

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA I “LA SAPIENZA”
DOTTORATO DI RICERCA IN MATEMATICA

**Proprietà Qualitative
delle Soluzioni di Equazioni Ellittiche
via Principio di Massimo**

Relatore:
prof. Giovanni Porru

Tesi di Dottorato di
Antonio Greco

*Per correr migliori acque alza le vele
omai la navicella del mio ingegno,*

(PURG., I, 1-2)

Ringraziamenti.

Le persone che hanno contribuito, volontariamente o involontariamente, alla realizzazione di questo lavoro sono così tante che per ringraziarle tutte dovrei aggiungere un altro capitolo. Non che la cosa mi dispiacerebbe, visto che farebbe allungare la tesi, ma preferisco evitarlo perché finirei per dimenticare qualcuno.

Ciononostante desidero ringraziare il prof. Giovanni Porru, che non solo mi ha seguito durante tutta la preparazione della tesi, non solo mi ha permesso di avvicinarmi a questa parte della matematica fin dai primi tempi del dottorato, ma che è responsabile, almeno in parte, della mia stessa frequenza di un corso di dottorato, incominciata in un periodo in cui non avevo nessuna voglia di vestire di nuovo i panni dello studente.

Ringrazio il prof. Lucio Boccardo sia in qualità di coordinatore del dottorato che di mio tutore, e ricordo con piacere la figura del prof. Gianfausto Dell'Antonio, coordinatore del dottorato nonché mio insegnante nei primi anni di corso.

Ringrazio la prof. Dina Ghinelli, anche per avermi offerto l'occasione di trascorrere un proficuo periodo di studio presso il Politecnico di Aquisgrana, in Germania, come borsista Erasmus. A questo proposito ricordo il prof. dr. Hanns-Walter Rohde, che mi ha procurato lo storico e introvabile articolo di Hopf sul principio di massimo, sebbene presumibilmente non leggerà mai queste righe, perché non conosce l'italiano.

Troppo breve ma promettente, tanto che avrebbe cambiato il corso di questo lavoro, è stato il rapporto con il prof. Piero de Mottoni, interrotto sul nascere dalla sua prematura scomparsa.

Nonostante io abbia la tendenza a sopravvalutare il potere della matematica, che a volte considero capace di condurre quasi ad una forma superiore di conoscenza, è mia ferma convinzione, ed i vari casi di incomprensione, pazzia, suicidio di cui la storia della scienza è costellata ne sono una conferma, che il solo *nutrimentum spiritus* non basti. Anche per questo un sentito ringraziamento va alla signora Paola Moglioni, degna erede dell'originalissima Fedora Paciocco, per il frenetico lavoro in segreteria.

Un caro saluto va infine ai miei "compagni di classe": Giovanna D'Agostino, Laura De Carli, Matteo De Cesare, Francesco Fidaleo, Tommaso Isola, Roberto Mantaci, Enrico Rogora e Alfonso Tortora.

Antonio Greco.

INDICE

INTRODUZIONE	1
<hr/>	
NOTAZIONE E TERMINOLOGIA	3
<hr/>	
Capitolo 0. TEOREMI CLASSICI	6
<hr/>	
Capitolo 1. MONOTONIA	13
<hr/>	
1. Risultati precedenti	14
2. Un “principio” per la funzione di crescita	16
3. Un’equazione semilineare	20
4. Domini non cilindrici	27
5. Un caso più generale	36
Capitolo 2. CONVESSITÀ	42
<hr/>	
1. Il concetto di armonica concavità	42
2. Conservazione dell’armonica concavità	46
3. Armonica concavità delle funzioni elementari dell’Analisi	51
4. Principi di massimo	53
5. Analisi al contorno	62
6. Le “grandi soluzioni”	67
Capitolo 3. UNA STIMA DEL GRADIENTE	72
<hr/>	
1. Risultati precedenti	72
2. Un principio di massimo	76
3. Un’applicazione	83
4. Appendice	85
BIBLIOGRAFIA	89
<hr/>	

INTRODUZIONE

Dopo aver richiamato alcune formulazioni del principio di massimo per le equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico, si studiano le proprietà qualitative di monotonia e di convessità delle soluzioni classiche u di equazioni ellittiche della forma

$$a^{ij}(Du)u_{ij} = f(x, u, Du) \quad \text{in } \Omega, \quad (*)$$

con Ω dominio limitato di \mathbf{R}^n , $n \geq 1$.

A tale scopo si utilizzano opportune funzioni ausiliarie, e cioè la “funzione di crescita”:

$$\phi(y, z, t) = u(y, z) - u(y, t) \quad \text{con } z < t$$

e la “funzione di concavità”:

$$C(x, y) = u\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{u(x) + u(y)}{2},$$

che sono negative quando u ha le proprietà desiderate.

Vengono illustrate delle condizioni sui coefficienti a^{ij} e sulla funzione f , e delle appropriate condizioni al contorno, sufficienti a determinare il segno delle funzioni ausiliarie mediante la costruzione di

disuguaglianze ellittiche soddisfatte da queste ultime, ed attraverso la formulazione di volta in volta più idonea del principio di massimo.

Alcuni risultati sono resi in modo da poter essere applicati allo studio della convessità delle superfici di livello delle soluzioni di altre equazioni.

Infine, con un metodo simile, si illustra una maggiorazione del modulo del Du per le soluzioni di (*) quando $f = 0$, Ω è un dominio non contrattile racchiuso tra due superfici regolari, ed i coefficienti a^{ij} hanno la forma

$$a^{ij}(Du) = \delta^{ij} + h(\rho^2)(\alpha^i + \alpha^j)u_i u_j,$$

dove $\rho^2 = \alpha^i u_i u_i$, $\alpha^1, \dots, \alpha^n \in \mathbf{R}^+$, e $h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione regolare che rende ellittica l'equazione.

Il paragrafo 2 del capitolo 1, che presenta un risultato sulla monotonia senza richiedere calcoli laboriosi, può essere usato per un'introduzione riferita ad una situazione concreta.

Esistono numerose altre applicazioni della tecnica “della funzione ausiliaria”, in particolare nei lavori di L. E. Payne e G. A. Philippin come ad esempio il [32]. L'autore si è cimentato per la prima volta con essa in [14], dove viene stabilita la suddetta stima del gradiente estendendo un risultato di G. Porru e F. Ragnedda [35].

NOTAZIONE

E

TERMINOLOGIA

L'equazione ellittica cui si è interessati viene scritta nella forma:

$$a^{ij}(Du)u_{ij} = f(x, u, Du) \quad \text{in } \Omega, \quad (*)$$

dove $a^{ij} = a^{ji}$ e l'incognita u è una funzione del vettore $x = (x^1, \dots, x^n)$, variabile in un dominio limitato $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$.

La funzione u è supposta almeno di classe $C^2(\Omega)$, e con i simboli u_i e u_{ij} si indicano le derivate $\partial u / \partial x^i$ e $\partial^2 u / \partial x^i \partial x^j$, mentre con Du si indica il vettore gradiente $Du = (u_1, \dots, u_n)$.

Si definisce, a partire da u , una funzione "ausiliaria" ϕ , dipendente da m variabili, con $m \geq n$, soddisfacente una disuguaglianza della forma:

$$b^{hk}(x)\phi_{hk} + b^h(x)\phi_h \geq b(x)\phi$$

tale da poter applicare il principio di massimo e, per il legame tra ϕ ed u , dedurre le informazioni cercate.

Tranne quando diversamente stabilito, si usano gli indici h e k per valori compresi tra 1 e m , mentre tra 1 e n vengono fatti variare gli indici i e j . Si sottintende la somma sugli indici ripetuti.

Un'equazione come la (*) è detta “**ellittica**” rispetto ad una soluzione u se la matrice

$$A = [a^{ij}(Du(x))]$$

è definita positiva per ogni valore di x .

L'equazione (*) è detta “**ellittica degenera**” rispetto ad una soluzione u se la matrice A è semidefinita positiva; “**uniformemente ellittica**” se, indicati con $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ il più piccolo ed il più grande degli autovalori di A , si ha $\lambda(x) > 0$ in Ω ed il rapporto $\Lambda(x)/\lambda(x)$ è limitato al variare di x ; “**strettamente ellittica**” se per una opportuna costante $\epsilon > 0$ si ha $\lambda(x) \geq \epsilon$ in Ω . Ovviamente un'equazione strettamente ellittica e a coefficienti a^{ij} limitati è anche uniformemente ellittica. Viceversa, da un'equazione uniformemente ellittica se ne può ottenere una equivalente che sia strettamente ellittica e a coefficienti a^{ij} limitati.

È chiaro dalla definizione che l'ellitticità viene a dipendere, in generale, dalla funzione u . Talvolta è possibile fare delle ipotesi sui coefficienti a^{ij} che rendano la matrice A definita positiva qualunque sia u . Altre volte, come nel presente lavoro, ci si limita a supporre che A sia definita positiva almeno quando u è soluzione dell'equazione considerata.

Per evitare ambiguità dei termini, stabiliamo di chiamare:
 “**crescente**” una funzione $f(t)$ tale che:

$$t_1 > t_2 \Rightarrow f(t_1) \geq f(t_2);$$

“**strettamente crescente**” una funzione $f(t)$ tale che:

$$t_1 > t_2 \Rightarrow f(t_1) > f(t_2);$$

“punto di **massimo relativo in senso stretto** per $\phi(x)$ ” un punto x_M avente un intorno I_{x_M} tale che:

$$x_M \neq x \in I_{x_M} \Rightarrow \phi(x) < \phi(x_M);$$

“punto di **massimo relativo in senso lato** per $\phi(x)$ ”, o semplicemente “punto di **massimo relativo** per $\phi(x)$ ”, un punto x_M avente un intorno I_{x_M} tale che:

$$x \in I_{x_M} \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(x_M).$$

Si dice che il bordo ∂G di un dominio $G \subset \mathbf{R}^m$ ha la “**proprietà della sfera interna**” in un punto $x_0 \in \partial G$ quando esiste un disco aperto m -dimensionale $D \subset G$ tale che $x_0 \in \partial D$.

Capitolo 0.

TEOREMI CLASSICI

La paternità del principio di massimo per le soluzioni classiche delle equazioni ellittiche è comunemente attribuita al matematico austriaco Eberhard Hopf (Salisburgo 17-4-1902), naturalizzato tedesco, che ne trattò nel suo articolo, ormai storico, del 1927 [18].

In realtà lo stesso Hopf vi scrive che altri autori (E. Picard [34], S. Bernstein [4], L. Lichtenstein [27], [28]) avevano già mostrato “che le soluzioni di certe equazioni differenziali di tipo ellittico hanno delle proprietà che ricordano una nota proposizione sugli estremi delle funzioni armoniche” (del resto il principio di massimo per le funzioni armoniche è una conseguenza immediata del cosiddetto “teorema della media di Gauss”: $u(x_0) = \frac{1}{m(B)} \int_{B(x_0,r)} u(x)dx$). Ma mentre tali autori partono da particolari rappresentazioni delle soluzioni, Hopf dà “un fondamento ed una derivazione del tutto elementare di questi risultati”.

