

**ESERCITAZIONE N. 2: LIMITI DI FUNZIONI**  
**ANALISI MATEMATICA 1 - A.A. 2023/2024**

FRANCESCO CANNAS AGHEDU

(1) Deduci il dominio delle funzioni rappresentate in Figura 1 e stabilisci se i punti indicati sotto al grafico sono di accumulazione per il dominio.

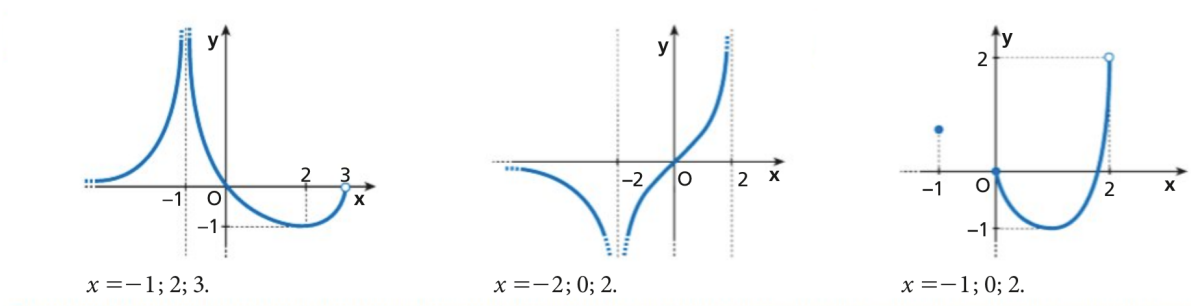


FIGURA 1.

(2) Deduci i limiti indicati osservando i grafici nelle Figure 2 e 3.

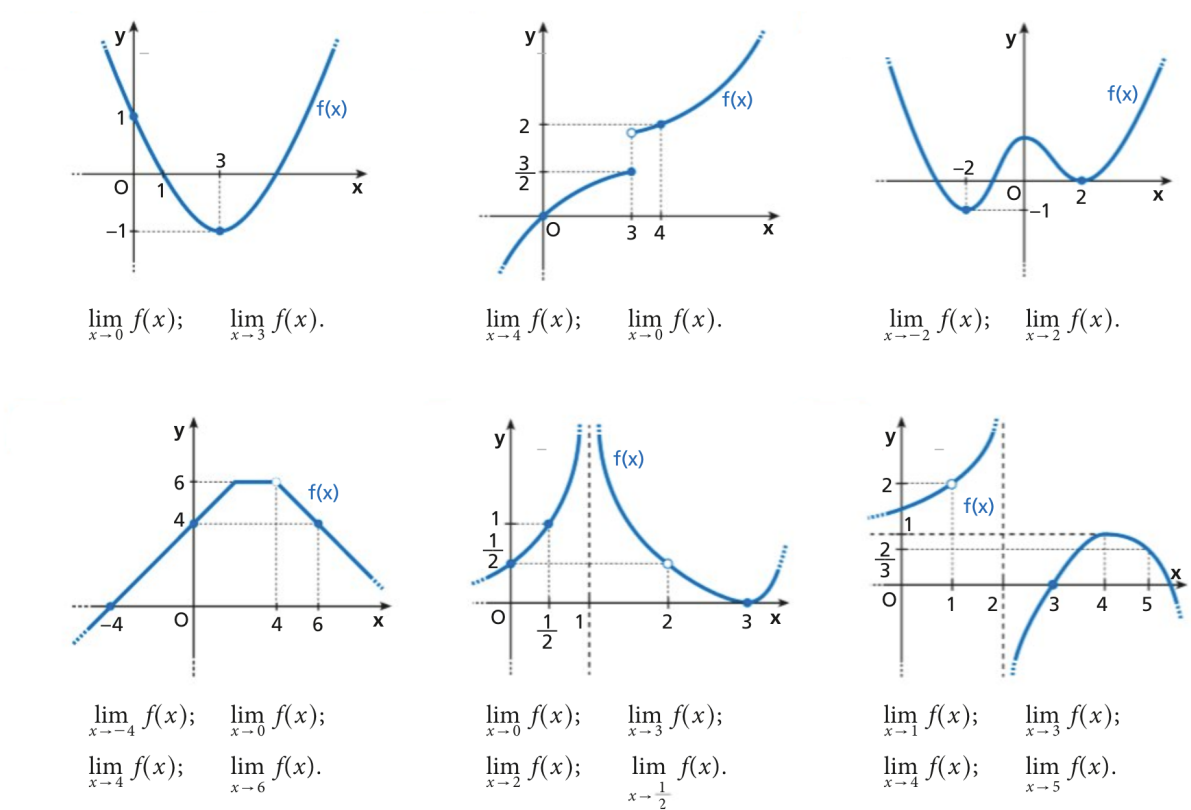
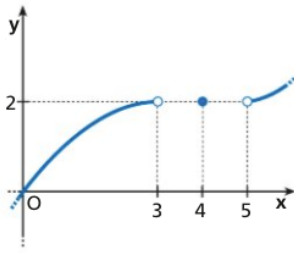
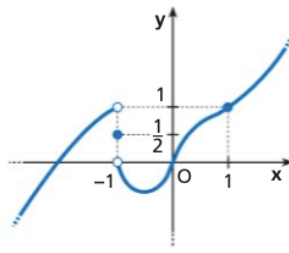


