3$$

Poli:  $p_1 = -1$        $p_2 = -7$

Il polo in -1 è dominante.  
 Il polo in -7 può essere trascurato.

$$G_{2,appr}(s) = \frac{3}{(s + 1)}$$

### Distribuzione poli-zeri



## Distribuzione poli-zeri

$$G_3(s) = \frac{3 + 0.2s}{(s + 1) \left(\frac{1}{7}s + 1\right)}$$

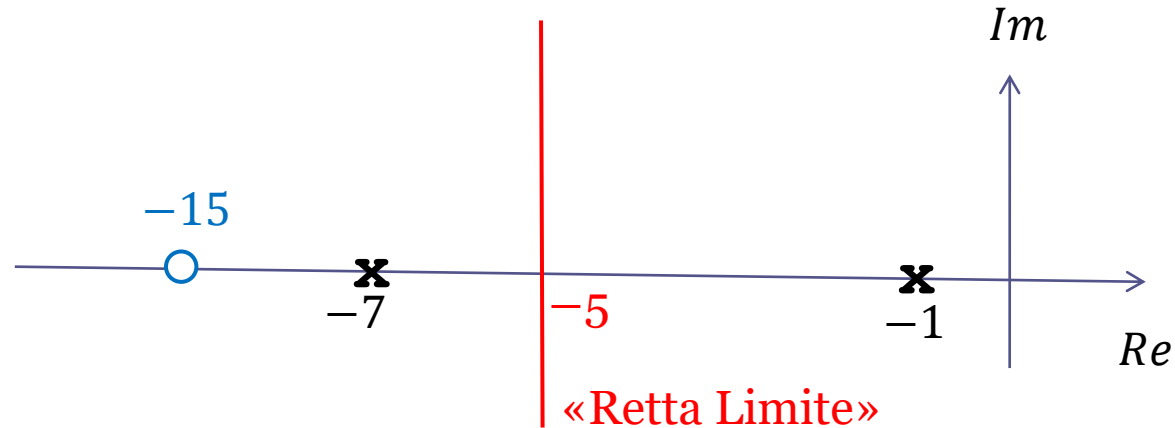
$$\mu_3 = G_3(0) = 3$$

Poli e zeri

$$p_1 = -1$$

$$p_2 = -7$$

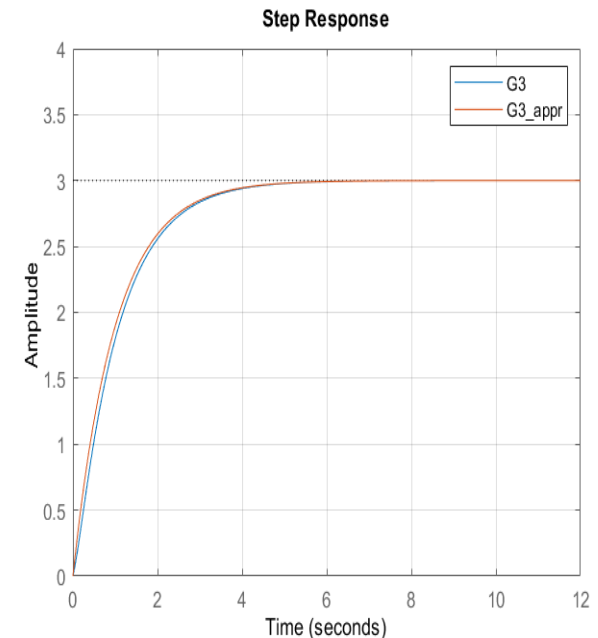
$$z_1 = -15$$



Il polo in -1 è dominante. **Sia il polo in -7 che lo zero in -15 possono essere trascurati.**

$$G_{3,appr}(s) = \frac{3}{(s + 1)}$$

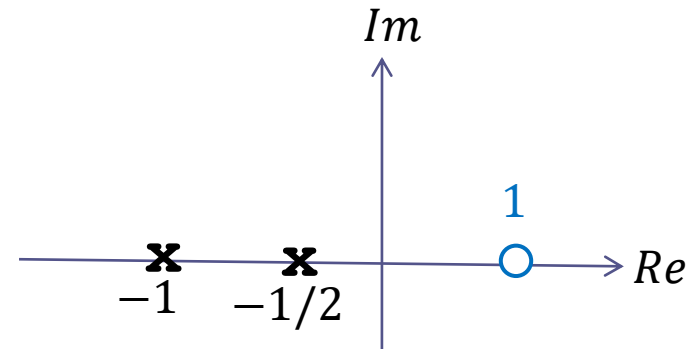
Risposta circa analoga a quella dell'esempio precedente



$$G_4(s) = \frac{1 - s}{(s + 1)(2s + 1)}$$

$$\mu_4 = G_4(0) = 1$$

Distribuzione poli-zeri

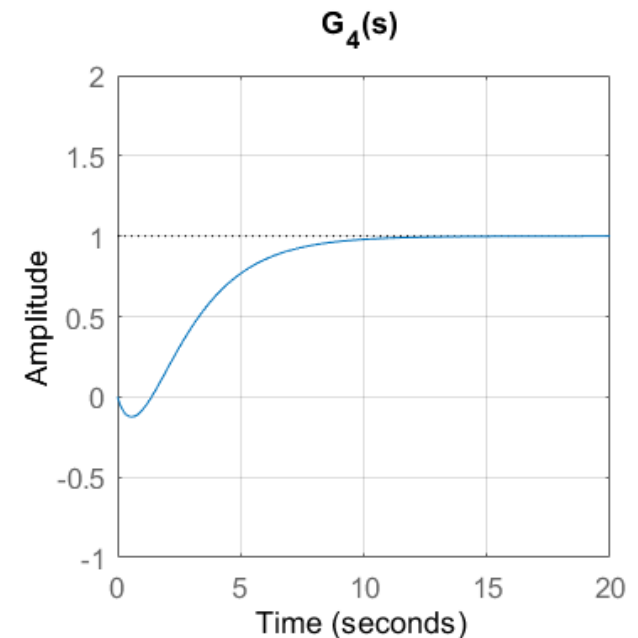


Due poli reali negativi non tali da poterne eleggere uno come «dominante

Zero reale positivo che induce l'undershooting

Successivamente al punto di minimo, la risposta converge verso il valore di regime con un andamento monotono crescente

Sia l'entità dell'undershooting che i tempi di assestamento non sono facilmente determinabili



# Istruzioni Matlab per la creazione dei grafici

```
clc
clear all
close all

s=tf('s')

G1=4/(s+2);

G2=3/((s+1)*(s/7+1));
G2appr=3/(s+1);

G3=(3+0.2*s)/((s+1)*(s/7+1));
G3appr=3/(s+1);

G4=(1-s)/((s+1)*(2*s+1));
```

```
figure(1)
step(G1,[0:0.01:10]),grid
ylim([0 3])
title('G_1(s)')
```

```
figure(2)
step(G2,[0:0.01:12]),grid
hold on
step(G2appr,[0:0.01:12])
ylim([0 4])
legend('G2','G2_appr')
```

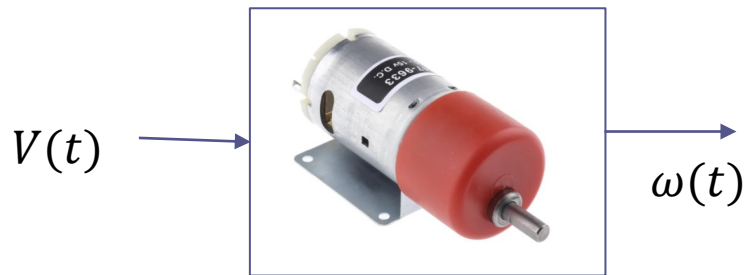
```
figure(3)
step(G3,[0:0.01:12]),grid
hold on
step(G3appr,[0:0.01:12])
ylim([0 4])
legend('G3','G3_appr')
```

```
figure(4)
step(G4,[0:0.01:20]),grid
title('G_4(s)')
ylim([-1 2])
```

## Motore in corrente continua

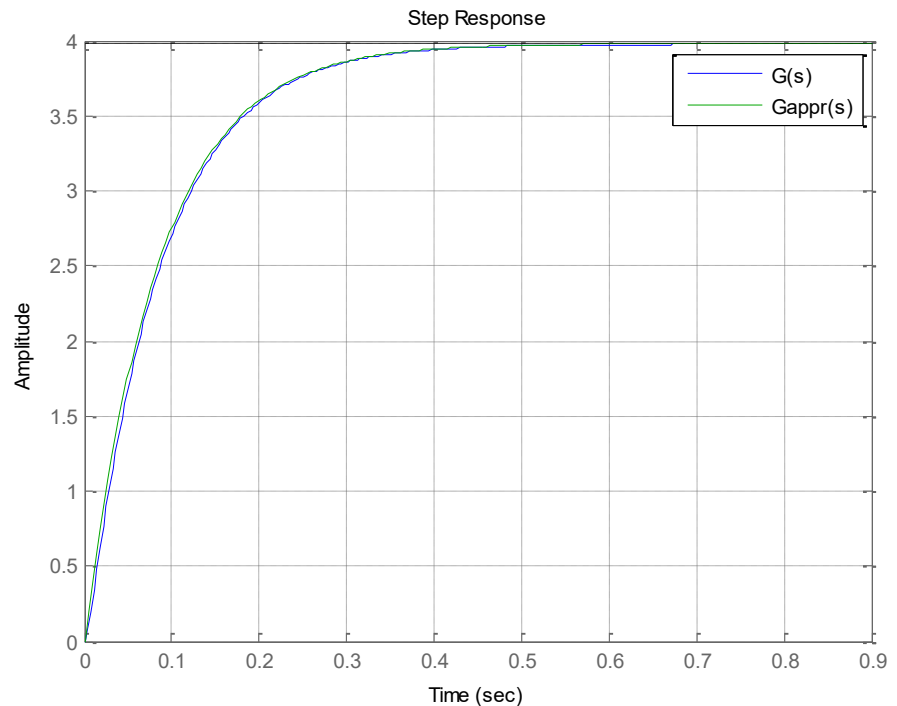
$R=0.46 \Omega$ ,  $L=15 \text{ mH}$ ,  $J = 0.012 \text{ kg m}^2$ ,  $B=0.0008 \text{ Ns/rad}$ ,  $K=0.25 \text{ N/A}$

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{(R + Ls)(B + Js) + K^2} = \frac{3.97}{(1 + 0.0844s)(1 + 0.0034s)}$$



$$G_{appr}(s) = \frac{3.97}{(1 + 0.0844s)}$$

Le costanti di tempo differiscono per un fattore 25



## Riassumiamo quanto visto

$$F(s) = \frac{\mu(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots (1 + \tau_m s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)}$$

In generale la risposta al gradino di un sistema a **poli e zeri reali** si presenta monotona crescente tranne i due casi in cui:

è presente uno zero positivo



In questo caso la risposta presenta una sottoelongazione, seguita da una convergenza monotona verso il valore di regime

è presente uno zero negativo più in bassa frequenza rispetto a tutti i poli.