Successivamente il principio di massimo è stato sviluppato e raffinato in molti modi e da diversi autori. Lo stesso Hopf arrivò a stabilire il cosiddetto “secondo principio” in un lavoro del 1952 [17].

Per gli scopi di questa tesi, se ne riportano alcune formulazioni, che verranno più volte citate nel seguito, per le quali si fa riferimento principalmente al trattato di Gilbarg e Trudinger [13] ed a quello di

Protter e Weinberger [36], ai quali si rimanda anche per ulteriori notizie e indicazioni bibliografiche. Tali formulazioni si differenziano leggermente nelle ipotesi e nei risultati, non soltanto perché (come è ovvio) ad ipotesi più forti corrispondono più forti risultati, ma anche perché in problemi diversi possono essere soddisfatte ipotesi diverse, ed è quindi conveniente avere la formulazione “ad hoc”.

Sia dunque G un dominio limitato di \mathbf{R}^m , $\phi: G \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione di classe $C^2(G)$, L un operatore della forma

$$L\phi = b^{hk}(x)\phi_{hk} + b^h(x)\phi_h, \quad x \in G, \quad (0.1)$$

con $B(x) = [b^{hk}(x)]$ matrice simmetrica e, per il momento, almeno semidefinita positiva.

Teorema 0.1. (Il cosiddetto “principio debole del massimo”). *Se $L\phi \geq 0$ in G , ed esiste almeno un valore \bar{h} tale che il termine $\bar{b}^{\bar{h}\bar{h}}(x)$ è strettamente positivo ed il rapporto $\bar{b}^{\bar{h}}(x)/\bar{b}^{\bar{h}\bar{h}}(x)$ è localmente limitato, allora:*

$$\sup_G \phi = \limsup_{x \rightarrow \partial G} \phi(x). \quad (0.2)$$

Dimostrazione. Si veda [13], Th. 3.1 e il suo Remark. ■

Osservazione 0.1. Se le ipotesi del teorema 0.1 sono soddisfatte in G , lo sono ovviamente in ogni dominio $\Omega \subset G$. Di conseguenza ϕ non può avere punti di massimo relativo in senso stretto (se esistesse un

tale punto x_M , si avrebbe $\phi(x) < \phi(x_M)$ per ogni $x \neq x_M$ in un certo intorno chiuso $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{x_M}$, e quindi $\sup_{\Omega} \phi = \phi(x_M) > \max_{\partial\Omega} \phi$.

Osservazione 0.2. Tuttavia la condizione (0.2) è più restrittiva della non esistenza di punti di massimo relativo in senso stretto. Infatti la funzione

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-2\pi, 2\pi) \\ \cos x, & x \in (-3\pi, -2\pi] \cup [2\pi, 3\pi) \end{cases}$$

non ha punti di massimo stretti ma

$$\sup_{(-3\pi, 3\pi)} \phi > \lim_{x \rightarrow \pm 3\pi} \phi(x).$$

Osservazione 0.3. Si noti infine che la funzione ϕ di cui al teorema 0.1 può avere punti di massimo relativo in senso lato (infatti le funzioni costanti sono sempre soluzioni di $L\phi \geq 0$).

Osservazione 0.4. Se vale $L\phi \geq 0$ per una funzione ϕ di classe $C^2(G) \cap C^0(\bar{G})$, il teorema 0.1 può essere riformulato dicendo che esiste un punto $x_0 \in \partial G$ tale che, per ogni $x \in \bar{G}$, si ha $\phi(x) \leq \phi(x_0)$.

Se ϕ soddisfa la disuguaglianza $L\phi \geq b(x)\phi$, con un $b(x) \geq 0$, allora soddisfa anche $L\phi \geq 0$ sull'insieme $G^+ = \{x \mid \phi(x) > 0\}$, quindi:

Corollario 0.1. *Se $L\phi \geq b(x)\phi$ in G , con $b(x) \geq 0$, ed esiste almeno un valore \bar{h} tale che il termine $b^{\bar{h}}(x)$ è strettamente positivo ed il rapporto $b^{\bar{h}}(x)/b^{\bar{h}}(x)$ è localmente limitato, allora vale almeno una delle due:*

$$\sup_G \phi = \limsup_{x \rightarrow \partial G} \phi(x) \quad \text{oppure} \quad \sup_G \phi \leq 0.$$

Il principio di massimo in questa forma può essere provato sotto ipotesi più deboli:

Teorema 0.2. ([16], lemma 2.1). *Se $L\phi \geq b(x)\phi$, con $b(x) \geq 0$, e per ogni compatto $K \subset G$ esistono una costante M e ν ($1 \leq \nu \leq m$) indici h_1, \dots, h_ν tali che si abbia (per ogni $x \in K$):*

$$Mb^{h_i h_i} + b^{h_i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (0.3)$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} (Mb^{h_i h_i} + b^{h_i}) > 0, \quad (0.4)$$

allora vale almeno una delle due:

$$\sup_G \phi = \limsup_{x \rightarrow \partial G} \phi(x) \quad \text{oppure} \quad \sup_G \phi \leq 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esistano un punto x_0 e un compatto K , con $x_0 \in K \subset G$, tali che $\phi(x_0) > 0$ e $\phi(x_0) > \phi(x)$ per ogni $x \in \partial K$. Esiste allora un $\epsilon > 0$ tale che la funzione

$$\psi(x) = \phi(x) + \epsilon [\exp(Mx^{h_1}) + \dots + \exp(Mx^{h_\nu})] \quad (0.5)$$

ha un massimo positivo in un certo punto $x_1 \in K$. Poiché la matrice Hessiana in un punto di massimo è semidefinita negativa, e le derivate prime sono nulle, si ha

$$b^{hk}(x_1)\psi_{hk}(x_1) + b^h(x_1)\psi_h(x_1) \leq 0. \quad (0.6)$$

D'altra parte, per le disuguaglianze (0.3) e (0.4) si trova (per ogni punto di K):

$$b^{hk}\psi_{hk} + b^h\psi_h \geq b\phi + \epsilon M \sum_{i=1}^{\nu} (Mb^{h_i h_i} + b^{h_i}) > b\phi. \quad (0.7)$$

Quest'ultima disuguaglianza contraddice la (0.6) nel punto x_1 . ■

Per la coincidenza della tesi con quella del teorema 0.1, anche in questo caso si possono derivare le stesse considerazioni svolte nelle osservazioni da 0.1 a 0.4 e nel corollario 0.1.

In quanto segue non è più necessario che il dominio G sia limitato. Supponendo che L sia localmente uniformemente ellittico, cioè che, indicati con $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ il più piccolo ed il più grande degli autovalori di $B(x)$, si abbia $\lambda(x) > 0$ in G e $\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}$ localmente limitato in G , si può rafforzare il risultato stabilito dal corollario 0.1:

Teorema 0.3. (Il “primo principio”). *Se $L\phi \geq b(x)\phi$ in G , con $b(x) \geq 0$ e ϕ noncostante, e se si ha $\lambda(x) > 0$ in G ed i seguenti rapporti:*

$$\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}, \quad \frac{b^h(x)}{\lambda(x)} \text{ per ogni } h, \quad \frac{b(x)}{\lambda(x)},$$

sono localmente limitati in G , allora non esistono punti $x_M \in G$, di massimo assoluto per ϕ , tali che $\phi(x_M) \geq 0$.

Dimostrazione. Si veda [13], Theorem 3.5, oppure [36], capitolo 2, Theorem 6 ed il Remark (i). ■

Osservazione 0.5. La funzione ϕ del teorema 0.3 non può avere punti x_M di massimo relativo in senso stretto tali che $\phi(x_M) \geq 0$ perché, riducendo opportunamente il dominio, essi diventano massimi assoluti senza che ϕ sia costante.

Osservazione 0.6. La stessa funzione ϕ può invece avere punti di massimo relativo in senso lato, come sono ad esempio i punti $x \in (-1, 1)$ per la seguente:

$$\phi(x) = \begin{cases} (x-1)^4, & x > 1 \\ 0, & x \in [-1, 1] \\ (x+1)^4, & x < -1 \end{cases}$$

che soddisfa su \mathbf{R} la disequazione $\phi'' \geq 0$.

Supponendo L uniformemente ellittico si possono dimostrare i seguenti risultati sulle derivate di ϕ al bordo di G :

Teorema 0.4. (Il “secondo principio”). *Se $L\phi \geq 0$ in G , con ϕ noncostante e L uniformemente ellittico, e se i rapporti $b^h(x)/\lambda(x)$ sono limitati in G per ogni h , e se inoltre, indicato con x_0 un punto di ∂G in cui si abbia $\phi(x_0) = \sup_{x \in G} \phi(x)$, ϕ è continua in x_0 ed esiste*

un disco aperto m -dimensionale $D \subset G$ tale che $x_0 \in \partial D$, allora la derivata direzionale $\phi_\nu(x_0)$ (se esiste) in una qualunque direzione ν esterna (e non tangente) a D è strettamente positiva.

Dimostrazione. Si veda [36], capitolo 2, Theorem 7, ed il successivo Remark (iv). Si tenga presente che gli autori usano il termine “uniformly elliptic” con un significato, da essi precisato nelle “Definitions” del capitolo 2, section 2, che corrisponde al nostro “strettamente ellittico”. ■

Teorema 0.5. (Il “secondo principio” in forma più debole per un’equazione più generale). *Se $L\phi \geq b(x)\phi$ in G , con $b(x) \geq 0$ e ϕ noncostante, e se i seguenti rapporti:*

$$\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}, \quad \frac{b^h(x)}{\lambda(x)} \text{ per ogni } h, \quad \frac{b(x)}{\lambda(x)},$$

sono limitati in G , e se inoltre, indicato con x_0 un punto di ∂G in cui si abbia $\phi(x_0) = \sup_{x \in G} \phi(x) \geq 0$, ϕ è continua in x_0 ed esiste un disco aperto m -dimensionale $D \subset G$ tale che $x_0 \in \partial D$, allora la derivata direzionale $\phi_\nu(x_0)$ (se esiste) in una qualunque direzione ν esterna (e non tangente) a D è strettamente positiva.

Dimostrazione. Si veda [36], capitolo 2, Theorem 8, ed il successivo Remark (iv). ■

Capitolo 1.

MONOTONIA

In questo capitolo si presentano alcuni risultati sulla monotonia, rispetto alla variabile x^n , della soluzione u di certe equazioni. La struttura espositiva è la seguente: dopo aver fatto cenno, nel paragrafo iniziale, ad alcuni risultati noti, si stabilisce nel paragrafo 2 uno strumento che permette di affrontare in un modo alternativo i problemi considerati. Tale strumento, che è un principio di massimo opportunamente formulato, viene trattato inizialmente nel caso particolare dell'operatore di Laplace, e poi nel paragrafo 3 viene esteso a certi operatori non lineari.

