Bernhard Riemann

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2023-24

Bernhard Riemann (1826-1866)

Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria

- Per il suo esame di abilitazione Riemann doveva proporre tre argomenti, all'interno dei quali la commissione era tenuta a sceglierne uno.
- Gauss (contrariamente alle speranze di Riemann) scelse "Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria", argomento che gli stava molto a cuore.
- Il testo della lezione è molto difficile da leggere: non contiene formule perché doveva essere tenuta presso la Facoltà di Filosofia, al cui interno Matematica formava un dipartimento. Nella commissione, oltre a Gauss, sedeva Lotze.

Riemann e le altre geometrie non euclidee

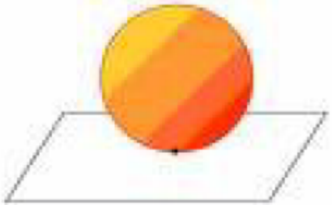
Riemann, nella lezione, non menziona mai le geometrie non euclidee, probabilmente per due ragioni:

1. Lotze (uno dei commissari) era noto per non averne un'opinione favorevole;
2. Riemann voleva evitare che la discussione scivolasse su un dibattito ideologico pro o contro tali geometrie, che avrebbe messo in ombra i suoi contributi più originali.

Non abbiamo evidenza che Riemann avesse letto Bolyai o Lobačevskij, anche se il lavoro di quest'ultimo sulla geometria immaginaria era uscito sullo stesso numero del *Journal* di Crelle su cui era stato pubblicato un lavoro di Dirichlet sulle serie di Fourier che Riemann aveva sicuramente letto.

Flatlandia

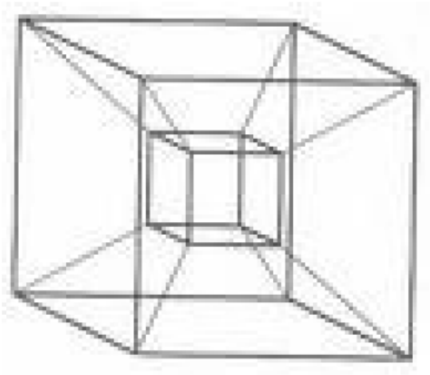
- Un mondo a due dimensioni!
- Gli abitanti sono bidimensionali e non riescono a concettualizzare gli oggetti tridimensionali.



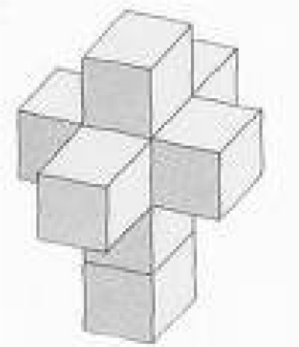
Come “spiegare” un cubo a un abitante di Flatlandia?

- sezioni bidimensionali;
- proiezioni bidimensionali;
- sviluppo;
- metodo dinamico (quadrato che si sposta lungo una dimensione ad esso perpendicolare).

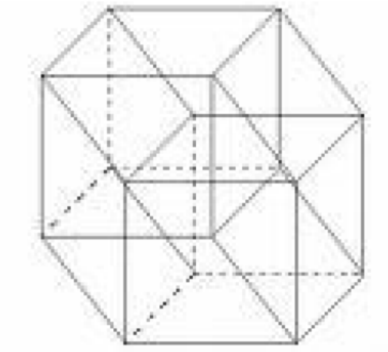
Ipercubo (proiezione tridimensionale)



Ipercubo (sviluppo tridimensionale)



Ipercubo (immagine dinamica)



La geometria a n dimensioni

- Già Cayley (1846) e Grassmann (1847) avevano studiato spazi a più di tre dimensioni, basandosi sull'idea che, così come un punto nello spazio tridimensionale è determinato da una terna (x, y, z) di coordinate, un punto in uno spazio ad n dimensioni è determinato da una n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di coordinate.
- Riemann sostiene che tutta la matematica è lo studio di "quantità estese n-plici", ivi inclusa l'analisi reale, l'analisi complessa (vista come lo studio di funzioni su coppie ordinate di numeri reali), infine la geometria vista come studio delle *varietà n-dimensionali*.

Varietà e superfici

Una varietà a n dimensioni ha localmente le stesse proprietà dello spazio euclideo n-dimensionale $\mathbf{R}^n$. Formalmente:

Definition

Una *varietà a n dimensioni* è uno spazio di Hausdorff (X, T) con una base numerabile, tale che ogni punto $p \in X$ appartiene a un aperto $A \in T$ omeomorfo a $\mathbf{R}^n$.

Una superficie è una varietà bidimensionale. Quindi, una superficie ha localmente le stesse proprietà del piano euclideo $\mathbf{R}^2$.

Gli spazi metrici (1)

Perché una varietà sia passibile di studio geometrico, deve essere possibile compiervi *misure* e deve quindi ammettere una nozione di *distanza*.
Questo porta alla nozione di *spazio metrico*:

Definition

Uno *spazio metrico* è una coppia ordinata (X, d), dove X è un insieme non vuoto e $d : X^2 \longrightarrow R$ (la *funzione distanza*) soddisfa le seguenti condizioni per ogni $a, b, c \in X$:

1. $d(a, b) \geq 0$;
2. $d(a, b) = d(b, a)$;
3. $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$;
4. $d(a, b) = 0$ sse $a = b$.