In questo caso la risposta presenta una sovraelongazione, seguita da una convergenza monotona verso il valore di regime

Sono sempre assenti fenomeni oscillatori.

La presenza degli zeri velocizza la risposta.

## Sistema con due poli complessi coniugati

$$F(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\mu}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

$\omega_n > 0$  Puls. naturale

$|\xi| < 1$  Smorzamento

$$p_{1,2} = a \pm jb$$

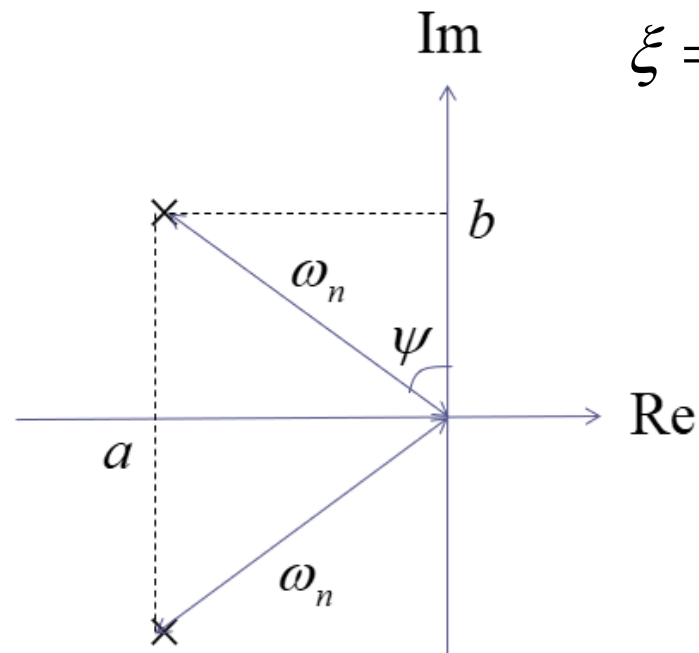
$$a = -\xi \omega_n$$

$$b = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

**Relazioni inverse**

$$\xi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

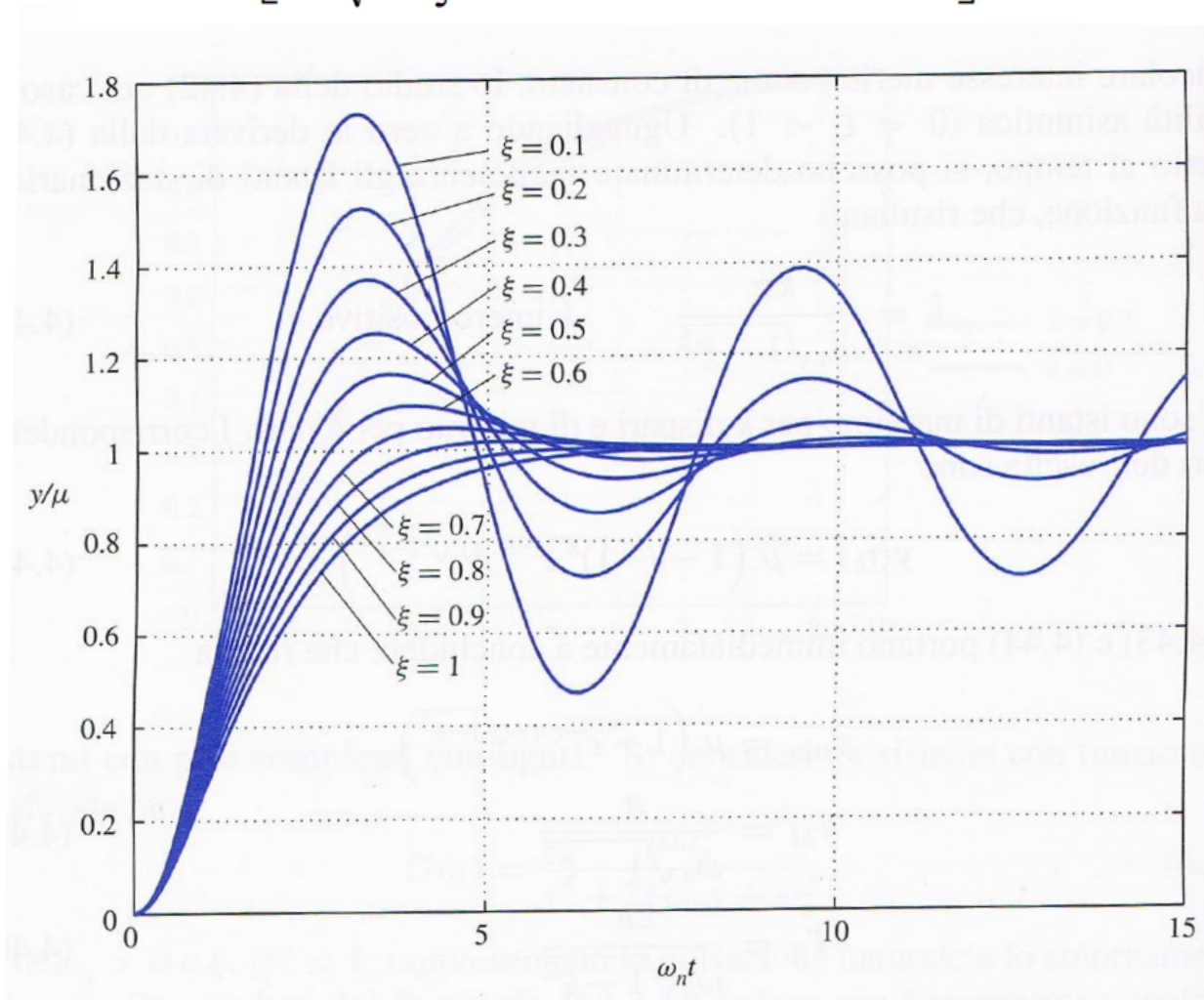
$$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$$



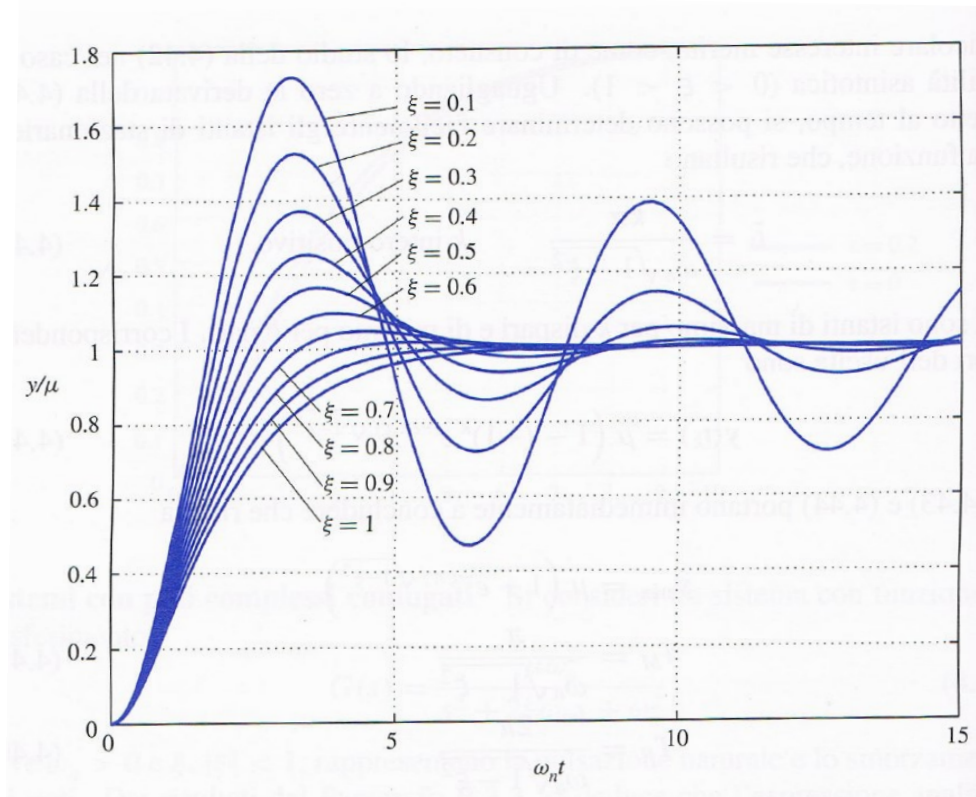
$$\xi = \sin(\psi)$$

## Risposta parametrizzata

$$y(t) = \mu \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \alpha) \right]$$



## Periodo dell'oscillazione e sovraelongazione percentuale



**Periodo**

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

**Istante del primo punto di massimo**

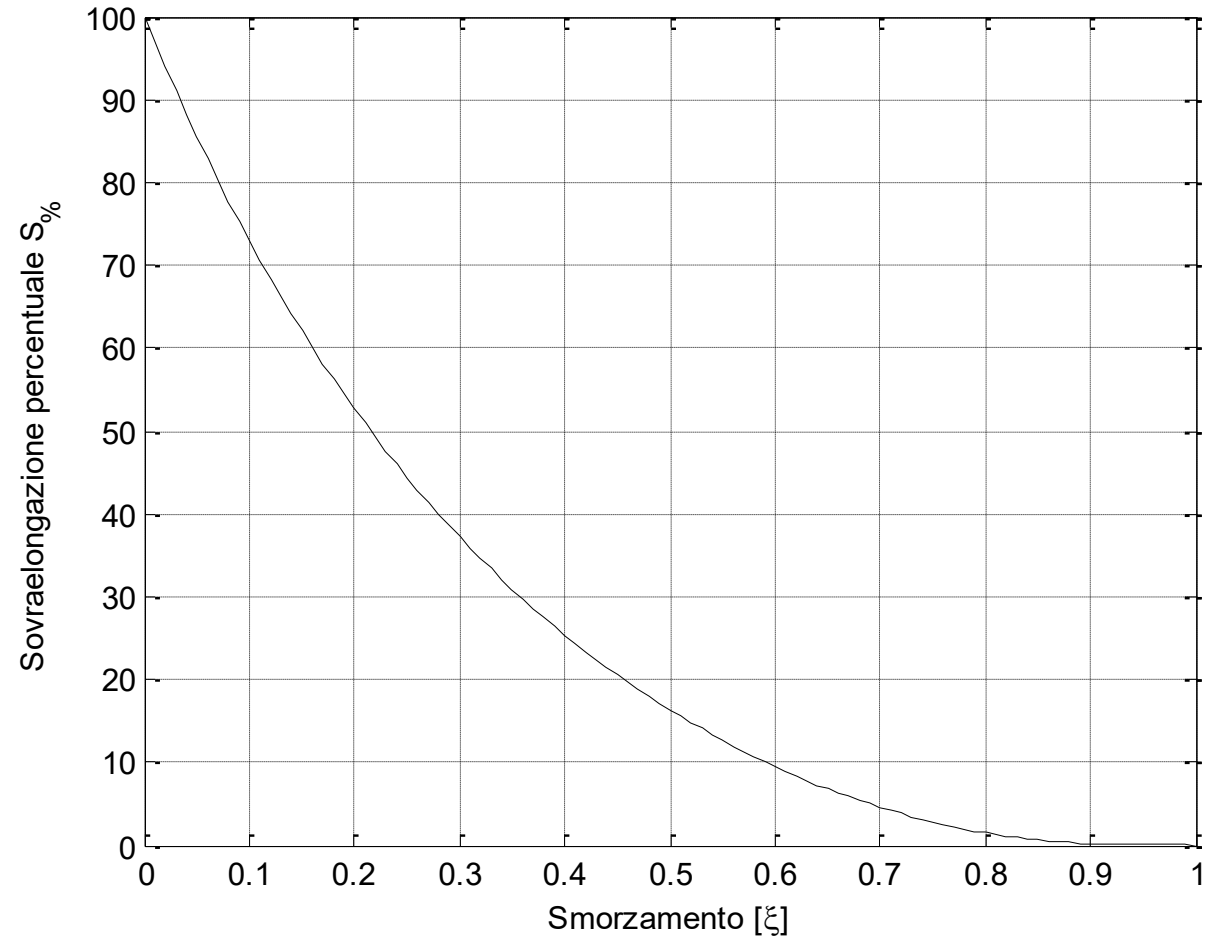
$$t_{max} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$S_{\%} = 100 \frac{y_{max} - \mu}{\mu} = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