Sin qui ci si limita a considerare problemi differenziali posti su dominî di forma cilindrica, con asse parallelo all'asse x^n , perché la trattazione risulta semplificata. Nel paragrafo 4 invece, tramite un appropriato studio di tipo geometrico, si prendono in considerazione anche dominî di forma più generale.

Infine nel paragrafo 5 si stabilisce un teorema di monotonia su di una parte del dominio, analogo a quelli illustrati in un lavoro di Gidas, Ni e Nirenberg del 1979 [12], e si fa osservare che, in un certo senso, esso include come casi particolari i risultati stabiliti nei paragrafi precedenti.

1. Risultati precedenti.

Sia $\omega \subset \mathbf{R}^{n-1}$ un dominio limitato e dotato di frontiera regolare, sia $I = (a, b) \subset \mathbf{R}$. In un lavoro di Berestycki e Nirenberg [3] si trova un risultato del tipo seguente, attribuito a L. Caffarelli:

Teorema 1.1. *Sia u una soluzione di classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ dell'equazione*

$$\Delta u = f(x, u, Du) \tag{1.1}$$

sul dominio $\Omega = \omega \times I$, con f continua, e localmente lipschitziana rispetto a (u, Du) . Sia f decrescente rispetto a x^n . Supponiamo

$$u(y, a) < u(y, z) < u(y, b) \tag{1.2}$$

per ogni $z \in (a, b)$ ed ogni $y \in \omega$, e

$$z < t \Rightarrow u(y, z) < u(y, t) \tag{1.3}$$

per ogni $z \in (a, b)$, $t \in (a, b)$ ed ogni $y \in \partial\omega$. Allora u è strettamente crescente rispetto a x^n .

Dimostrazione. Si veda [3], Theorem 3.5. Si noti che, poiché u è di classe $C^1(\overline{\Omega})$, basta supporre f localmente lipschitziana. ■

Osserviamo che se si indeboliscono le ipotesi, sostituendo (1.2) con

$$u(y, a) \leq u(y, z) \leq u(y, b) \tag{1.2'}$$

per ogni $z \in (a, b)$ ed ogni $y \in \omega$, e sostituendo (1.3) con

$$z < t \Rightarrow u(y, z) \leq u(y, t) \quad (1.3')$$

per ogni $z, t \in (a, b)$ ed ogni $y \in \partial\omega$, il risultato non sussiste più. Il seguente è un controesempio.

Esempio 1.1. Siano $\omega = (0, \pi)$, $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{5}{2}\pi$, e quindi $\Omega = (0, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi) \subset \mathbf{R}^2$. La funzione

$$u(y, z) = \sin y \sin z$$

soddisfa l'equazione

$$\Delta u = -2u$$

e le condizioni (1.2') e (1.3') ma, ovviamente, non è crescente in z .

Gli autori mostrano che il risultato sussiste ancora se, oltre a supporre (1.2') e (1.3'), si fa sulla u l'ipotesi

$$\forall z \in (a, b) \exists y \in \omega \text{ t.c. } u(y, a) < u(y, z). \quad (1.4)$$

Più esattamente, essi pervengono al seguente teorema (quando Du è considerato come variabile indipendente della funzione f , esso è rappresentato con $p = (p^1, \dots, p^n)$):

Teorema 1.2. (Cfr. [3], Th. 4.1). *Sia u soluzione di classe $C^2(\bar{\Omega})$ dell'equazione (1.1) in $\Omega = \omega \times I$, con f continua rispetto a tutte le variabili e localmente lipschitziana rispetto a (u, Du) . Sia f decrescente rispetto a x^n per $p^n \geq 0$. Supponiamo verificate le condizioni (1.2'), (1.3'), (1.4). Allora u è strettamente crescente in x^n . Inoltre essa è unica, nel senso che se \tilde{u} è un'altra soluzione della (1.1) soddisfacente le stesse condizioni e con $\tilde{u} = u$ su $\partial\Omega$, allora $\tilde{u} \equiv u$ in Ω .*

Nel paragrafo successivo, utilizzando il metodo “della funzione ausiliaria”, si mostra che per quelle equazioni del tipo (1.1) in cui f , oltre ad avere le proprietà citate, è anche crescente rispetto ad u , è possibile pervenire ad un risultato analogo senza supporre la (1.4). Ovviamente, una volta dedotto che u è crescente in x^n , è chiaro che la (1.4) è verificata. Quello che si intende dire è che non è necessario ammettere la (1.4) a priori. L'unicità della soluzione è una ben nota conseguenza dell'ipotesi che f è crescente in u .

2. Un “principio” per la funzione di crescita.

Alcune proprietà qualitative di una funzione u possono essere espresse tramite una funzione ausiliaria, indicata nel testo con la lettera ϕ . Mediante i principî di massimo indicati nel capitolo 0 possono essere ottenute informazioni su ϕ .

La monotonia di una funzione $u: \omega \times I \rightarrow \mathbf{R}$, con ω dominio di \mathbf{R}^{n-1} e $I = (a, b) \subset \mathbf{R}$, rispetto alla variabile x^n è espressa dal segno della funzione $\phi: \omega \times T \rightarrow \mathbf{R}$, con $T = \{(z, t) \in I \times I \mid z < t\}$, data da:

$$\phi(y, z, t) = u(y, z) - u(y, t), \quad (2.1)$$

con $y \in \omega$ e $(z, t) \in T$, che diremo “funzione di crescita”. Infatti la condizione “ $\phi < 0$ per ogni valore di y, z, t ” significa “ u è strettamente crescente rispetto a x^n ”.

Sia $u \in C^2(\Omega)$ soluzione dell’equazione (1.1) nel cilindro $\Omega = \omega \times I$. Possiamo provare un principio di massimo per ϕ nella seguente forma:

Lemma 2.1. *Se f è localmente lipschitziana in (u, Du) , decrescente in x^n e crescente in u , allora non esistono punti $x_M \in \omega \times T$, di massimo assoluto per ϕ , tali che $\phi(x_M) \geq 0$, a meno che $\phi \equiv 0$.*

Dimostrazione. Basta provare che ϕ è soluzione di una disequazione della forma:

$$\Delta_{n+1}\phi - Q^h\phi_h \geq Q\phi, \quad (2.2)$$

dove col simbolo Δ_{n+1} si indica l’operatore di Laplace in $n + 1$ dimensioni, e Q e le Q^h , per $h = 1, \dots, n + 1$, sono opportune funzioni localmente limitate, $Q \geq 0$.

Si ha infatti, per la definizione di ϕ (2.1):

$$\Delta_{n+1}\phi(y, z, t) = \Delta u(y, z) - \Delta u(y, t) \quad (2.3)$$

e, per la (1.1):

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1}\phi(y, z, t) &= \\ &= f(y, z, u(y, z), Du(y, z)) - f(y, t, u(y, t), Du(y, t)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Essendo f decrescente in x^n si ha:

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1}\phi(y, z, t) &\geq \\ &\geq f(y, z, u(y, z), Du(y, z)) - f(y, z, u(y, t), Du(y, t)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Infine, per la locale lipschitzianità di f , ed utilizzando la (2.1) e le relazioni

$$\phi_i(y, z, t) = u_i(y, z) - u_i(y, t), \quad (2.6.a)$$

$$\phi_n(y, z, t) = u_n(y, z), \quad (2.6.b)$$

$$\phi_{n+1}(y, z, t) = -u_n(y, t), \quad (2.6.c)$$

dove $i = 1, \dots, n - 1$, si trova:

$$\Delta_{n+1}\phi \geq Q^h \phi_h + Q\phi, \quad (2.7)$$

e quindi la (2.2), per opportune funzioni localmente limitate Q^h e Q . Con la condizione $Q \geq 0$, cioè crescita di f rispetto ad u , il lemma segue dal principio di massimo usuale (teorema 0.3). Si osservi che,

per la continuità di u , dalla (2.1) segue che l'unico valore costante che ϕ può assumere è zero, corrispondente al caso in cui u non dipende da x^n . ■

Sia u una soluzione della (1.1) nel cilindro $\Omega = \omega \times I$, continua al bordo e soddisfacente le condizioni (1.2') e (1.3'). Queste si traducono in condizioni al contorno per ϕ e, poiché la definizione (2.1) implica $\phi(y, z, t) = 0$ per $z = t$, si conclude che vale la:

$$\phi(y, z, t) \leq 0 \text{ per } (y, z, t) \in \partial(\omega \times T). \quad (2.8)$$

In questo modo viene esclusa l'eventualità che ϕ diventi positiva su $\partial(\omega \times T)$. Applicando il lemma 2.1 si deduce che vale $\phi < 0$ nei punti (interni) del dominio $\omega \times T$, cioè che u è strettamente crescente rispetto a x^n , oppure che $\phi \equiv 0$, cioè u è costante rispetto a x^n .

Si è visto, nel caso in esame, come un principio di massimo per la funzione ausiliaria ϕ , ed uno studio al contorno, permettono di stabilire una proprietà qualitativa, la monotonia, per una funzione u , cui si è direttamente interessati, soluzione dell'equazione (1.1) con le condizioni (1.2') e (1.3').