Gli spazi metrici (2)

Example

1. (R, d), dove $d(a, b) = |a - b|$ è uno spazio metrico.
2. Più in generale, (R^n, d), dove $d((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$, è uno spazio metrico.
3. Sia X un insieme non vuoto qualsiasi. (X, d), dove per ogni $a, b \in X$ si ha $d(a, b) = \begin{cases} 1 \text{ se } a = b, \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$

Theorem

Ogni varietà (X, T) è metrizzabile: la sua topologia T è indotta da una funzione $d : X^2 \to R$ tale che (X, d) è uno spazio metrico.

Geometria e misure intrinseche

- Gauss aveva sostenuto che è possibile studiare la geometria di una superficie senza fare riferimento allo spazio tridimensionale euclideo circostante. Se due superfici hanno curvature diverse, soddisfano anche teoremi geometrici diversi.
- Riemann va oltre: tutta la geometria è basata su misure intrinseche. Concetti quali quelli di lunghezza, angolo e distanza possono essere definiti in modo diverso per ciascuna varietà di riferimento.
- Vi sono dunque molteplici geometrie possibili, una per ogni varietà e per ogni possibile definizione di distanza. Ognuna di queste geometrie avrà un insieme di teoremi ad essa associato.

La misura come integrazione

- Una superficie è una varietà bidimensionale. Dato un cammino su tale superficie, la sua lunghezza viene misurata approssimativamente mediante un righello finito, in modo tale che più piccolo è il righello, migliore è l'approssimazione della misura.
- La misura corretta della lunghezza, tuttavia, si ha solo al limite: è la misura che si avrebbe se si potesse disporre di un righello infinitesimale.
- Le misure di lunghezza risultano dunque da una procedura di *integrazione* e sono basati sull'analisi infinitesimale. Riemann contribuisce così alla nascita della *geometria differenziale*, che si occupa di problemi quali trovare le geodetiche sulle superfici e determinarne la curvatura.
- Ad esempio, le geodetiche su un piano sono i segmenti, le geodetiche su una sfera sono le circonferenze massime.

Il pluralismo geometrico

- Vi sono molteplici geometrie possibili, ma tra esse qual è quella *vera*?
- Per Riemann la domanda è mal posta. Nessuna geometria ha uno status privilegiato. Non si può neanche parlare di uno "spazio ambiente" universale che fornisce ai diversi sottospazi le rispettive metriche.
- Lo spazio fisico è una particolare varietà tridimensionale. Non è però possibile stabilire a priori se esso coincida con R^3 o con altre varietà tridimensionali.
- La geometria euclidea diviene così solo uno dei possibili candidati per una descrizione dello spazio fisico. Per determinare se è la descrizione corretta dobbiamo procedere per via empirica.

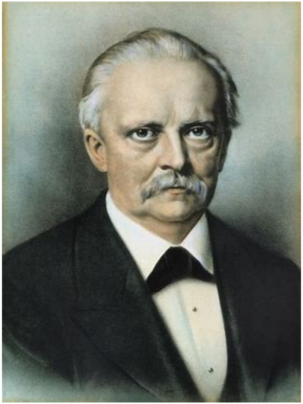
Illimitatezza e infinità

- Illimitatezza e infinità sono proprietà che le varietà possono avere.
- L'illimitatezza è un concetto qualitativo: indica l'assenza di confini che non si possono oltrepassare. L'infinità è invece un concetto quantitativo. Ad esempio, ogni superficie a curvatura costante positiva (es. una sfera) è illimitata ma finita.
- L'ipotesi dell'illimitatezza dello spazio ha maggior certezza empirica di ogni altra esperienza esterna. Ma da essa non segue assolutamente la sua *infinità*. Determinare se lo spazio è finito è compito della fisica.

Applicazioni alla fisica

- Poiché Riemann scrive prima della teoria maxwelliana dei campi, Riemann si preoccupa di spiegare la misteriosa "azione a distanza" riscontrabile nei fenomeni elettromagnetici e nella gravità.
- La sua idea, anticipatrice degli sviluppi futuri della fisica, è che tale azione sia possibile grazie a distorsioni geometriche dello spazio, che si producono mediante alterazioni delle relazioni metriche.

Hermann von Helmholtz (1821-1894)



Helmholtz: un'obiezione "kantiana" all'empirismo (1)

- In *Sull'origine e sul significato degli assiomi della geometria* (1870) Helmholtz, convinto empirista, considera una possibile obiezione di matrice kantiana all'empirismo geometrico.
- Gli assiomi della geometria euclidea non sarebbero passibili né di conferma né di smentita empirica, perché ogni siffatta conferma o smentita dovrebbe avvenire tramite misurazioni effettuate con strumenti di misura, ma per determinare se tali strumenti sono *rigidi*, e quindi se le misurazioni sono valide, abbiamo bisogno degli assiomi della geometria euclidea.

Helmholtz: un'obiezione "kantiana" all'empirismo (2)

- Tuttavia, questo argomento non è una difesa efficace del kantismo. Infatti, se facciamo dipendere la nozione di rigidità dagli assiomi euclidei renderebbe questi ultimi dei principi analitici, anziché sintetici a priori.
- Helmholtz ammette però che la determinazione empirica della geometria presuppone delle operazioni di misura e quindi delle assunzioni circa gli strumenti e i processi fisici utilizzati per eseguire tali misure.
- Ciò che bisogna sottoporre al tribunale dell'esperienza è quindi un complesso costituito dalle proposizioni geometriche e alcuni principi della fisica.