**Sovraelongazione percentuale**  
**(dipende unicamente dallo smorzamento)**

## Sovraelongazione percentuale vs. smorzamento

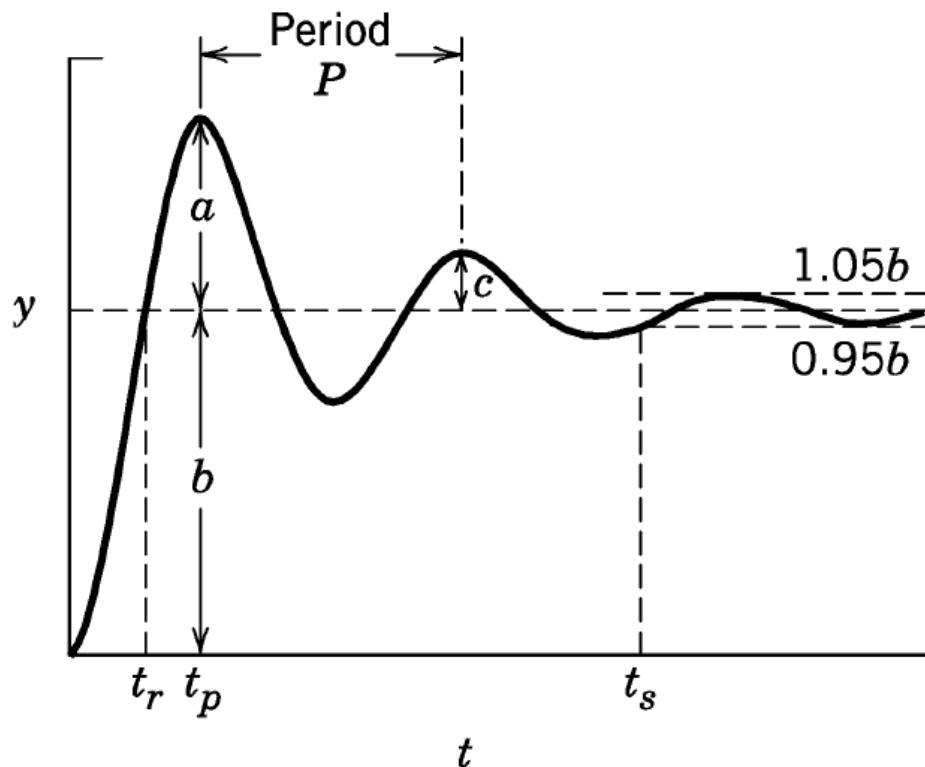
$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



```
xi=0:0.01:1;
s=100*exp((-xi*pi)./(sqrt(1-xi.^2)));
plot(xi,s,'k'),grid
xlabel('Smorzamento [\xi]')
ylabel('Sovraelongazione percentuale S_%)')
```

## Rapporto di decadimento delle oscillazioni

**Decay Ratio.**  $DR = c/a$  (where  $c$  is the height of the second peak).

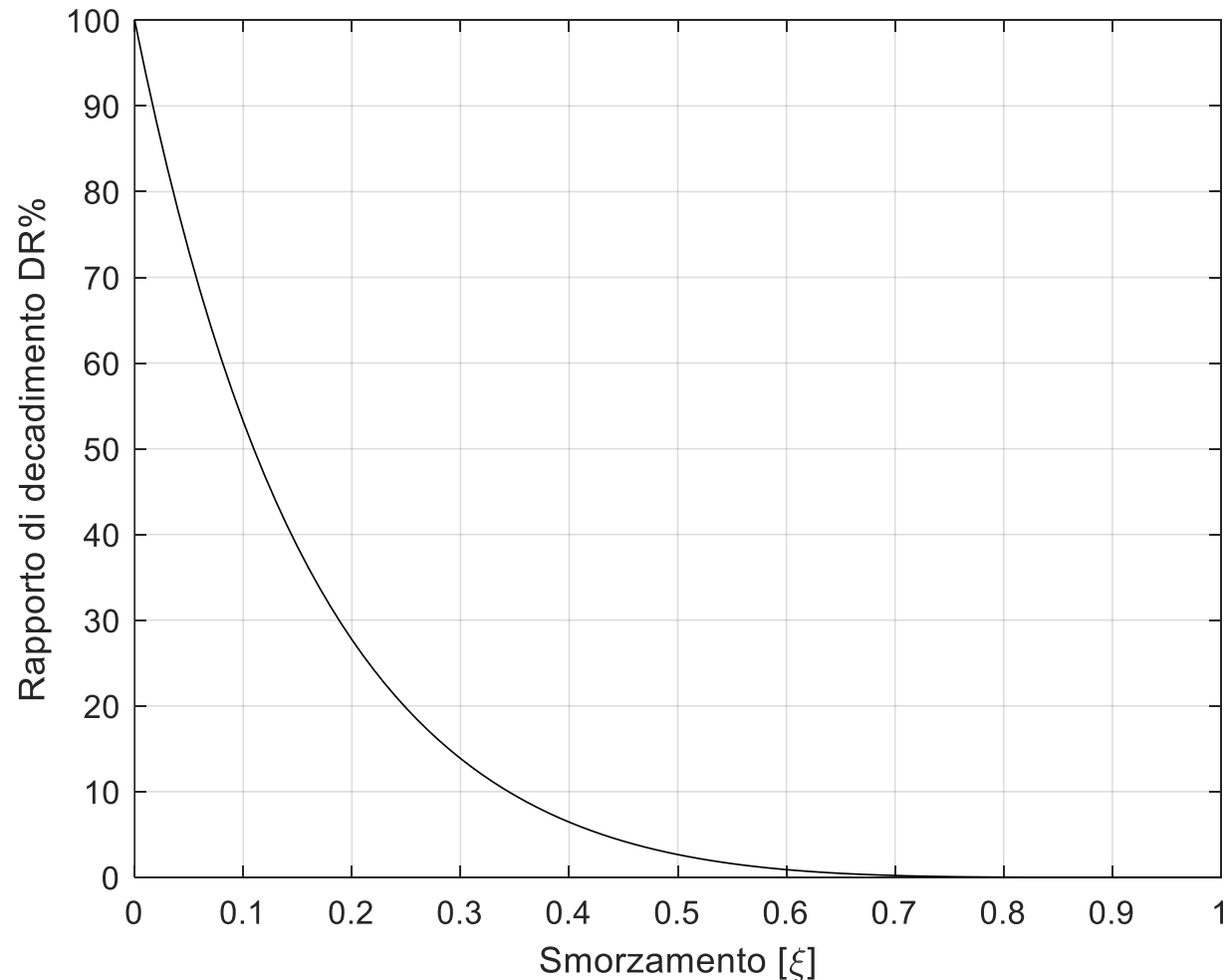


Dipende unicamente dallo smorzamento

$$DR = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

## *Rapporto di decadimento percentuale delle oscillazioni*

$$DR\% = 100e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



## Tempi di assestamento

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{3}{\xi\omega_n}$	$\frac{3.9}{\xi\omega_n}$	$\frac{4.6}{\xi\omega_n}$
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)}$	$3\tau$	$3.9\tau$	$4.6\tau$
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)^2}$	$4.7\tau$	$5.8\tau$	$6.6\tau$

## Tempi di assestamento – relazioni approssimate

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

«costante di tempo equivalente» della coppia di poli CC

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$	$3\tau_{eq}$	$4\tau_{eq}$	$5\tau_{eq}$
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)}$	$3\tau$	$4\tau$	$5\tau$
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)^2}$	$5\tau$	$6\tau$	$7\tau$

## Esempio

$$F(s) = \frac{14}{s^2 + 2s + 7}$$

Poiché il polinomio caratteristico della FdT ha i coefficienti con segno concorde, le sue radici hanno certamente parte reale negativa (regola di Cartesio). Il sistema è dunque as. stabile

Il guadagno statico è  $\mu = F(0) = 2$       Tale valore sarà il valore di regime della risposta al gradino unitario