Utilizzando anche il "secondo principio" si può rafforzare questo risultato provando che la derivata u_n , se non è identicamente nulla, è strettamente positiva. Supponiamo dunque $\phi < 0$ in Ω , e sia $(y_0, z_0) \in \Omega$. Abbiamo già osservato che $\phi(y_0, z_0, z_0) = 0$, e che 0 è il valore massimo di ϕ . Inoltre, poiché il punto (y_0, z_0) è *interno* ad Ω ,

esiste un intorno $S = \{ (y, z, t) \in \omega \times T \mid \|(y, z, t) - (y_0, z_0, z_0)\| < r \}$, con un opportuno raggio r , in cui i coefficienti Q^h e Q che figurano nella (2.2) sono limitati. Poiché il versore dell'asse x^n , applicato in (y_0, z_0, z_0) , è diretto verso l'esterno del dominio $\omega \times T$, si ha (v. teorema 0.5):

$$\phi_n(y_0, z_0, z_0) > 0, \quad (2.9)$$

e quindi, per la (2.6.b):

$$u_n(y_0, z_0) > 0. \quad (2.10)$$

Per l'arbitrarietà di (y_0, z_0) abbiamo dimostrato il

Teorema 2.1. *Sia u una soluzione di classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ dell'equazione (1.1), con le condizioni (1.2') e (1.3'). Sia f continua, e lipschitziana rispetto a (u, Du) , decrescente rispetto a x^n e crescente rispetto ad u . Allora o si ha $u_n > 0$ in Ω , oppure si ha $u_n \equiv 0$ in Ω .*

3. Un'equazione semilineare.

Si estendono i risultati del paragrafo precedente ad un operatore più generale. Consideriamo la seguente equazione:

$$a^{ij}(Du)u_{ij} = f(x, u, Du) \quad (3.1)$$

nel dominio $\Omega = \omega \times I$, e supponiamo che sia ellittica, almeno quando u è soluzione di (3.1). Premettiamo un lemma sulle matrici:

Lemma 3.1. *Se la matrice $A = [a^{ij}]$, di ordine n , è definita positiva, allora la matrice $B(A, \mu)$, di ordine $n + 1$, data da*

$$B(A, \mu) = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} & \dots & a^{1n} & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} & \dots & a^{2n} & a^{2n} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} & \dots & a^{3n} & a^{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n1} & a^{n2} & a^{n3} & \dots & a^{nn} & \mu \\ a^{n1} & a^{n2} & a^{n3} & \dots & \mu & a^{nn} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

è definita positiva se e solo se $\mu \in (\mu_0, a^{nn})$, dove

$$\mu_0 = a^{nn} - 2 \frac{\det A}{\det A_{nn}} \quad (3.3)$$

e A_{nn} è la matrice che si ottiene da A eliminando l' n -esima riga e l' n -esima colonna. Si sottintende $\det A_{nn} = 1$ per $n = 1$. Se $\mu = \mu_0$, o $\mu = a^{nn}$, B ha n autovalori positivi ed un autovalore nullo. Se $\mu \notin [\mu_0, a^{nn}]$, B ha n autovalori positivi ed un autovalore negativo.

Dimostrazione. Per una A fissata, $\det B(A, \mu)$ è un polinomio di secondo grado in μ , poniamo $P(\mu)$, che ha le seguenti proprietà:

- Il coefficiente del termine di secondo grado in $P(\mu)$ è negativo e dato da $-\det A_{nn}$.
- Poiché la matrice $B(A, a^{nn})$ è degenere, in quanto ha due righe e due colonne uguali, il valore $\mu = a^{nn}$ è una radice di $P(\mu)$.

- La derivata $P'(a^{nn})$ è negativa. Ciò si vede derivando $\det B$ rispetto a μ , tenendo presente che A è definita positiva:

$$\begin{aligned}
 P'(\mu) &= \frac{\partial}{\partial \mu} \begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} & \dots & a^{1n} & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} & \dots & a^{2n} & a^{2n} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} & \dots & a^{3n} & a^{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n1} & a^{n2} & a^{n3} & \dots & a^{nn} & \mu \\ a^{n1} & a^{n2} & a^{n3} & \dots & \mu & a^{nn} \end{vmatrix} = \\
 &= -2 \begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} & \dots & a^{1,n-1} & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} & \dots & a^{2,n-1} & a^{2n} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} & \dots & a^{3,n-1} & a^{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1,1} & a^{n-1,2} & a^{n-1,3} & \dots & a^{n-1,n-1} & a^{n-1,n} \\ a^{n1} & a^{n2} & a^{n3} & \dots & a^{n,n-1} & \mu \end{vmatrix} = \\
 &= -2(\det A + (\mu - a^{nn}) \det A_{nn}). \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

Le suddette proprietà implicano che $P(\mu)$ può essere scritto nella forma

$$P(\mu) = -\det A_{nn}(\mu - a^{nn})(\mu - \mu_0) \tag{3.5}$$

con un opportuno $\mu_0 < a^{nn}$. Sia $\bar{\mu}$ il valore per cui $P'(\bar{\mu}) = 0$. Dalla (3.4) si trova $\bar{\mu} = a^{nn} - \frac{\det A}{\det A_{nn}}$, e da $\bar{\mu} = \frac{\mu_0 + a^{nn}}{2}$ si ricava μ_0 .

Ciò premesso, non è difficile completare la dimostrazione. Per quanto riguarda il caso $\mu = a^{nn}$ proviamo, innanzitutto, che gli autovalori di B sono non negativi.

Questo è facile, perché i minori principali di B o coincidono con minori principali di A , e quindi sono positivi, oppure hanno due righe (e due colonne) uguali, e quindi sono nulli. In secondo luogo, poiché la matrice B ha rango n , l'autospazio di B corrispondente all'autovalore nullo ha dimensione 1. Perciò $B(A, a^{nn})$ ha n autovalori positivi ed un autovalore nullo.

Ora sia $\mu \in (\mu_0, a^{nn})$. La (3.5) implica che, in tal caso, $\det B > 0$. Poiché n autovalori sono positivi per $\mu = a^{nn}$, per la continuità degli autovalori rispetto alle componenti di una matrice essi restano positivi per $\mu \in (\mu_0, a^{nn})$. E siccome $\det B > 0$, anche l'($n+1$)-esimo autovalore è positivo.

Analogamente si prova che B ha n autovalori positivi ed un autovalore negativo per $\mu \in (a^{nn}, +\infty)$.

Se $\mu = \mu_0$, poiché $B(A, \mu_0)$ ha rango n , esistono n autovalori non nulli. Per continuità, essi sono positivi. L'altro dev'essere nullo.

Anche nel caso $\mu \in (-\infty, \mu_0)$, B ha n autovalori non nulli. Per la continuità in μ_0 essi sono positivi. Poiché $\det B < 0$ in tale intervallo, l'altro autovalore è negativo. ■

Osservazione 3.1. Nel caso $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}^{(n)}$ il valore $\mu = 0$

rende $B(A, \mu)$ definita positiva: infatti $B(A, 0) = \mathbf{1}^{(n+1)}$.

Stabiliamo un principio di massimo per la funzione di crescita (2.1) relativa ad una soluzione $u \in C^2(\Omega)$ dell'equazione (3.1).

Lemma 3.2. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ soluzione dell'equazione (3.1). Se i coefficienti a^{ij} sono localmente lipschitziani, e se la funzione f è localmente lipschitziana in (u, Du) , decrescente in x^n e crescente in u , allora non esistono punti $x_M \in \omega \times T$, di massimo assoluto per ϕ , tali che $\phi(x_M) \geq 0$, a meno che $\phi \equiv 0$.*

Dimostrazione. Indichiamo con L l'operatore definito da $L\phi = b^{hk}\phi_{hk}$, dove la matrice $B(y, z, t) = [b^{hk}(y, z, t)]$, di ordine $n+1$, è ottenuta dalla matrice $A(Du(y, z)) = [a^{ij}(Du(y, z))]$, con la costruzione indicata nel lemma 3.1, avendo fissato la funzione u soluzione di (3.1). Scegliamo per μ un valore che renda $B(y, z, t)$ definita positiva, per esempio poniamo $\mu = \bar{\mu} = a^{nn} - \frac{\det A}{\det A_{nn}}$. Si noti che, con questa definizione, la matrice $B(y, z, t)$ è costante rispetto a t . Tenuto conto delle seguenti relazioni, facilmente ottenibili dalla definizione di ϕ (2.1):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_{sl}(y, z, t) = u_{sl}(y, z) - u_{sl}(y, t), & s, l = 1, \dots, n-1 \\ \phi_{ni}(y, z, t) = u_{ni}(y, z), & i = 1, \dots, n \\ \phi_{n+1,l}(y, z, t) = -u_{nl}(y, t), & l = 1, \dots, n-1 \\ \phi_{n+1,n}(y, z, t) = 0, \\ \phi_{n+1,n+1}(y, z, t) = -u_{nn}(y, t), \end{array} \right.$$

si ha:

$$L\phi = a^{ij}(Du(y, z))u_{ij}(y, z) - a^{ij}(Du(y, z))u_{ij}(y, t). \quad (3.6)$$

Per la locale lipschitzianità degli elementi a^{ij} , utilizzando le relazioni

$$\begin{cases} \phi_l(y, z, t) = u_l(y, z) - u_l(y, t), & l = 1, \dots, n-1, \\ \phi_n(y, z, t) = u_n(y, z) \\ \phi_{n+1}(y, z, t) = -u_n(y, t), \end{cases} \quad (3.7)$$

si trova

$$\begin{aligned} a^{ij}(Du(y, z)) - a^{ij}(Du(y, t)) &= \sum_{l=1}^{n-1} [w^{lij}(y, z, t)\phi_l(y, z, t)] + \\ &+ w^{nij}(y, z, t)[\phi_n(y, z, t) + \phi_{n+1}(y, z, t)] \end{aligned} \quad (3.8)$$

per ogni valore di i e j , essendo w^{lij} , $l = 1, \dots, n-1$, e w^{nij} opportune funzioni localmente limitate. Perciò:

$$\begin{aligned} L\phi + W^h\phi_h &= \\ &= f(y, z, u(y, z), Du(y, z)) - f(y, t, u(y, t), Du(y, t)), \end{aligned} \quad (3.9)$$

dove $W^l = w^{lij}(y, z, t)u_{ij}(y, t)$ per $l = 1, \dots, n-1$, $W^n = W^{n+1} = w^{nij}(y, z, t)u_{ij}(y, t)$. Le W^h , per $h = 1, \dots, n+1$, sono localmente limitate.

La formula (3.9) è analoga alla (2.4). Si può quindi proseguire come nella dimostrazione del lemma 2.1 e trovare

$$L\phi + (W^h - Q^h)\phi_h \geq Q\phi, \quad (3.10)$$

con Q^h e Q funzioni localmente limitate, $Q \geq 0$. La tesi segue dal teorema 0.3. ■

Il seguente risultato è un'estensione del teorema 2.1:

Teorema 3.1. *Sia u una funzione di classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, soluzione dell'equazione (3.1) in un dominio $\Omega = \omega \times I$, con le condizioni (1.2') e (1.3'), e tale da rendere la (3.1) ellittica. Supponiamo i coefficienti a^{ij} localmente lipschitziani in Du , e la funzione $f(x, u, Du)$ sia localmente lipschitziana in (u, Du) , decrescente in x^n e crescente in u . Allora o si ha $u_n > 0$ in Ω , oppure si ha $u_n \equiv 0$ in Ω .*

Osservazione 3.2. Nel caso $n = 1$, la condizione al contorno (1.3') perde significato e basta supporre la (1.2'), lasciando cadere la lettera y .

Dimostrazione. Per il lemma 3.2 si ha $\phi < 0$ in $\omega \times T$, oppure $\phi \equiv 0$. Nel caso $\phi < 0$, fissato un punto $(y_0, z_0) \in \Omega$, si ha:

$$(y_0, z_0, z_0) \in \partial(\omega \times T) \quad \text{e} \quad \phi(y_0, z_0, z_0) = 0,$$

cioè ϕ ha un massimo assoluto (e non negativo) nel punto (y_0, z_0, z_0) . Fissiamo allora per μ un valore che renda definita positiva la matrice $B(y_0, z_0, z_0)$, costruita come nella dimostrazione del lemma 3.2. Per continuità, e poiché il punto (y_0, z_0) è *interno* ad Ω , l'operatore L della (3.10) è uniformemente ellittico in un intorno $S = \{ (y, z, t) \in \omega \times T \mid \|(y, z, t) - (y_0, z_0, z_0)\| < r \}$ con un opportuno raggio $r > 0$.