FIGURA 2.



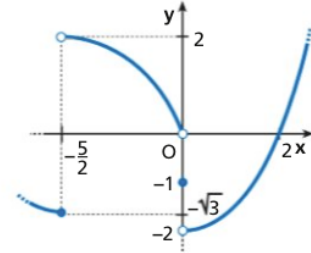
$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \square; \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \square;$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \square; \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \square.$$



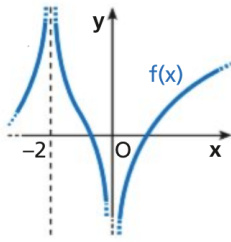
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \square; \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \square;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \square; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \square.$$



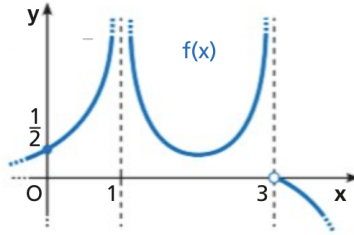
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \square; \lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} f(x) = \square;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \square; \lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}^+} f(x) = \square.$$



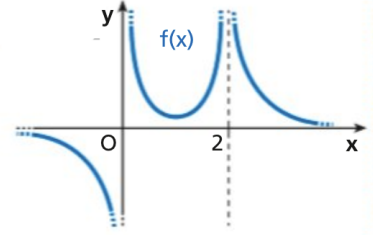
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$



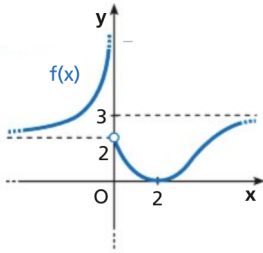
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x); \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x); \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x).$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x); \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x);$$

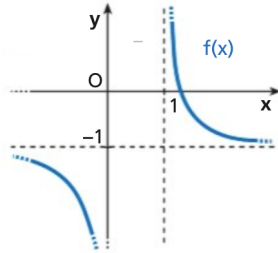
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x);$$

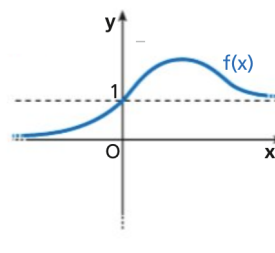
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x);$$

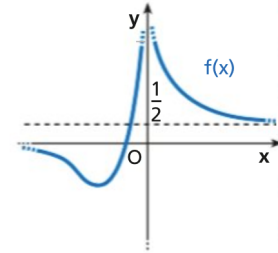
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

FIGURA 3.