Calcoliamo il  $\Delta$  dell'equazione di secondo grado per verificare se i poli siano reali o complessi coniugati

$$\Delta = 4 - 28 = -24 \quad \text{Poli complessi coniugati}$$

Ci interessa valutarne smorzamento e pulsazione naturale

Uguagliamo il polinomio caratteristico della FdT alla forma generale precedentemente introdotta in cui compaiono esplicitamente lo smorzamento e la pulsazione naturale

$$s^2 + 2s + 7 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{7} \approx 2.64 \text{ rad/sec}$$

$$2\xi\omega_n = 2 \quad \Rightarrow \quad \xi = 1/\omega_n \approx 0.37$$

Un modo alternativo di procedere, più lungo, è quello di determinare esplicitamente la parte reale  $a$  e la parte immaginaria  $b$  della coppia di poli complessi coniugati applicando la formula risolutiva per una equazione di secondo grado

$$p_{1,2} = -\frac{2 \pm \sqrt{-24}}{2} = -1 \pm 2.45j \quad a = -1, \quad b = 2.45$$

e applicare successivamente le formule

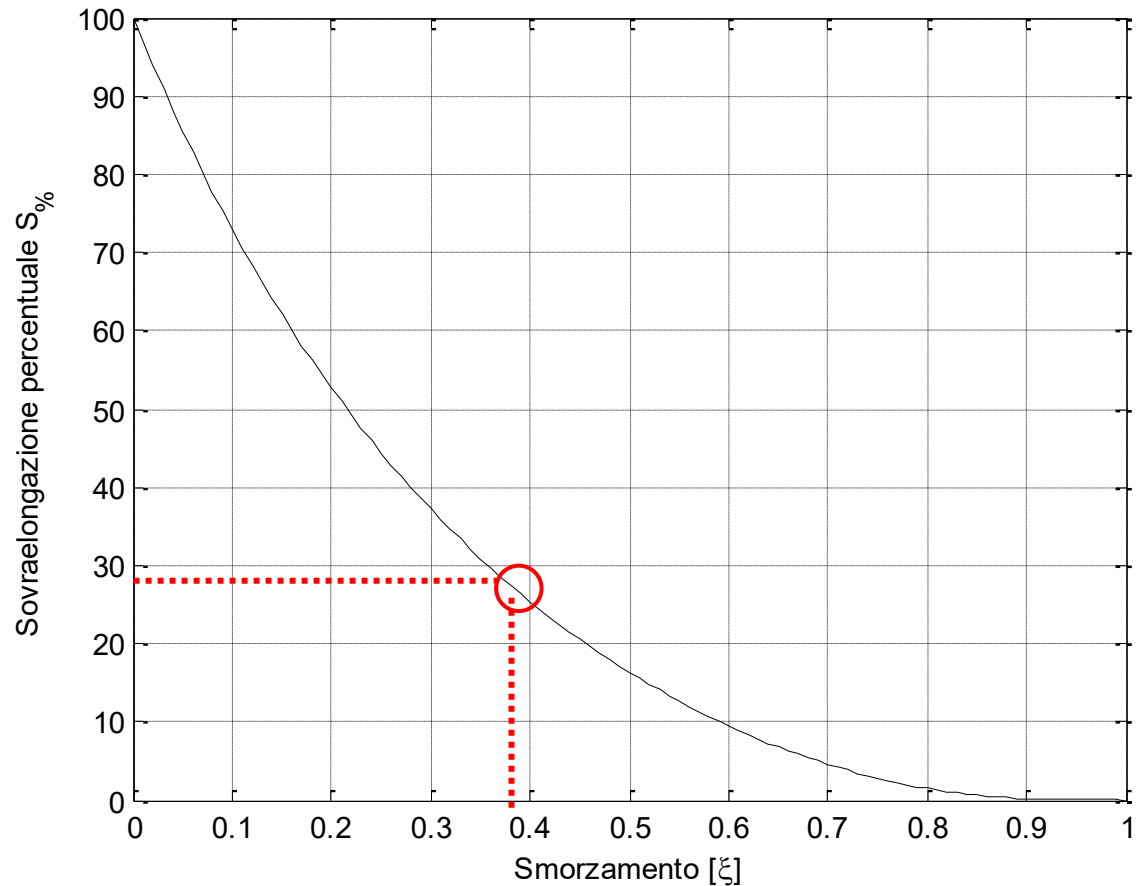
$$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2} = 2.64 \quad \xi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.37$$

## Sovraelongazione percentuale

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\xi \approx 0.37$$

$$S_{\%} \approx 28$$



Il valore massimo dell'uscita durante il transitorio sarà pertanto

$$y_{max} = \mu + 0.28 \mu = 1.28\mu = 2.56$$

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi \omega_n} \approx 1.02 \text{ s} \quad \text{Costante di tempo equivalente e tempi di assestamento}$$

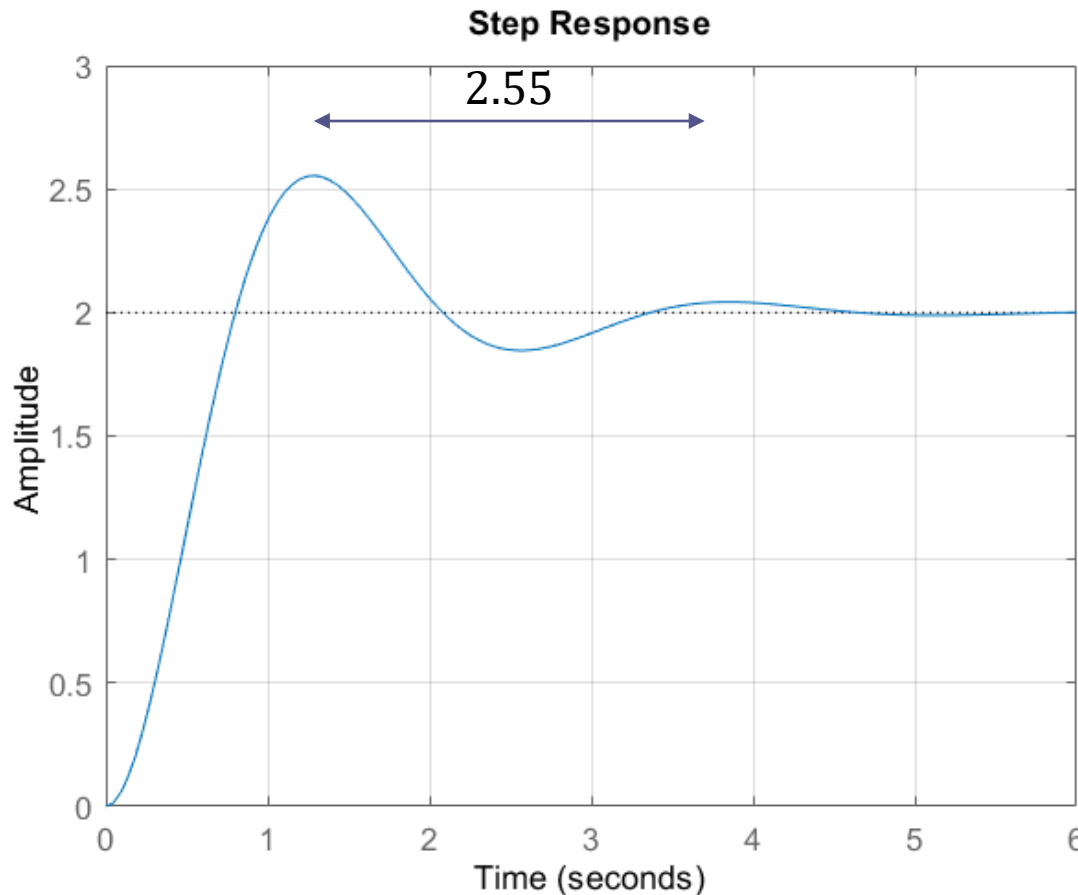
	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}$	$3\tau_{eq}$	$4\tau_{eq}$	$5\tau_{eq}$
$F(s) = \frac{14}{s^2 + 2s + 7}$	3.06 s	4.08 s	5.10 s

Periodo della oscillazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 2.55 \text{ s}$$

Istante del primo punto di massimo

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 1.27 \text{ s}$$



$$S_{\%} \approx 28$$

$$y_{max} = 2.56$$

$$T_{a5\%} \approx 3 \text{ s}$$

Trascorsi 3 secondi la risposta evolve nella fascia [1.9, 2.1]

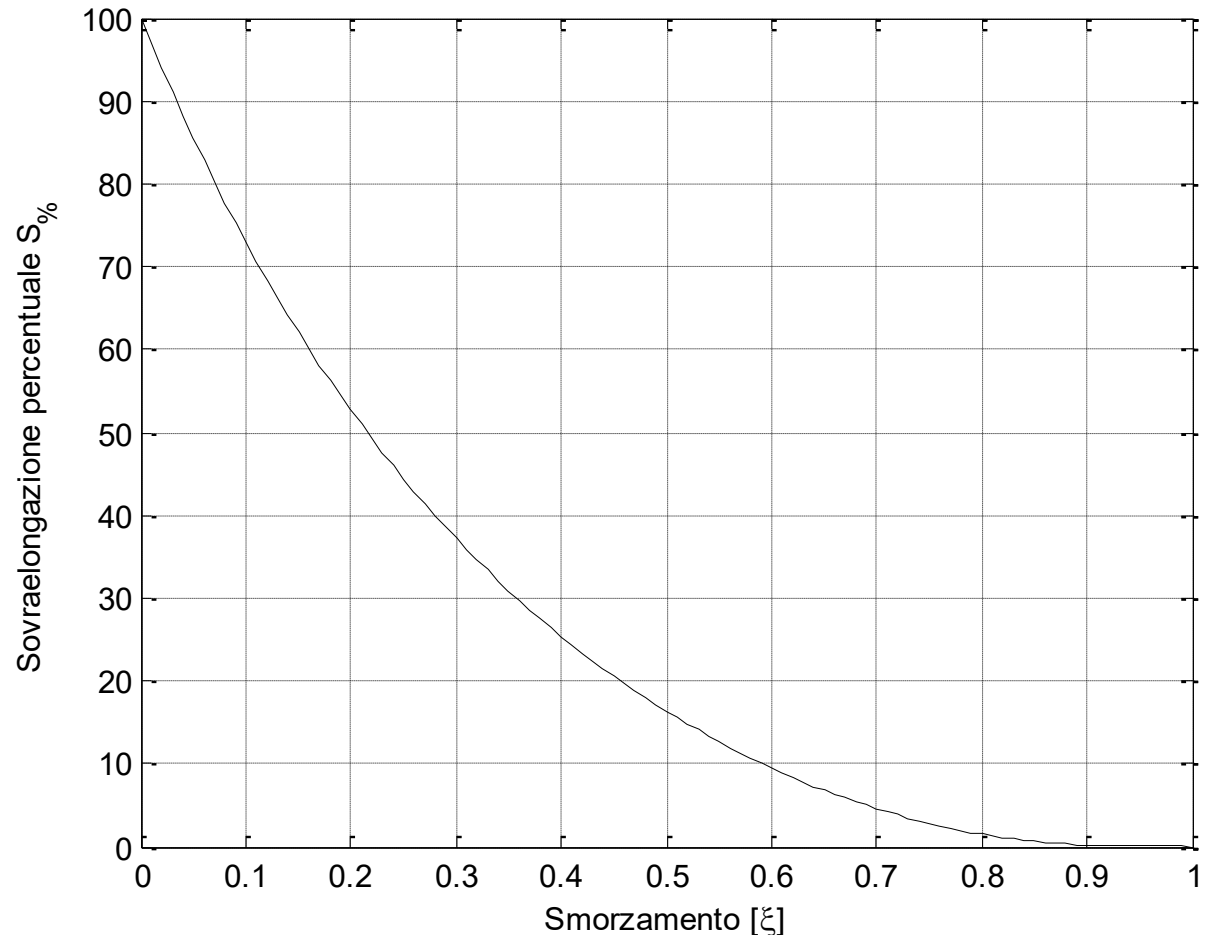
$$DR = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.08$$