Il valore di r può essere preso in modo che i rapporti tra i coefficienti W^h , Q^h e Q , che figurano nella (3.10), ed il minimo autovalore λ di B , siano limitati in S . Si può quindi applicare il “secondo principio” (teorema 0.5) e dedurre che

$$\phi_n(y_0, z_0, z_0) > 0,$$

quindi $u_n(y_0, z_0) > 0$. Per l'arbitrarietà del punto (y_0, z_0) la tesi è provata. ■

4. Dominî non cilindrici.

Se u è una soluzione dell'equazione (3.1) in un dominio $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, non necessariamente cilindrico, il dominio della funzione di crescita ϕ è l'insieme $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ dato da:

$$G = \{ (y, z, t) \mid (y, z), (y, t) \in \Omega, z < t \}, \quad (4.1)$$

dove $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ e $z, t \in \mathbf{R}$. L'insieme G è aperto e limitato, ma in generale non è connesso. Il principio di massimo stabilito col lemma 3.2 assume la seguente forma:

Lemma 4.1. *Se i coefficienti a^{ij} sono localmente lipschitziani, e se la funzione f è localmente lipschitziana in (u, Du) , decrescente in*

x^n e crescente in u , allora per ogni componente connessa $K \subset G$ non esistono punti $x_M \in K$, di massimo assoluto per ϕ , tali che $\phi(x_M) \geq 0$, a meno che $\phi \equiv 0$ in K .

Nel seguito si svolge uno studio del bordo ∂G che permette di provare il seguente risultato, che è un'estensione del teorema 3.1. L'estensione ha interesse per $n \geq 2$ in quanto, se $n = 1$, ogni dominio $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ è cilindrico (degenere).

Teorema 4.1. *Sia u una funzione di classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, soluzione dell'equazione (3.1) in un dominio $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, e tale da rendere la (3.1) ellittica. Supponiamo i coefficienti a^{ij} e la funzione f come nel teorema 3.1, e la funzione u soddisfacente le condizioni:*

$$u(y, \zeta) \leq u(y, \tau) \quad (4.2)$$

per ogni $(y, \zeta) \in \partial\Omega$ e $(y, \tau) \in \partial\Omega$, con $\zeta < \tau$;

$$u(y, \zeta) \leq u(y, z) \leq u(y, \tau) \quad (4.3)$$

per ogni $(y, z) \in \Omega$, $(y, \zeta) \in \partial\Omega$ e $(y, \tau) \in \partial\Omega$, con $\zeta < z < \tau$. Allora o si ha $u_n > 0$ in Ω , oppure si ha $u_n \equiv 0$ in Ω .

Osservazione 4.1. Poiché G è aperto, si ha che i punti del bordo ∂G sono tutti e soli i punti $(y, z, t) \in \mathbf{R}^{n+1}$ verificanti le due condizioni:

- (a) $(y, z, t) \notin G$;

(b) esiste una successione di punti $x_k = (y_k, z_k, t_k) \in G$ convergente a (y, z, t) .

Lemma 4.2. *Valgono le seguenti inclusioni:*

$$\partial G \subset \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i, \quad (4.4)$$

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \subset \partial G, \quad (4.5)$$

dove gli insiemi Γ_i sono disgiunti e dati da:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 = \{ (y, z, t) \mid (y, z) \in \partial\Omega, (y, t) \in \Omega, z < t \}; \\ \Gamma_2 = \{ (y, z, t) \mid (y, z) \in \Omega, (y, t) \in \partial\Omega, z < t \}; \\ \Gamma_3 = \{ (y, z, t) \mid (y, z), (y, t) \in \partial\Omega, z < t \}; \\ \Gamma_4 = \{ (y, z, t) \mid (y, z) \in \overline{\Omega}, z = t \}. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Dimostrazione. Sia $(y, z, t) \in \partial G$. Dall'osservazione 4.1(b) segue che sono verificate tutte le seguenti condizioni:

$$i) (y, z) \in \overline{\Omega};$$

$$ii) (y, t) \in \overline{\Omega};$$

$$iii) z \leq t.$$

Se, in particolare, si ha $z < t$, allora non può aversi simultaneamente $(y, z) \in \Omega$ e $(y, t) \in \Omega$, perché in tal caso risulterebbe $(y, z, t) \in G$,

contrariamente al punto (a) dell'osservazione 4.1. Perciò con $z < t$ vale una e una sola delle seguenti:

- 1) $(y, z) \in \partial\Omega$ e $(y, t) \in \Omega$, quindi $(y, z, t) \in \Gamma_1$;
- 2) $(y, z) \in \Omega$ e $(y, t) \in \partial\Omega$, quindi $(y, z, t) \in \Gamma_2$;
- 3) $(y, z), (y, t) \in \partial\Omega$ e $z < t$, quindi $(y, z, t) \in \Gamma_3$.

Con $z = t$ si ha invece, evidentemente, $(y, z, t) \in \Gamma_4$. Ciò prova la (4.4). Ora sia $(y, z, t) \in \Gamma_1$. È chiaro che la condizione (a) dell'osservazione 4.1 è verificata. Per verificare anche la (b) basta considerare una successione $\{(y_k, z_k)\}$ di punti di Ω che tenda a (y, z) e quindi porre

$$x_k = (y_k, z_k, t),$$

dove k deve essere preso grande abbastanza perché x_k sia in G . Analogamente si prova che $\Gamma_2 \subset \partial G$.

Infine, sia $(y, z, t) \in \Gamma_4$. Allora esistono due successioni $\{(y_k, z_k)\}$, $\{(y_k, z_k + \epsilon_k)\}$ di punti di Ω , con $\epsilon_k > 0$ per ogni k , che convergono a (y, z) . Quindi basta porre

$$x_k = (y_k, z_k, z_k + \epsilon_k)$$

e, con l'osservazione 4.1, la dimostrazione è conclusa. ■

Osservazione 4.2. Non sussiste, in generale, l'uguaglianza $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.

Corollario 4.1. *Se u soddisfa le condizioni (4.2) e (4.3) del teorema 4.1, allora si ha $\phi \leq 0$ su ∂G .*

Dimostrazione. Sia $(y, z, t) \in \partial G$. Se $(y, z, t) \in \Gamma_1$, oppure $\in \Gamma_2$, la tesi segue dalla condizione (4.3). Nel caso $(y, z, t) \in \Gamma_3$ basta sfruttare la condizione (4.2). Nel caso $(y, z, t) \in \Gamma_4$ con un calcolo diretto si trova $\phi(y, z, t) = 0$. ■

Una condizione su Ω sufficiente affinché G sia connesso è espressa dal seguente

Lemma 4.3. *Se il dominio Ω è convesso nella direzione x^n , allora l'insieme G dato dalla (4.1) è connesso.*

Dimostrazione. Mostriamo che due punti qualunque di G , poniamo (y', z', t') e (y'', z'', t'') , sono estremi di un cammino contenuto in G . Osserviamo anzitutto che, essendo Ω connesso, i punti (y', z') e (y'', z'') sono collegabili da un cammino γ :

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$$

con $\gamma(0) = (y', z')$ e $\gamma(1) = (y'', z'')$. Inoltre, essendo l'insieme $\gamma([0, 1]) \subset \Omega$ compatto, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $\alpha \in [0, 1]$ si ha:

$$\gamma(\alpha) + (0, \dots, 0, \delta) = (\gamma_1(\alpha), \dots, \gamma_{n-1}(\alpha), \gamma_n(\alpha) + \delta) \in \Omega.$$

Pertanto il cammino $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow G$ dato da:

$$\tilde{\gamma}(\alpha) = (\gamma(\alpha), \gamma_n(\alpha) + \delta)$$

collega in G i punti $(y', z', z' + \delta)$ e $(y'', z'', z'' + \delta)$. Resta da mostrare che tali punti sono collegabili in G , rispettivamente, ai punti (y', z', t') e (y'', z'', t'') . Ma questo è facile perché, essendo Ω convesso nella direzione x^n , basta porre:

$$\gamma'(\alpha) = (y', z', \alpha(z' + \delta) + (1 - \alpha)t')$$

$$\gamma''(\alpha) = (y'', z'', \alpha(z'' + \delta) + (1 - \alpha)t'')$$

La dimostrazione è conclusa. ■

Osservazione 4.3. La condizione “ Ω convesso nella direzione x^n ” non è necessaria affinché G sia connesso.

Prima di procedere alla dimostrazione del teorema 4.1 è opportuno svolgere ulteriori considerazioni sulla geometria del bordo di G .

Lemma 4.4. *Se $(y_0, z_0) \in \Omega$ allora $(y_0, z_0, z_0) \in \partial G$ e ∂G ha la proprietà della sfera interna in (y_0, z_0, z_0) . Inoltre la direzione dell'asse x^n è una direzione esterna a G in quel punto.*

Dimostrazione. Sia (y_0, z_0) un punto di Ω . Per l'inclusione (4.4), (y_0, z_0, z_0) appartiene a ∂G . Per provare che ∂G ha la proprietà

della sfera interna è sufficiente mostrare che esiste un intorno U di (y_0, z_0, z_0) tale che

$$U \cap \partial G = U \cap H, \quad (4.7)$$

dove H è l'iperpiano n -dimensionale di equazione $z = t$. L'uguaglianza (4.7) può essere espressa dicendo che ∂G è *piatto* in un intorno di (y_0, z_0, z_0) . Sia $\delta = \text{dist}((y_0, z_0), \partial\Omega)$, e si assegni ad r un valore più piccolo di δ , per esempio $r = \frac{\delta}{2}$. Sia $U = \{(y, z, t) \mid \|(y, z, t) - (y_0, z_0, z_0)\| < r\}$. Si vede facilmente che $\Gamma_i \cap U = \emptyset$ per $i = 1, 2, 3$, dove i Γ_i sono dati dalla (4.6). Poiché $\Gamma_4 \subset H$, per l'inclusione (4.4) si ottiene $U \cap \partial G \subset U \cap H$.

Viceversa, se $(y, z, t) \in U$, allora $(y, z), (y, t) \in \Omega$, quindi $U \cap H \subset \Gamma_4$. Quindi per l'inclusione (4.5) si ottiene $U \cap H \subset U \cap \partial G$.