(3) Dopo aver ricordato l'enunciato del Teorema del confronto, utilizzalo per calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - \cos x}{x}.$$

(4) Calcola i seguenti limiti:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + e^x + \ln x)$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 - 2x)^5 (x^2 + 1)$$

- |     |  |     |   |
|-----|--|-----|---|
| (c) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x^2 + x}{5x + 7}$                             | (k) | $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2 + x + 3} \sqrt{2x^2 + 5}$                     |
| (d) | $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$                                | (l) | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 2x^2 - 14x - 3}{x^2 - x - 6}$                   |
| (e) | $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$                                | (m) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin\left(\frac{e^x + 3}{e^{2x} - 1}\right)$       |
| (f) | $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^6 - x^4 - 12)$                                    | (n) | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan\left(\frac{e^x + 1}{e^x + 2}\right)$          |
| (g) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{8x^3 + 3x^2 + 2}$        | (o) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{e^{2x} + e^x - 2023} - e^x\right)$        |
| (h) | $\lim_{x \rightarrow -3^-} \ln\left(\frac{x^2 - 9}{x^2 + 1}\right)$                | (p) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\ln^3 x + \ln^2 x - 2} - \ln x\right)$ |
| (i) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 + 5x^2}}{3x^2}$       | (q) | $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - \cot x) \tan x$                                      |
| (j) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{6\sqrt{x^2 - 1} + 2x}{8x - 4}\right)$ | (r) | $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\frac{1}{\ln x^2}}$                                   |

(5) Deduci segno, zeri e limiti agli estremi del dominio di ognuna delle funzioni rappresentate in Figura 4.

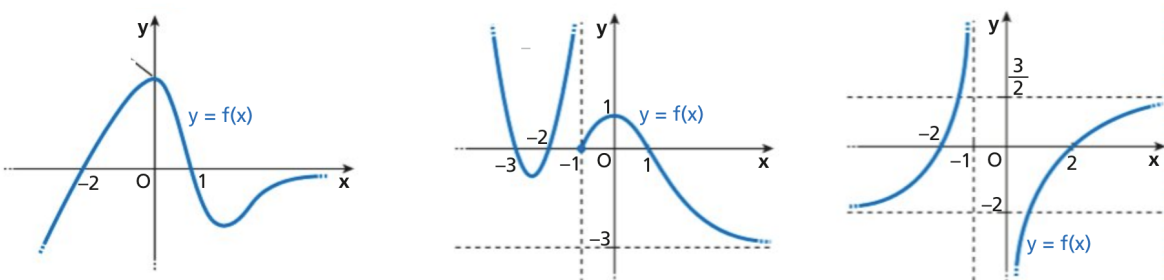


FIGURA 4.

(6) Calcola i seguenti limiti (utilizza, quando necessario, i limiti notevoli):

- |     |   |     |  |
|-----|---|-----|--|
| (a) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(5x)}{x \sin(6x)}$      | (c) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x) \tan x}{1 - \cos x}$   |
| (b) | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x - \tan x}$ | (d) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x) \sin(4x)}{1 - \cos x}$ |