L'ampiezza di ciascuna oscillazione è pari all' 8% di quella precedente

***Come possiamo garantire che in un sistema di controllo la sovraelongazione sia, ad esempio, inferiore al 10 % ?***

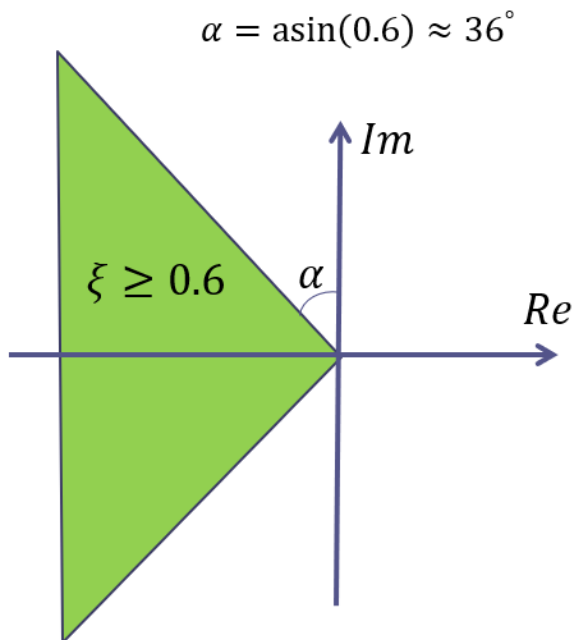
*Sovraelongazione percentuale vs. smorzamento*

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



Sulla base del grafico precedente, desumiamo come per fare in modo che in un sistema di controllo la sovraelongazione percentuale sia minore del 10% è sufficiente garantire che **tutti i poli complessi coniugati della FdT a ciclo chiuso abbiano uno smorzamento maggiore o uguale di 0.6.**

In termini grafici, ciò corrisponde a garantire che i poli a ciclo chiuso ricadano all'interno di una **regione ammissibile**



Ragionamenti di questo tipo saranno alla base di una parte delle metodologie di progetto che vedremo più avanti («Sintesi mediante Luogo delle Radici»)

$$\xi = 0 \quad F(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \quad y(t) = \mu(1 - \cos(\omega_n t))$$

Oscillazione permanente non smorzata avente **periodo**  $T = 2\pi/\omega_n$

Se lo smorzamento è nullo  $F(s)$  **non è più asintoticamente stabile**

$$F(s) = \frac{9}{(s^2 + 5)}$$

```
mu=9/5;
```

```
omegan=sqrt(5);
```

```
T=2*pi/omegan
```

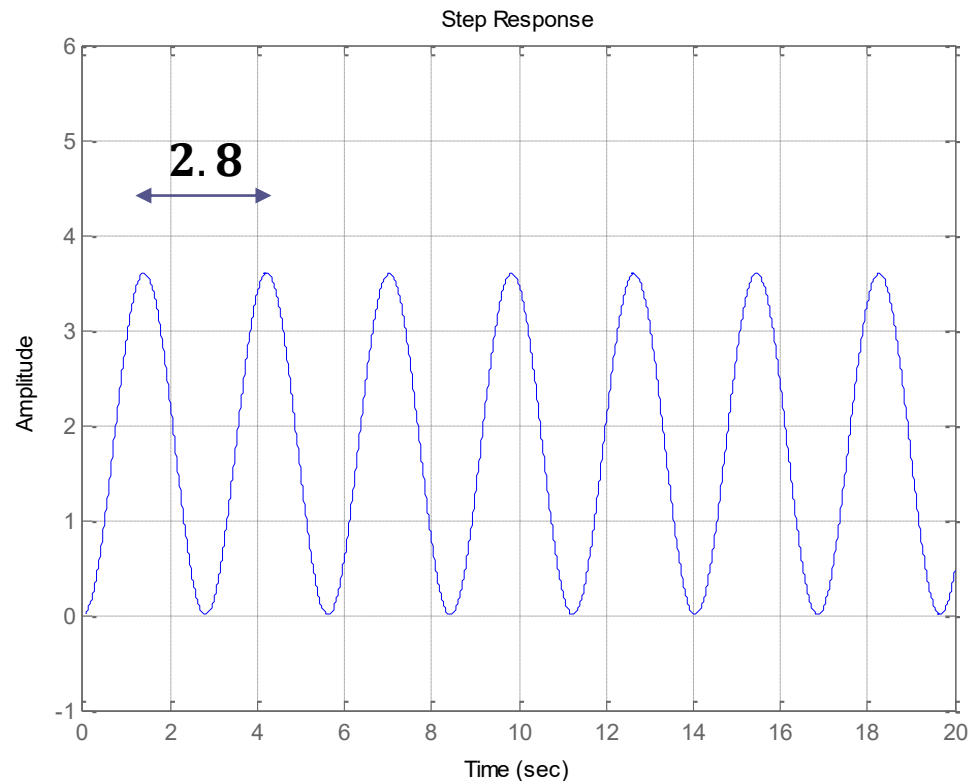
```
step(9, [1 0 9], 0:0.01:20)
```

```
grid
```

```
axis([0 20 -1 6])
```

```
T =
```

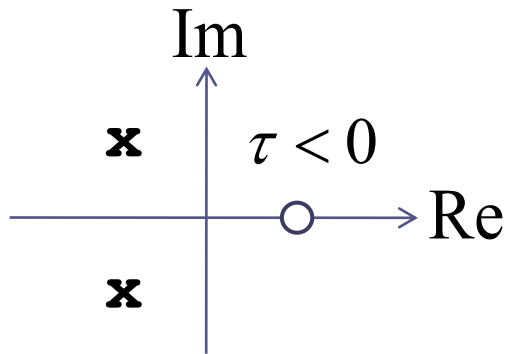
```
2.8099
```



## Sistema con due poli complessi coniugati e uno zero reale

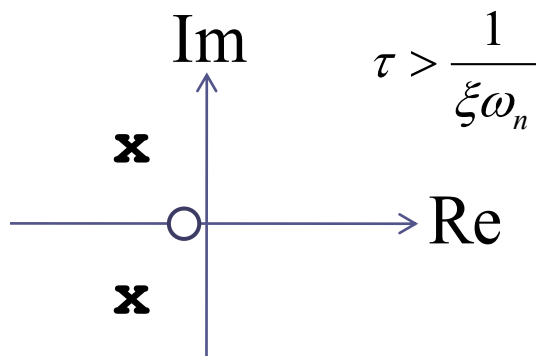
$$F(s) = \frac{\mu\omega_n^2(\tau s + 1)}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$\omega_n > 0 \quad |\xi| < 1$$

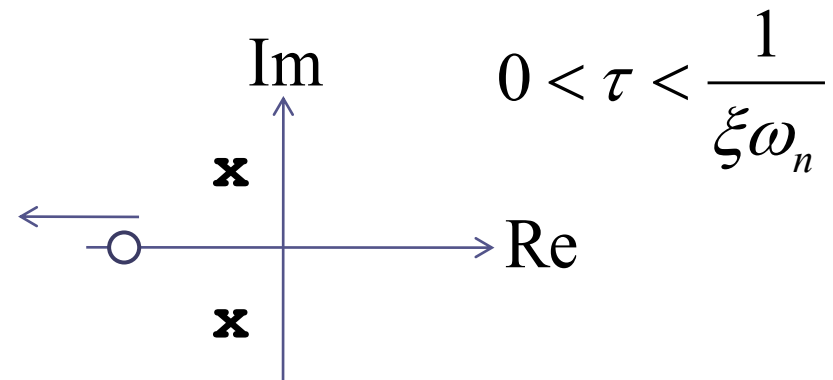


**A. Zero nel semipiano destro:**  
undershooting e successive  
oscillazioni smorzate verso il regime

**B. Zero reale negativo la cui parte reale è più in bassa frequenza rispetto alla coppia di poli CC. Incremento della sovraelongazione.**



**C. Zero in alta frequenza:**  
progressivamente ininfluyente



## A. Zero nel semipiano destro

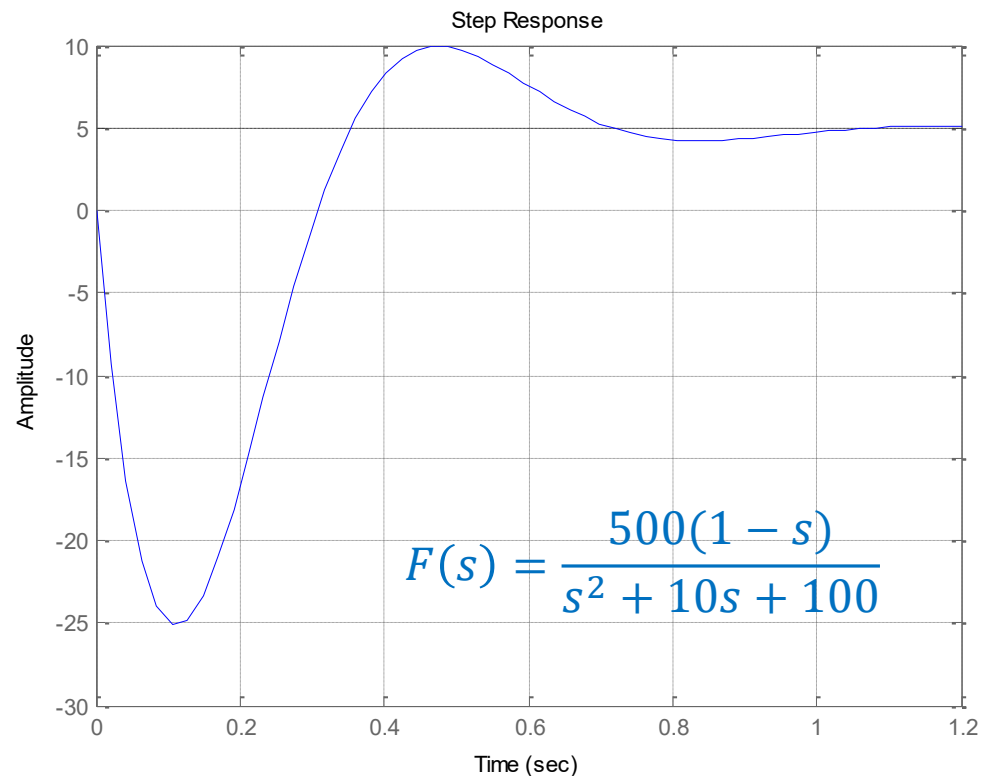
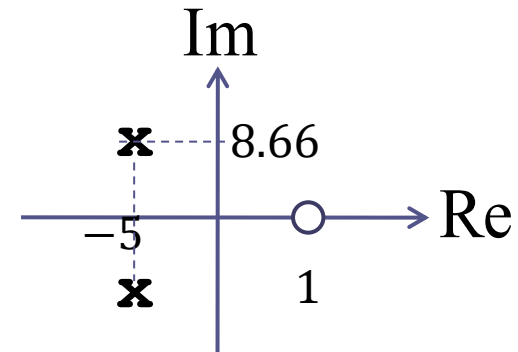
Consideriamo un sistema del secondo ordine avente guadagno statico pari a 5, uno zero in 1, ed una coppia di poli complessi coniugati con i seguenti valori per lo smorzamento e la pulsazione naturale