Infine, è chiaro che tutti i punti di U con $z < t$ appartengono a G . Quindi per la (4.7) si ha che la direzione dell'asse x^n è una direzione esterna a G in tutti i punti di $U \cap \partial G$. ■

Lemma 4.5. *Tutti i punti della forma (y, z, z) con $(y, z) \in \Omega$ appartengono al bordo della stessa componente connessa di G .*

Dimostrazione. Basta mostrare che, se (y', z') e (y'', z'') sono punti di Ω , allora i punti $(y', z', z'), (y'', z'', z'') \in \partial G$ sono estremi di un cammino continuo $\gamma_G: [0, 1] \rightarrow \overline{G}$ tale che $\gamma_G((0, 1)) \subset G$.

Per la definizione di G (4.1) è chiaro che, per un opportuno $\epsilon > 0$, i punti $(y', z' - \epsilon, z')$ e $(y'', z'' - \epsilon, z'')$ appartengono a G . Tali punti

sono collegati, rispettivamente, ad (y', z', z') e ad (y'', z'', z'') dai cammini:

$$\gamma'(\alpha) = (y', \alpha z' + (1 - \alpha)(z' - \epsilon), z'),$$

$$\gamma''(\alpha) = (y'', \alpha z'' + (1 - \alpha)(z'' - \epsilon), z''),$$

dove $\alpha \in [0, 1]$. È chiaro che $\gamma'(\alpha), \gamma''(\alpha) \in G$ per $\alpha \in [0, 1]$. Perciò è sufficiente trovare un cammino in G che colleghi $(y', z' - \epsilon, z')$ a $(y'', z'' - \epsilon, z'')$. Si noti che, poiché Ω è connesso, i punti (y', z') e (y'', z'') sono estremi di un cammino $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$. Poiché l'insieme $\gamma([0, 1])$ è compatto, esiste un $\delta > 0$ tale che il cammino

$$\tilde{\gamma}(\alpha) = \gamma(\alpha) - (0, \dots, 0, \delta) = (\gamma^1(\alpha), \dots, \gamma^{n-1}(\alpha), \gamma^n(\alpha) - \delta)$$

è incluso in Ω , estremi compresi. Poiché è possibile scegliere sia ϵ che δ piccoli a piacere, sia $\epsilon = \delta$. Allora il cammino $\tilde{\tilde{\gamma}}$ definito da:

$$\tilde{\tilde{\gamma}}(\alpha) = (\gamma^1(\alpha), \dots, \gamma^{n-1}(\alpha), \gamma^n(\alpha) - \delta, \gamma^n(\alpha)),$$

i cui estremi sono $(y', z' - \epsilon, z')$ e $(y'', z'' - \epsilon, z'')$, è tale che $\tilde{\tilde{\gamma}}((0, 1)) \subset G$. Quindi il cammino γ_G può essere definito come $\gamma_G = (\gamma')^{-1} \cdot \tilde{\tilde{\gamma}} \cdot \gamma''$, dove \cdot è l'usuale prodotto di cammini e $(\gamma')^{-1}(\alpha) = \gamma'(1 - \alpha)$. ■

Dimostrazione del teorema 4.1. Chiamiamo K la componente connessa di G al cui bordo, per il lemma 4.5, appartengono tutti i punti

della forma (y, z, z) , con $(y, z) \in \Omega$. Per il lemma 4.1 ed il corollario 4.1 si ha che delle due seguenti una è vera:

$$\phi < 0 \quad \text{in } K, \quad \text{o} \quad \phi \equiv 0 \quad \text{in } K. \quad (4.8)$$

Poiché $u_n(y, z) = \phi_n(y, z, z)$, se $\phi \equiv 0$ in K si ha $u_n \equiv 0$ in Ω ; supponiamo allora $\phi < 0$. Utilizzando il “secondo principio” è possibile mostrare che $\phi_n(y, z, z) > 0$. Per la (4.8), il fatto che $\phi(y, z, z) = 0$ per ogni $(y, z) \in \Omega$ implica che il massimo di ϕ in \bar{G} è raggiunto in ogni (y, z, z) e vale 0. Per il lemma 4.4 sappiamo inoltre che, in tali punti, ∂G ha la proprietà della sfera interna e la direzione dell’asse x^n è una direzione esterna. Preso allora un punto arbitrario $(y_0, z_0) \in \Omega$, sia L l’operatore dato da $L\phi = b^{hk}\phi_{hk}$, dove la matrice $B(y, z, t) = [b^{hk}(y, z, t)]$, di ordine $n + 1$, è ottenuta da $A(Du(y, z)) = [a^{ij}(Du(y, z))]$ con la costruzione indicata nel lemma 3.1, ed il valore di μ è scelto in modo che $B(y_0, z_0, z_0)$ è definita positiva. Per continuità, e poiché il punto (y_0, z_0) è *interno* ad Ω , l’operatore L è uniformemente ellittico in un intorno $S = \{(y, z, t) \in G \mid \|(y, z, t) - (y_0, z_0, z_0)\| < r\}$ con un opportuno raggio $r > 0$. Il valore di r può essere preso in modo che i rapporti tra i coefficienti W^h , Q^h e Q , che figurano nella (3.10), ed il minimo autovalore λ di B , siano limitati in S . Si può quindi applicare il “secondo principio” (teorema 0.5) e dedurre che

$$\phi_n(y_0, z_0, z_0) > 0,$$

quindi $u_n(y_0, z_0) > 0$. Per l'arbitrarietà del punto (y_0, z_0) la tesi è provata. ■

5. Un caso più generale.

Per ogni dominio $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ indichiamo, come di consueto, con Ω^+ e Ω^- gli insiemi $\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid x^n > 0\}$ e $\Omega^- = \{x \in \Omega \mid x^n < 0\}$. La tecnica sviluppata nei paragrafi precedenti si può usare, con poche modifiche, per dimostrare il seguente teorema. Se $n = 1$, si trascuri la lettera y .

Teorema 5.1. *Sia u una soluzione di classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ dell'equazione (3.1) in un dominio limitato $\Omega = \omega \times (-b, b) \subset \mathbf{R}^n$, soddisfacente le condizioni*

$$u(y, \zeta) \leq u(y, \tau) \quad \text{per } y \in \partial\omega \text{ e } |\zeta| < \tau; \quad (5.1)$$

$$u(y, z) \leq u(y, b) \quad \text{per } y \in \omega \text{ e } z \in (0, b); \quad (5.2)$$

$$u(y, -z) \leq u(y, z) \quad \text{per } y \in \omega \text{ e } z \in (0, b). \quad (5.3)$$

Sia u tale che la matrice $[a^{ij}(Du(x))]$ è definita positiva per ogni $x \in \Omega$. I coefficienti a^{ij} siano localmente lipschitziani in Du , e la

funzione $f(x, u, Du)$ sia localmente lipschitziana in (u, Du) , decrescente in x^n e crescente in u . Allora o si ha $u_n > 0$ in Ω^+ , oppure si ha $u_n \equiv 0$ in Ω^+ .

Si può anzi provare un risultato più generale, che è un'estensione del teorema 4.1. L'unica ipotesi su Ω è che Ω^+ sia non vuoto e connesso:

Teorema 5.2. *Sia u una soluzione di classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ dell'equazione (3.1) in un dominio limitato $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ tale che Ω^+ sia non vuoto e connesso. Supponiamo*

$$u(y, \zeta) \leq u(y, \tau) \text{ per } (y, \zeta), (y, \tau) \in \partial\Omega \text{ e } |\zeta| < \tau; \quad (5.4)$$

$$u(y, \zeta) \leq u(y, z) \text{ per } (y, z) \in \Omega, (y, \zeta) \in \partial\Omega \text{ e } |\zeta| < z; \quad (5.5)$$

$$u(y, z) \leq u(y, \tau) \text{ per } (y, z) \in \Omega, (y, \tau) \in \partial\Omega \text{ e } |z| < \tau; \quad (5.6)$$

$$u(y, -z) \leq u(y, z) \text{ per } (y, z) \in \bar{\Omega}^+ \text{ e } (y, -z) \in \bar{\Omega}^-. \quad (5.7)$$

Sia u tale che la matrice $[a^{ij}(Du(x))]$ è definita positiva per ogni $x \in \Omega$. I coefficienti a^{ij} siano localmente lipschitziani in Du , e la funzione $f(x, u, Du)$ sia localmente lipschitziana in (u, Du) , decrescente in x^n e crescente in u . Allora o si ha $u_n > 0$ in Ω^+ , oppure si ha $u_n \equiv 0$ in Ω^+ .

Osservazione 5.1. Prima di passare alla dimostrazione del teorema 5.2, osserviamo che da esso si può dedurre facilmente il teorema 4.1. Infatti, assumiamo le *ipotesi* del teorema 4.1 e poniamo $\Omega_c = \{ (y, z) \mid (y, z - c) \in \Omega \}$ con una $c \geq 0$ tale che $\Omega_c^+ = \Omega_c$. La funzione

$$\tilde{u}(y, z) = u(y, z - c)$$

è soluzione di

$$a^{ij}(D\tilde{u})\tilde{u}_{ij} = f(y, z - c, \tilde{u}, D\tilde{u}) \quad \text{in } \Omega_c.$$

È possibile applicare il teorema 5.2 a quest'ultima equazione: infatti le condizioni (4.2) e (4.3) implicano che la (5.4), la (5.5) e la (5.6) sono soddisfatte per \tilde{u} ed Ω_c al posto di u ed Ω , invece la (5.7) è banalmente soddisfatta (da \tilde{u} e da Ω_c) perché $\Omega_c^+ = \Omega_c$. Quindi per il teorema 5.2 o si ha $\tilde{u}_n > 0$ in Ω_c , oppure si ha $\tilde{u}_n \equiv 0$ in Ω_c . Ma ciò equivale alla *tesi* del teorema 4.1.

Osservazione 5.2. Il teorema 5.1 si deduce dal teorema 5.2 osservando che, se $\Omega = \omega \times (-b, b)$, allora: la (5.4) equivale alla (5.1), la (5.5) è banalmente soddisfatta, la (5.6) si ottiene dalla (5.2) e dalla (5.3), la (5.7) si ottiene dalla (5.3) per la continuità di u in $\bar{\Omega}$.

Per arrivare alla dimostrazione del teorema 5.2, stabiliamo di indicare con \underline{G} l'insieme $\underline{G} = \{ (y, z, t) \mid (y, z) \in \Omega, (y, t) \in \Omega, |z| < t \} \subset G$. Per il lemma 4.1, la funzione di crescita ϕ definita nella

(2.1) soddisfa un principio di massimo su \underline{G} nel senso che su ogni componente connessa $\underline{K} \subset \underline{G}$ non esistono punti $x_M \in \underline{K}$ tali che $\phi(x_M) = \sup_{\underline{K}} \phi \geq 0$, a meno che $\phi \equiv 0$ in \underline{K} . Perciò il teorema può essere facilmente provato dopo aver completato i seguenti tre passi:

- 1) dimostrare che $\phi|_{\partial\underline{G}} \leq 0$;
- 2) dimostrare che $\partial\underline{G}$ ha la proprietà della sfera interna in ogni punto (y, z, z) con $(y, z) \in \Omega^+$;
- 3) dimostrare che tutti i punti della forma (y, z, z) con $(y, z) \in \Omega^+$ appartengono al bordo della stessa componente connessa di \underline{G} .