<p>(e) <math display="block">\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan^2(x-1) + \ln^2 x}{1 - \cos(x-1)}</math></p> <p>(f) <math display="block">\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x + \ln^2(x+1)}{\cos(x) - 1}</math></p> <p>(g) <math display="block">\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 \sin(x-2)}{4(e^{x-2} - 1)}</math></p> <p>(h) <math display="block">\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1}</math></p> <p>(i) <math display="block">\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + 2x^2 + x^3}{4x^2 + 5 \sin^2 x}</math></p> <p>(j) <math display="block">\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x) + x \sin x}{\ln(1 + \sin x) + \cos(2x) - 1}</math></p>	<p>(k) <math display="block">\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-1}}{\sin(x-1)}</math></p> <p>(l) <math display="block">\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\tan(x^2 + 2x + 1) - (x+1)^2}{x^2 - 1}</math></p> <p>(m) <math display="block">\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 1} \ln(1 + \sqrt{x^2 + 5} - x)</math></p> <p>(n) <math display="block">\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(5x)}{(x^2 - 2x) \ln(1 + 4x)}</math></p> <p>(o) <math display="block">\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5+x}{x}\right)^x</math></p> <p>(p) <math display="block">\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right)^{2x^2}</math></p> <p>(q) <math display="block">\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}</math></p>
---	---

(7) Determina il comportamento agli estremi del dominio delle funzioni dell'Esercizio 5 dell'Esercitazione 1.

(8) Stabilisci se, per  $x \rightarrow 0$ , sono confrontabili gli infinitesimi  $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$  e  $g(x) = x$ .

(9) Stabilisci se, per  $x \rightarrow 0$ , sono confrontabili gli infinitesimi  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  e  $g(x) = x$ .

(10) Stabilisci se, per  $x \rightarrow 0$ , sono confrontabili gli infinitesimi  $f(x) = x \tan x$  e  $g(x) = x$ .

(11) Confronta, per  $x \rightarrow 0$ , gli infinitesimi  $f(x) = \tan x$  e  $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ .

(12) Confronta, per  $x \rightarrow 1$ , gli infiniti  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  e  $g(x) = \frac{x}{(x-1)^3}$ .

(13) Dopo aver verificato che le due seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-4x+4} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{3}{x^3-8},$$

sono due infiniti simultanei, per  $x \rightarrow 2$ , dire quale delle due è infinito di ordine superiore.

(14) Determina l'ordine dei seguenti infinitesimi per  $x \rightarrow 0$ :

$$f(x) = 1 - \cos x, \quad g(x) = \sin^2(x), \quad h(x) = \sin^2 \sqrt{x}, \quad t(x) = (e^x - 1)^3, \quad z(x) = \tan^2(2x^2).$$

(15) Utilizzando il confronto tra infinitesimi (o infiniti), calcola i seguenti limiti:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x) + 5x^3}{\sin(6x) + x^2}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \sin^2 x}{xe^x - 2x^2 - \tan x}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x - \cos \sqrt{x}}{\sin^2 x + \sqrt{x}}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \sqrt{x} + x^2 + x^6}{(e^x - 1)^2 + \sqrt{x}}$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \sqrt{x} + 2x + x^3}{e^x - 1 + x^2}$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x + 1}{2x^4 - x^3 + \ln(x)}$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 - x^2 + \ln(x+1) + x - 3}{2x^5 + x^4 + e^{x^2+1}}$$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{4x^4 + x} + \ln x}{\sqrt[3]{2x^4 + 3x^2 + \ln x^2}}$$

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.verde 4A**. Zanichelli (2022)
- [2] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.verde 4B**. Zanichelli (2022)
- [3] Conti M., Ferrario D. L., Terracini S., Verzini G. **Analisi matematica. Dal calcolo all'analisi, Vol 1**. Apogeo (2006)
- [4] Dodero N., Baroncini P., Manfredi R. **Lineamenti di Matematica B**. Ghisetti e Corvi editori (1999)
- [5] Marcellini P., Sbordone C. **Elementi di Analisi Matematica 1**. Liguori Editore (2016)
- [6] Marcellini P., Sbordone C. **Esercitazioni di Matematica. Primo volume, parte prima**. Liguori Editore (1987)
- [7] Marcellini P., Sbordone C. **Esercitazioni di Matematica. Secondo volume, parte prima**. Liguori Editore (1989)

INGEGNERIA DELL'ENERGIA ELETTRICA PER LO SVILUPPO SOSTENIBILE, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

*Email address:* francesco.cannasa@unica.it