$$\xi = 0.5 \quad \omega_n = 10$$

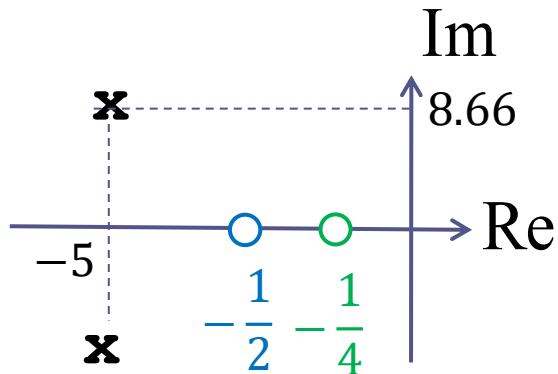
Le parti reale e immaginaria della coppia di poli CC sono

$$a = -\xi\omega_n = -5$$

$$b = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 8.66$$

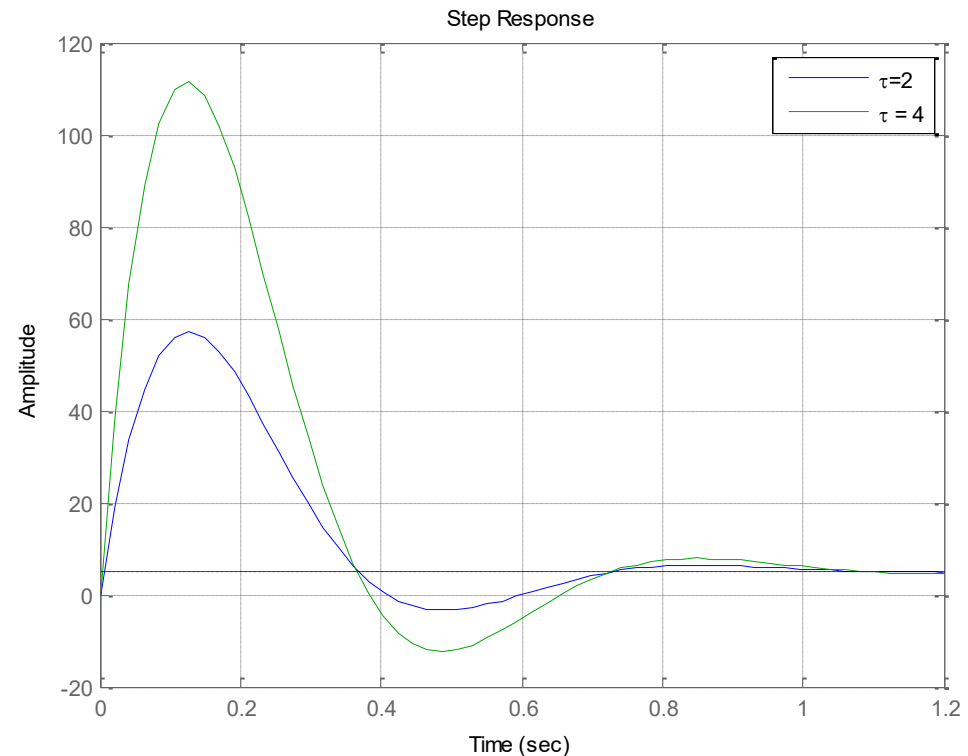


## B. Zero reale negativo la cui parte reale è più in bassa frequenza rispetto alla coppia di poli CC



Stesso guadagno statico (5) e stessa coppia di poli CC del precedente esempio.

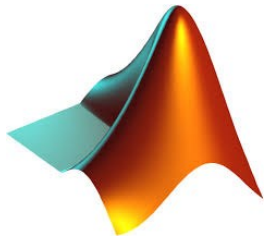
Consideriamo due distinte collocazioni per lo zero in bassa frequenza



$$F(s) = \frac{500(1 + 2s)}{s^2 + 10s + 100} \quad F(s) = \frac{500(1 + 4s)}{s^2 + 10s + 100}$$

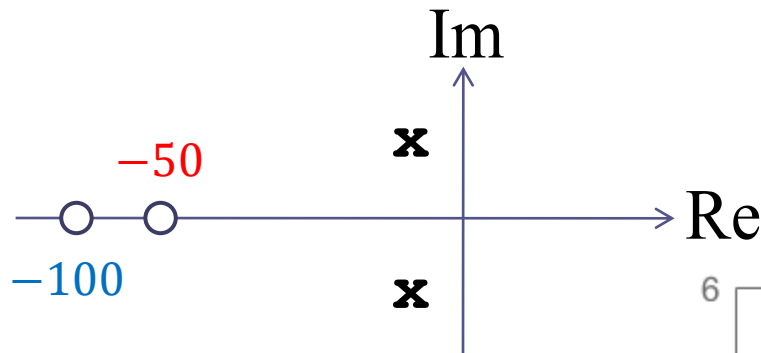
Lo zero più vicino all'origine induce una sovraelongazione maggiore, e ben più grande di quella (pari al massimo al 100%) del sistema avente solo i due poli CC

## Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
close all
clear all
tau=2;
xi=0.5;
omegan=10;
mu=5;
F1=tf(mu*omegan^2*[tau 1],[1 2*xi*omegan omegan^2]);
tau=4;
F2=tf(mu*omegan^2*[tau 1],[1 2*xi*omegan omegan^2]);
step(F1,F2),grid
legend('\tau=2','\tau = 4')
```

## C. Zero in alta frequenza

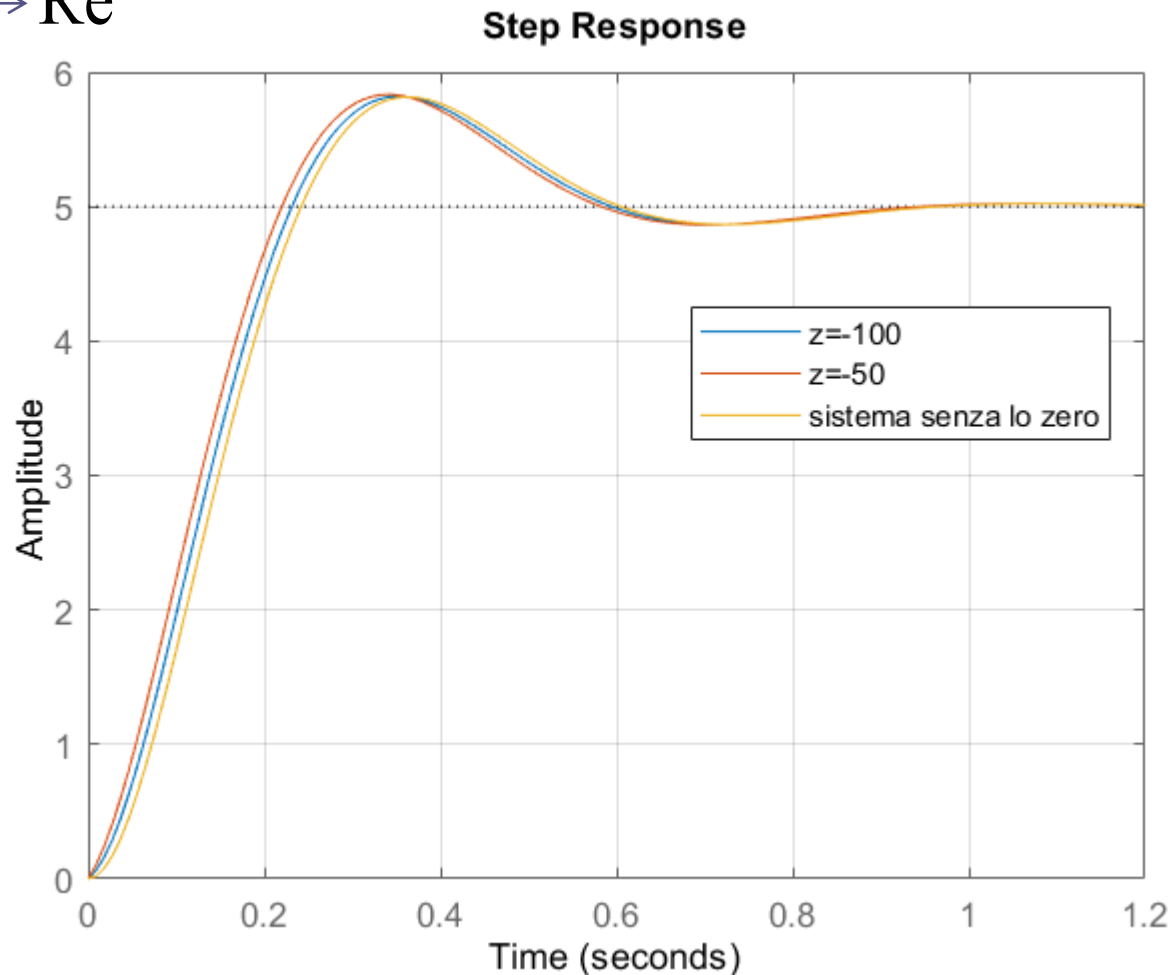


Consideriamo due distinte collocazioni per lo zero in alta frequenza.

Stesso guadagno statico e stessa coppia di poli CC del precedente esempio.

La presenza dello zero sortisce effetti debolmente apprezzabili.

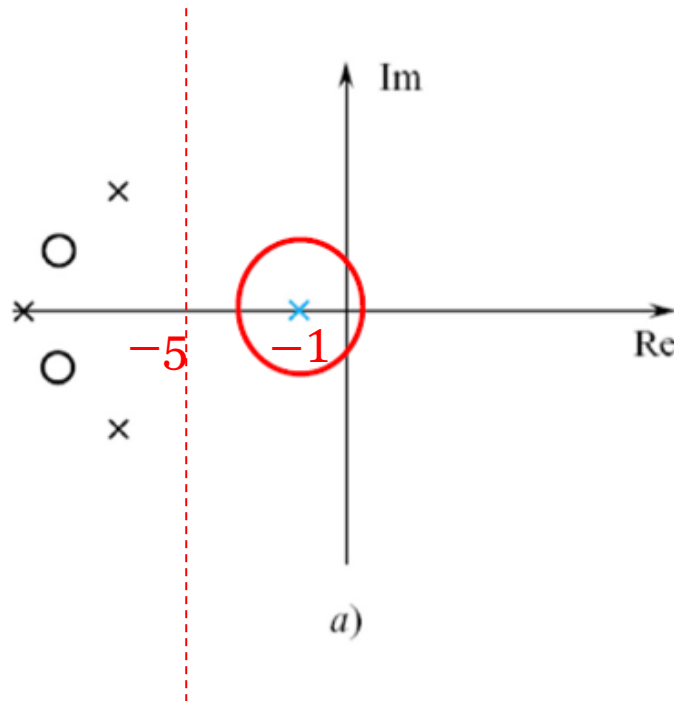
Lo zero in  $-50$  altera la risposta in misura maggiore rispetto allo zero in  $-100$



## Poli dominanti in presenza di poli complessi coniugati

In presenza di poli complessi coniugati, per determinare se tale coppia di poli sia dominante, o possa essere trascurata, **si deve fare riferimento alla loro parte reale (o, in altri termini, alla loro costante di tempo equivalente)** e successivamente applicare analoghe considerazioni rispetto a quelle viste nel caso dei poli reali.

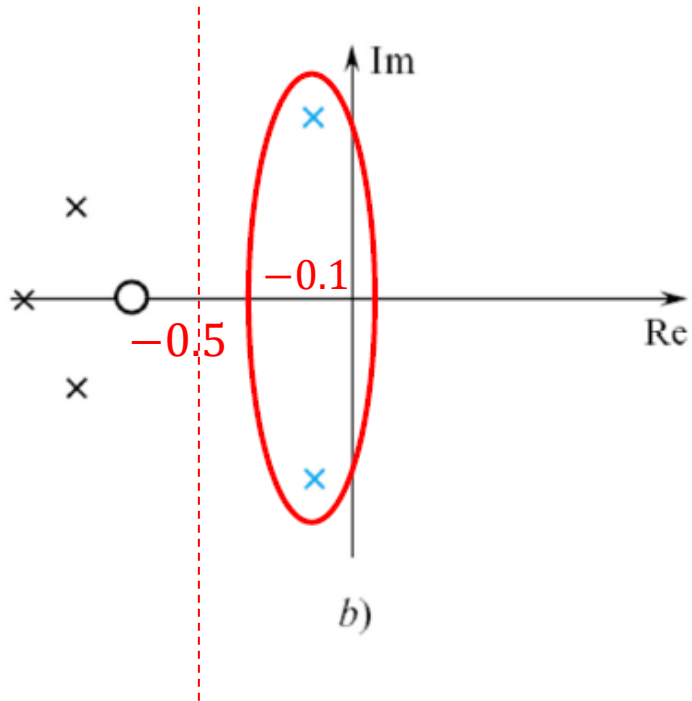
«RETTA LIMITE»



Il polo reale in  $-1$  risulta essere dominante.

Tutti i poli e gli zeri alla sinistra della «retta limite» che interseca l'asse reale in  $-5$  possono essere rimossi dalla FdT senza che la risposta al gradino e le principali caratteristiche dinamiche risultino apprezzabilmente modificate

## RETTA LIMITE



La coppia di poli CC avente parte reale  $-0.1$  risulta essere dominante.

Tutti i poli e gli zeri alla sinistra della «retta limite» che interseca l'asse reale in  $-0.5$  possono essere rimossi dalla FdT senza che le caratteristiche dinamiche principali della risposta al gradino risultino apprezzabilmente modificate

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(1 + 0.02s + 0.002s^2)(1 + 0.1s + s^2)}$$

Polo reale negativo in  $-10$

Analisi del termine  $0.002s^2 + 0.02s + 1 = 0.002(s^2 + 10s + 500)$

Poiché il  $\Delta$  dell'equazione di secondo grado  $s^2 + 10s + 500$  è negativo, la coppia di radici è complessa coniugata

Imponiamo l'uguaglianza membro a membro del polinomio  $s^2 + 10s + 500$  con la forma generale  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$  del termine trinomio

da cui si desume

$$\begin{array}{l} \omega_n^2 = 500 \\ 2\xi\omega_n = 10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \omega_n = \sqrt{500} = 22.36 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \xi = \frac{5}{\omega_n} = 0.22 \end{array}$$

Parte reale:  $a = -\xi\omega_n = -5$

Parte immaginaria:  $b = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 21.8$

**ESEMPIO**

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(1 + 0.02s + 0.002s^2)(1 + 0.1s + s^2)}$$

Polo reale negativo in  $-10$

**Analisi del termine  $s^2 + 0.1s + 1$**

Calcoliamo le radici con la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado

$$\frac{-0.1 \pm \sqrt{0.01 - 4}}{2} = \frac{-0.1 \pm j\sqrt{3.99}}{2} = -0.05 \pm j0.99$$

$$a = -0.05$$

$$b = \pm 0.99$$

Determiniamo la pulsazione naturale e lo smorzamento

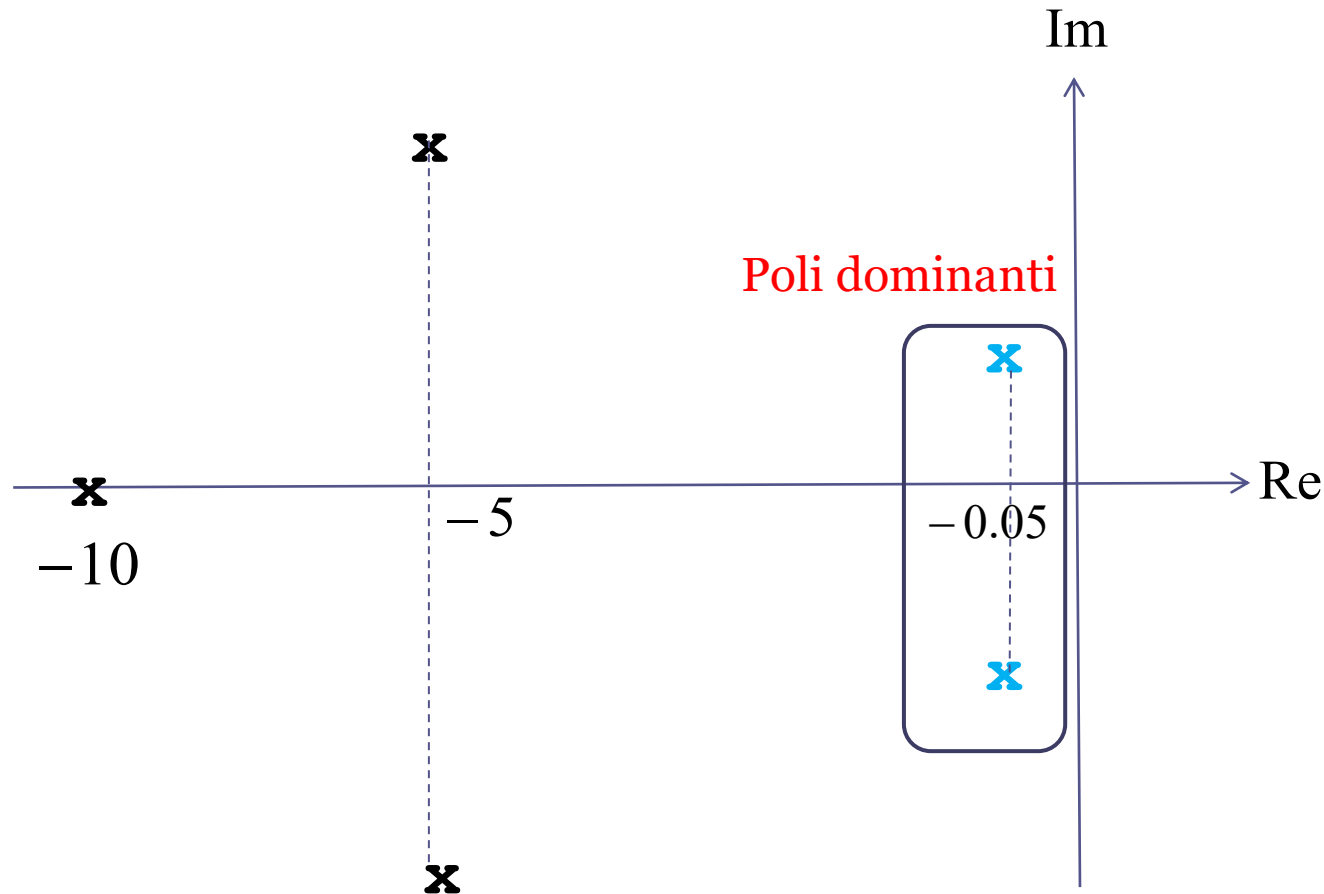
$$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2} = 0.99$$

$$\xi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.05$$

## ESEMPIO

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(1 + 0.02s + 0.002s^2)(1 + 0.1s + s^2)}$$

-10

 $-5 \pm j21.8$  $-0.05 \pm j0.99$ 

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(1 + 0.02s + 0.002s^2)(1 + 0.1s + s^2)}$$

$$G^{appr}(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s + s^2)} \quad \begin{array}{l} \omega_n = 0.99 \\ \xi = 0.05 \end{array}$$



$$\mu = G(0) = 1$$

$$S_{\%} \approx 90 \quad DR_{\%} \approx 80$$

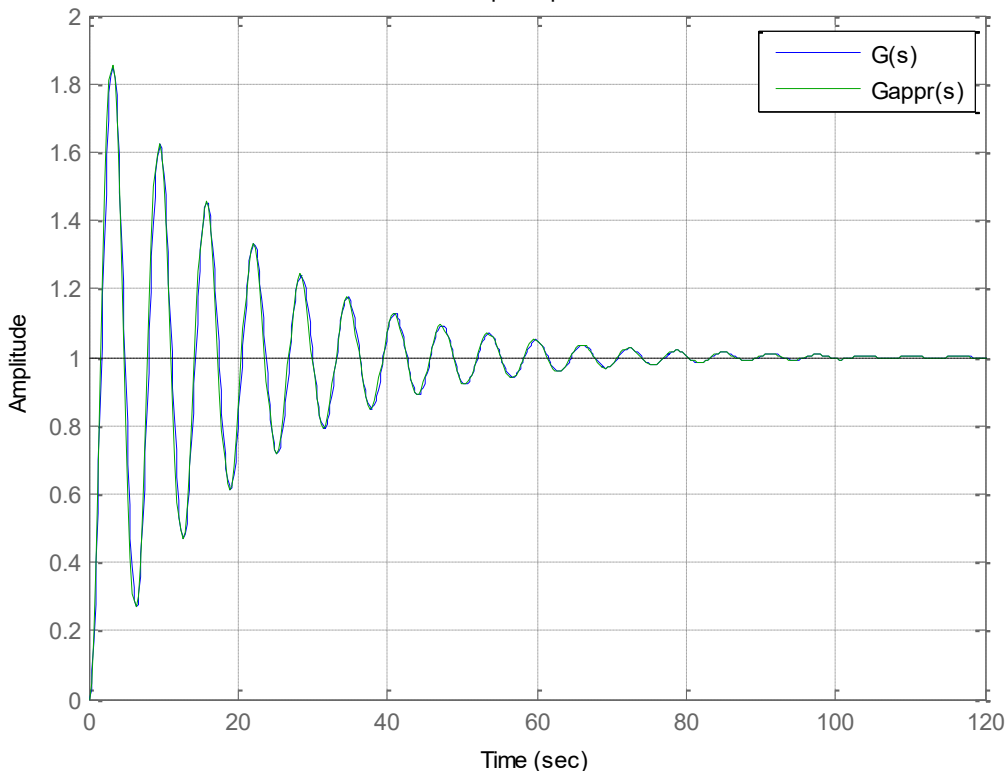
$$T_{eq} = \frac{1}{\xi \omega_n} = 20s$$

$$T_{a5\%} = 3T_{eq} = 60s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 6.3s$$

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 3.15s$$

Step Response