PASSO 1.

L'insieme \underline{G} può essere espresso come $\underline{G} = G \cap E$, dove E è il semispazio $E = \{ (y, z, t) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid t > -z \}$.

Lemma 5.1. *Valgono le seguenti inclusioni:*

$$\partial\underline{G} \subset \bigcup_{i=1}^5 \underline{\Gamma}_i, \quad (5.8)$$

$$\underline{\Gamma}_1 \cup \underline{\Gamma}_2 \cup \underline{\Gamma}_4 \subset \partial\underline{G}, \quad (5.9)$$

dove i $\underline{\Gamma}_i$ sono disgiunti e dati da $\underline{\Gamma}_i = \Gamma_i \cap E$ per $i = 1, \dots, 4$, $\underline{\Gamma}_5 = \{ (y, z, -z) \mid (y, z) \in \overline{\Omega^+}, (y, -z) \in \overline{\Omega^-} \}$.

Dimostrazione. Consideriamo i termini che compaiono nel membro destro della seguente inclusione:

$$\partial\underline{G} \subset (\partial G \cap E) \cup (G \cap \partial E) \cup (\partial G \cap \partial E). \quad (5.10)$$

L'inclusione (4.4) implica $\partial G \cap E \subset \underline{\Gamma}_1 \cup \underline{\Gamma}_2 \cup \underline{\Gamma}_3 \cup \underline{\Gamma}_4$. Ovviamente $G \cap \partial E \subset \underline{\Gamma}_5$. Ancora l'inclusione (4.4) implica $\partial G \cap \partial E \subset \underline{\Gamma}_5$. Ciò prova la (5.8). L'inclusione (5.9) è una conseguenza della (4.5). ■

Corollario 5.1. *Se u soddisfa le condizioni da (5.4) a (5.7), allora:*

$$\phi|_{\partial \underline{G}} \leq 0. \quad (5.11)$$

Dimostrazione. Sia $(y, z, t) \in \partial \underline{G}$. Se $(y, z, t) \in \underline{\Gamma}_1$, allora $\phi(y, z, t) \leq 0$ per l'ipotesi (5.5). Se $(y, z, t) \in \underline{\Gamma}_2$, allora $\phi(y, z, t) \leq 0$ per l'ipotesi (5.6). Se $(y, z, t) \in \underline{\Gamma}_3$, allora $\phi(y, z, t) \leq 0$ per l'ipotesi (5.4). Se $(y, z, t) \in \underline{\Gamma}_4$, con un calcolo diretto si ha $\phi(y, z, t) = 0$. Se $(y, z, t) \in \underline{\Gamma}_5$, allora $\phi(y, z, t) \leq 0$ per l'ipotesi (5.7). ■

PASSI 2 E 3.

Sia $G^+ = \{(y, z, t) \in G \mid z > 0\}$. Si noti che la (4.1) continua a valere sostituendo Ω e G con Ω^+ e G^+ . Con l'uguaglianza

$$G^+ = \{(y, z, t) \in \underline{G} \mid z > 0\} \quad (5.12)$$

si ottengono facilmente i seguenti lemmi:

Lemma 5.2. *Se $(y_0, z_0) \in \Omega^+$ allora $(y_0, z_0, z_0) \in \partial \underline{G}$ e $\partial \underline{G}$ ha la proprietà della sfera interna in (y_0, z_0, z_0) . Inoltre la direzione dell'asse x^n è una direzione esterna a \underline{G} in quel punto.*

Dimostrazione. Il lemma 4.4 applicato al dominio Ω^+ invece che ad Ω implica che $(y_0, z_0, z_0) \in \partial G^+$ e ∂G^+ ha la proprietà della sfera interna in (y_0, z_0, z_0) . Inoltre la direzione dell'asse x^n è una direzione esterna a \underline{G} in quel punto. Richiamando la (5.12) si prova la tesi. ■

Lemma 5.3. *Tutti i punti della forma (y, z, z) con $(y, z) \in \Omega^+$ appartengono al bordo della stessa componente connessa di \underline{G} .*

Dimostrazione Il lemma 4.5 applicato al dominio Ω^+ invece che ad Ω implica che tutti i punti della forma (y, z, z) con $(y, z) \in \Omega^+$ appartengono al bordo della stessa componente connessa di G^+ . Richiamando la (5.12) si prova la tesi. ■

FINE DEI PASSI 2 E 3.

La dimostrazione del teorema 5.2 si ottiene da quella del teorema 4.1 “sottolineando” le lettere Ω , G e K . Ovviamente, il corollario 4.1, il lemma 4.4 ed il lemma 4.5 devono essere sostituiti, rispettivamente, dal corollario 5.1, dal lemma 5.2 e dal lemma 5.3.

Capitolo 2.

CONVESSITÀ

Nei paragrafi 1, 2 e 3 si premettono alcune proprietà delle funzioni armoniche concave, che sono utilizzate nel paragrafo 4 per illustrare dei principî di massimo per la funzione di concavità C , già indicata nel capitolo introduttivo. Nel paragrafo 5 si considerano dei problemi al contorno, e si svolge uno studio delle condizioni che, insieme al principio di massimo, consentono di determinare il segno di C . Nel paragrafo 6 si esamina in particolare il caso delle soluzioni non limitate.

1. Il concetto di armonica concavità.

Una definizione di armonica concavità, data per funzioni non negative, si può trovare in Kawohl [19], Theorem 3.13. Noi adotteremo la seguente e più generale definizione:

Definizione 1.1. *Sia Ω un dominio convesso di \mathbf{R}^n . Una funzione continua $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ si dice **armonica concava** se, per ogni $x, y \in \Omega$ tali che $f(x) + f(y) > 0$, si ha:*

$$[f(x) + f(y)]f(z) - 2f(x)f(y) \geq 0, \quad (1.1)$$

dove $z = \frac{x+y}{2}$.

Spesso conviene scrivere la (1.1) nella forma:

$$f(z) \geq \frac{2f(x)f(y)}{f(x) + f(y)}. \quad (1.2)$$

Tutte le funzioni a valori in $(-\infty, 0]$ sono evidentemente armoniche concave. Per le funzioni positive si ha invece un'importante caratterizzazione:

Lemma 1.1. *Sia $f(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega$. Allora f è armonica concava se e solo se $\frac{1}{f}$ è convessa.*

Dimostrazione. La condizione (1.2) equivale alla

$$\frac{1}{f(z)} \leq \frac{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}}{2}. \quad \blacksquare$$

Esempio 1.1. La funzione (di una variabile) $f(x) = x^\alpha$, con dominio $(0, +\infty)$, è armonica concava per $\alpha \geq 0$ e per $\alpha \leq -1$, poiché per tali valori del parametro α la funzione $\frac{1}{f(x)} = x^{-\alpha}$ è convessa.

La funzione $f(x) = x^n$, con $n = 1, 2, \dots$, è armonica concava su tutto \mathbf{R} per n dispari, ed è armonica concava su \mathbf{R}^+ e su \mathbf{R}^- per n pari. Infatti, con n dispari, se x ed y sono due punti tali che $f(x) + f(y) > 0$ ma $f(x)f(y) \leq 0$, la (1.2) vale perché $f(z) > 0$.

Invece con n pari ed $x = -y$ la (1.2) non è soddisfatta, quindi non si ha armonica concavità su \mathbf{R} .

Esempio 1.2. La funzione $f(x) = ae^{bx}$ è armonica concava per ogni $a, b \in \mathbf{R}$.

La condizione di convessità per una funzione g , di una variabile reale e di classe $C^2(\mathbf{R})$, è data, come è noto, da $g'' \geq 0$. Ponendo $g = \frac{1}{f}$ si giunge al

Corollario 1.1. Una funzione $f \in C^2((a, b), \mathbf{R}^+)$ è armonica concava se e solo se $2(f')^2 - ff'' \geq 0$.

Le funzioni concave, ed in particolare le applicazioni affini, sono funzioni armoniche concave:

Lemma 1.2. Se $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ è concava, allora è armonica concava.

Dimostrazione. Siano x, y due punti qualunque di Ω . Il caso non banale è quello in cui $f(x) + f(y) > 0$. In tal caso, per la disuguaglianza $[f(x) + f(y)]^2/2 \geq 2f(x)f(y)$, si ha

$$\begin{aligned} [f(x) + f(y)]f(z) - 2f(x)f(y) &\geq [f(x) + f(y)]f(z) - \frac{[f(x) + f(y)]^2}{2} = \\ &= [f(x) + f(y)] \left(f(z) - \frac{f(x) + f(y)}{2} \right), \end{aligned}$$

quindi la condizione di concavità: $f(z) - \frac{f(x) + f(y)}{2} \geq 0$ implica la (1.1). ■

La non coincidenza dei concetti di concavità e di armonica concavità è evidente per le funzioni non positive. Inoltre l'esistenza di funzioni positive e armoniche concave, ma non concave, è provata dall'esempio 1.2 con $a, b > 0$.

Per quanto riguarda gli insiemi di livello di una funzione armonica concava, visto che, se $f(x), f(y) > 0$, allora

$$\frac{2f(x)f(y)}{f(x) + f(y)} \geq \min(f(x), f(y)), \quad (1.3)$$

si ha che le funzioni armoniche concave positive sono “quasiconcave”, cioè hanno gli insiemi di livello convessi:

Lemma 1.3. *Per ogni $c \geq 0$, l'insieme di livello $\Omega_c = \{x \mid f(x) > c\}$ di una funzione f armonica concava è convesso (e, a maggior ragione, connesso).*

Dimostrazione. Se x ed y sono due punti qualunque di Ω_c , mostreremo che tutto il segmento xy è contenuto in Ω_c costruendo un ricoprimento di xy mediante opportuni intorni inclusi in Ω_c . Per la continuità di f , infatti, esistono due intorni $B(x, r)$ e $B(y, r)$, con un opportuno raggio r , contenuti in Ω_c . Le relazioni (1.2) e (1.3) provano che l'intorno $B(z, r) = \frac{B(x, r) + B(y, r)}{2}$, di raggio r , è contenuto in Ω_c . La costruzione si può ripetere, considerando $\frac{B(z, r) + B(y, r)}{2}$, ecc., finché tutto il segmento xy è ricoperto. ■

Osservazione 1.1. Esistono però funzioni positive che sono “quasiconcave” ma non armoniche concave, come la $f(x) = x^{-1/2}$ su

$(0, +\infty)$ (cfr. l'esempio 1.1). Altre funzioni siffatte sono date dall'osservazione 2.2, più avanti in questo capitolo.