```
denG=conv([0.1 1],[.002 .02 1]);
denG=conv(denG,[1 0.1 1]);
G=tf(1,denG);
Gappr=tf(1,[1 0.1 1]);
step(G,Gappr),grid
legend('G(s)','Gappr(s)')
```

## ESERCIZIO

Un servomeccanismo di posizione realizzato per mezzo di un motore elettrico in corrente continua è descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita sotto forma di equazione differenziale

$$\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\theta}(t) = 4V(t)$$



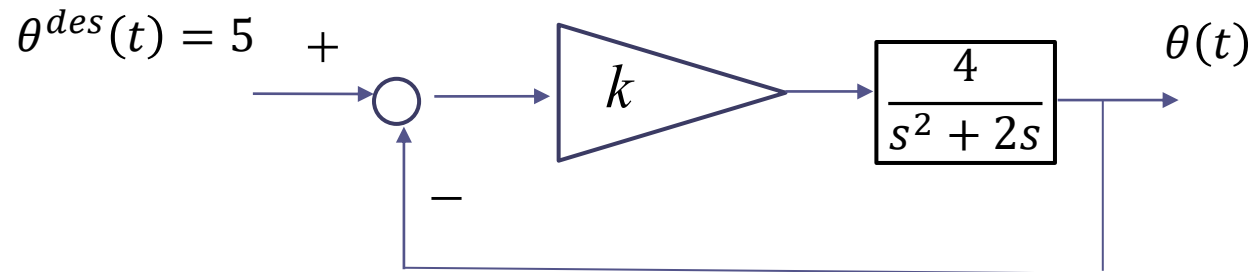
in cui  $\theta(t)$  denota la posizione angolare dell'albero del motore, e  $V(t)$  la tensione di alimentazione.

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta a ciclo chiuso con un set point costante  $\theta^{\text{des}}(t)=5$  nel caso si impieghi un regolatore proporzionale con guadagno  $K=5$ .

Per il processo a ciclo chiuso, si scriva la relazione ingresso-uscita sotto forma di equazione differenziale (ingresso:  $\theta^{\text{des}}(t)$ , uscita:  $\theta(t)$ ).

## TRACCIA

$$G_v^\theta(s) = \frac{4}{s^2 + 2s}$$



$$G_{\theta^{des}}^\theta(s) = \frac{k \cdot \frac{4}{s^2 + 2s}}{1 + k \cdot \frac{4}{s^2 + 2s}} = \frac{4k}{s^2 + 2s + 4k}$$

Sistema di controllo sempre as. stabile a ciclo chiuso per qualunque valore positivo di  $k$  (regola di Cartesio)

Il guadagno statico della FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita è pari ad 1. Ciò significa che applicando un set point costante si ottiene un profilo della posizione che tende asintoticamente al valore del set point.

$$k = 5 \quad G_{\theta^{des}}^\theta(s) = \frac{20}{s^2 + 2s + 20}$$

Equazione differenziale che mette in relazione il set point e la posizione angolare del motore

$$\ddot{\theta}(t) + 2 \dot{\theta}(t) + 20 \theta(t) = 20 \theta^{des}(t)$$

## Calcolo dei parametri caratteristici della risposta al gradino

$$P_{car}(s) = s^2 + 2s + 20$$

$$2\xi\omega_n = 2$$

$$\xi = \frac{1}{\omega_n} \cong 0.22$$

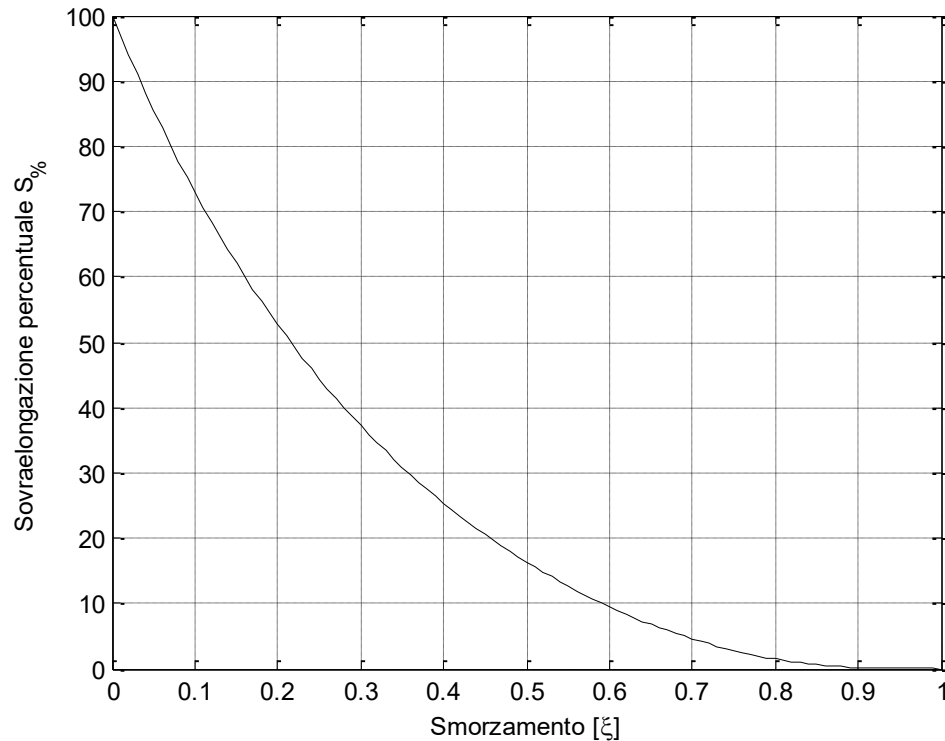
$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi\omega_n} = 1s$$

$$\omega_n^2 = 20$$

$$\omega_n = \sqrt{20} \cong 4.47 \text{ rad/s}$$

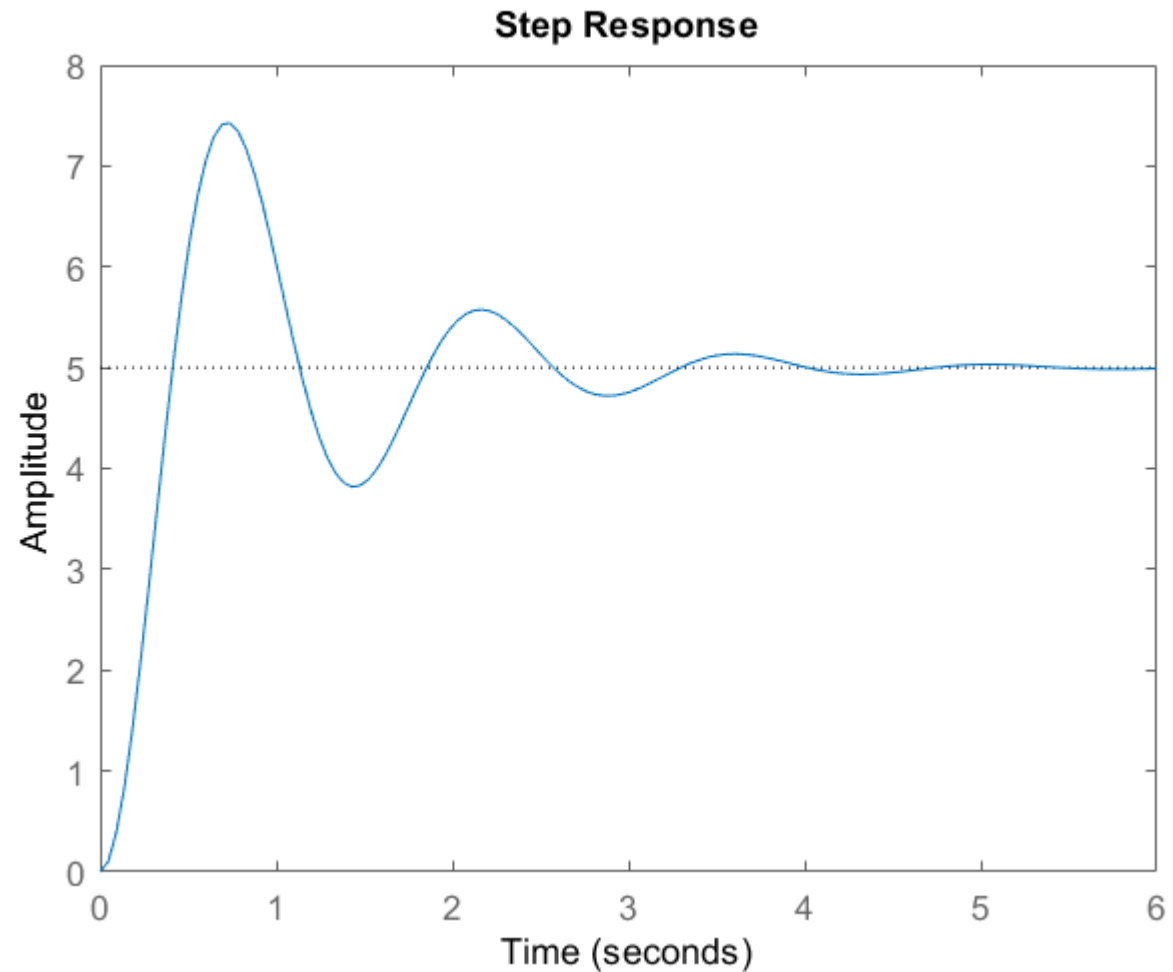
$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \cong 1.4s$$

Periodo della  
oscillazione



$$S_{\%} \approx 50$$

## SOLUZIONE



Equazione differenziale che mette in relazione il set point e la posizione angolare del motore

$$\ddot{\theta}(t) + 2 \dot{\theta}(t) + 20 \theta(t) = 20\theta^{des}(t)$$