Osservazione 1.2. Come caso particolare, l'insieme $\Omega_0 = \{x \mid f(x) > 0\}$ per una funzione armonica concava f è convesso. Non è detto però che sia convesso l'insieme $\{x \mid f(x) \geq 0\}$, come si vede considerando, ad esempio, la funzione $f(x) = \sin x - 1$, che è armonica concava perchè non positiva. Si noti inoltre che il lemma permette di concludere immediatamente che le funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$ non sono armoniche concave su \mathbf{R} .

La quasiconcavità, come è noto, implica un “principio di minimo”:

Teorema 1.1 *Se $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}^+$ è armonica concava, esiste un punto $x_0 \in \bar{\Omega}$ tale che, per ogni $x \in \bar{\Omega}$, si ha $f(x) \geq f(x_0)$.*

2. Conservazione dell'armonica concavità.

L'armonica concavità, a differenza della concavità, è una proprietà delle funzioni e non del loro grafico, nel senso che non è del tutto invariante rispetto alle traslazioni. È chiaro dalla definizione che, se $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ è armonica concava, allora anche la funzione $g: (\Omega - c) \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $g(x) = f(x + c)$, con un fissato $c \in \mathbf{R}^n$, è armonica concava. Più in generale, è facile dimostrare il

Lemma 2.1. *Se la funzione f è armonica concava su un dominio convesso $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, e A è una matrice $n \times n$ non singolare, allora la funzione g data da $g(x) = f(Ax + c)$, con $c \in \mathbf{R}^n$, è armonica concava sul dominio $A^{-1}(\Omega - c) = \{x \mid Ax + c \in \Omega\}$.*

Riguardo invece alle traslazioni nella direzione “dell’asse y ” si può affermare quanto segue:

Lemma 2.2. *Sia f una funzione armonica concava, c una costante negativa. Sia g la funzione $g = f + c$. Allora g è armonica concava.*

Dimostrazione. Siano x, y due punti qualunque di Ω . Il caso non banale è quello in cui $g(x) + g(y) > 0$. Con questa condizione mostreremo che

$$[g(x) + g(y)]g(z) - 2g(x)g(y) \geq 0.$$

Infatti, essendo $g = f + c$ si ha:

$$\begin{aligned} & [g(x) + g(y)]g(z) - 2g(x)g(y) = \\ & = [f(x) + f(y)]f(z) - 2f(x)f(y) + 2c \left(f(z) - \frac{f(x) + f(y)}{2} \right). \end{aligned}$$

Osserviamo che la condizione $g(x) + g(y) > 0$ implica $f(x) + f(y) > -2c > 0$. Tenuto conto del segno di $f(x) + f(y)$, del segno di c e della relazione $f^2(x) + f^2(y) \geq 2f(x)f(y)$, si trova:

$$\begin{aligned} & [g(x) + g(y)]g(z) - 2g(x)g(y) \geq \\ & \geq \left\{ [f(x) + f(y)]f(z) - 2f(x)f(y) \right\} \left(1 + \frac{2c}{f(x) + f(y)} \right). \end{aligned}$$

La condizione $f(x) + f(y) > -2c > 0$ implica $1 + \frac{2c}{f(x)+f(y)} \geq 0$, da cui la tesi. ■

Osservazione 2.1. Se nel lemma 2.2 si sostituisce alla costante $c < 0$ un'applicazione affine non costante $c(x) = a^i x^i + b$, anche con $c(x) < 0$, non si può più giungere al risultato. Considerata infatti la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, con $x \in (0, 1)$, che è armonica concava, sia $c(x) = x - 1$ (risulta $c(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$): allora la funzione $g(x) = f(x) + c(x) = \frac{1}{x} + x - 1$ non è armonica concava. Infatti, essendo

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (2(g')^2 - gg'') = -2 < 0,$$

si ha $2(g')^2 - gg'' < 0$ in $(\epsilon, 1)$ con un opportuno $\epsilon > 0$ (v. il corollario 1.1).

Osservazione 2.2. Il lemma non è valido senza la condizione $c < 0$. Infatti la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, con $x \in \mathbf{R}^+$, è positiva e armonica concava, ma la funzione $g(x) = \frac{1}{x} + c$, con $x \in \mathbf{R}^+$ e $c > 0$, che è ancora positiva, non è armonica concava, in quanto si ha $2(g')^2 - gg'' = -2c/x^3 < 0$ (v. il corollario 1.1). Poiché la funzione $g(x) + c$ è quasiconcava, questo esempio mostra anche che l'armonica concavità, che per le funzioni positive implica la quasiconcavità, non è equivalente ad essa.

Le uniche funzioni che restano armoniche concave anche dopo aver sommato loro una qualunque costante positiva sono le funzioni concave, che tali rimangono in seguito a qualunque traslazione:

Lemma 2.3. *Le funzioni $f(x) + c$ sono armoniche concave per ogni $c \in \mathbf{R}$ se e solo se la funzione $f(x)$ è concava.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $f(x) + c$ sia armonica concava per ogni $c \in \mathbf{R}$, ma che per due punti x ed y si abbia $f(z) - \frac{f(x)+f(y)}{2} < 0$. Per la definizione di armonica concavità si ha

$$\begin{aligned} 0 &\leq [f(x) + f(y) + 2c][f(z) + c] - 2[f(x) + c][f(y) + c] = \\ &= 2 \left(f(z) - \frac{f(x) + f(y)}{2} \right) c + [f(x) + f(y)]f(z) - 2f(x)f(y) \end{aligned}$$

per ogni $c > -\frac{f(x)+f(y)}{2}$. Per c sufficientemente grande si cade in una contraddizione. ■

Osservazione 2.3. Per ogni funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ si ha uno e uno solo dei seguenti casi:

- 1) $f(x) + c$ è armonica concava per ogni $c \in \mathbf{R}$ (f è concava);
- 2) $f(x) + c$ non è armonica concava per alcun $c \in \mathbf{R}$;
- 3) esiste un'unica \bar{c} tale che $f(x) + \bar{c}$ è armonica concava per ogni $c \leq \bar{c}$.

Un esempio per il caso 2) è dato da $f(x) = -\log x$, infatti $2(f' + c) - (f + c)(f'' + c) = (2 - c + \log x)/x^2 < 0$ per $x < e^{c-2}$.

Un esempio per il caso 3) è dato da $f(x) = \frac{1}{x}$, e si ha $\bar{c} = 0$.

Osservazione 2.4. Notiamo, infine, che dalla definizione 1.1 segue che il prodotto kf di una funzione armonica concava f per una costante

$k \geq 0$ è ancora una funzione armonica concava. Se k è negativa, ciò in generale non è vero: per esempio la funzione $f(x) = -1 - \|x\|$ è armonica concava su \mathbf{R}^n perché negativa, mentre $-f(x) = 1 + \|x\|$ non è armonica concava perché è positiva e assume il minimo in un punto interno (v. il teorema 1.1). Del resto la concavità non si conserva, in generale, moltiplicando per un numero negativo.

Tuttavia possono aversi delle eccezioni, come per la funzione $\frac{k}{x}$ che è armonica concava su \mathbf{R}^+ e su \mathbf{R}^- per ogni valore di $k \in \mathbf{R}$ (infatti $\frac{x}{k}$ è convessa, e se $k = 0$ si ha $\frac{k}{x} \equiv 0$). Tali eccezioni sono costituite dalle funzioni per cui vale la (1.1) anche quando $f(x) + f(y) < 0$.

Per le considerazioni che seguiranno nel paragrafo 4 ha importanza il caso di una funzione che sia armonica concava rispetto ad alcune variabili, ma non necessariamente rispetto a tutte (v. lemma 4.2). Adotteremo ovviamente la

Definizione 2.1. *Sia Ω un dominio convesso di \mathbf{R}^n . Una funzione $f: \Omega \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ si dice **armonica concava** rispetto alle variabili x^1, \dots, x^n se, per ogni valore di y^1, \dots, y^m , la restrizione:*

$$\tilde{f}(x^1, \dots, x^n) = f(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m)$$

è una funzione armonica concava nel senso precisato dalla definizione 1.1.

Esempio 2.1. La funzione $f(x, y) = \frac{y}{x}$, considerata sul dominio $\Omega = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, è armonica concava rispetto a x per ogni valore di y

(cfr. l'osservazione 2.4), ed è armonica concava rispetto a y per ogni valore di x . Non è armonica concava come funzione di due variabili, come si può notare dal fatto che $\frac{1}{f} = \frac{x}{y}$ non è convessa (la matrice Hessiana è non-definita).

Osservazione 2.5. Una conseguenza immediata delle considerazioni già svolte sulla non completa invarianza dell'armonica concavità per traslazioni è che, se la funzione $f(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m)$ è armonica concava rispetto alle x^1, \dots, x^n , e se $d(y^1, \dots, y^m)$ è una funzione qualunque, allora la funzione

$$g(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) = f(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) + d(y^1, \dots, y^m)$$

non è, in generale, armonica concava rispetto alle x^1, \dots, x^n . Lo è, però, se $d \leq 0$.

Esempio 2.2. Posto $f(x, y) = \frac{y}{x}$ per $(x, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, e posto $d(y) = y$, la funzione $g(x, y) = f(x, y) + d(y) = y\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ non è armonica concava rispetto alla x (v. l'osservazione 2.2).

3. Armonica concavità delle funzioni elementari dell'Analisi.

La seguente tabella offre un prospetto sull'armonica concavità delle funzioni elementari dell'Analisi. Molte di esse sono state già

TABELLA 3.1. ARMONICA CONCAVITÀ
DELLE FUNZIONI ELEMENTARI DELL'ANALISI.

funzione	dominio	armonica concavità
$x^n, n \in \mathbf{N}$	\mathbf{R}	SÌ per n dispari, NO per n pari
$x^z, z \in \mathbf{Z}$	\mathbf{R}^-	SÌ
$x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$	\mathbf{R}^+	SÌ per $\alpha \geq 0$ o $\alpha \leq -1$, NO altrimenti
$\sin x$	$(0, \pi)$	SÌ (è concava)
$\sin x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	SÌ (lemma 3.1)
$\sin x$	$(-\pi, \pi)$	NO
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	SÌ (lemma 3.1)
$\sec x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	NO ($\frac{1}{\sec x}$ è concava)
e^x	\mathbf{R}	SÌ (e^{-x} è convessa)
$\log x$	\mathbf{R}^+	SÌ (è concava)

NOTA: non si sono riportate quelle funzioni che, mediante operazioni che conservano l'armonica concavità, si possono ricondurre a queste, come per esempio $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

considerate a titolo di esempio, le altre vengono riportate per completezza.

Per stabilire l'armonica concavità delle funzioni $\sin x$ e $\tan x$ sul dominio $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ si può usare il seguente

Lemma 3.1. *Se $f: (-a, a) \rightarrow \mathbf{R}$ è dispari ed ha le seguenti proprietà:*

- 1) $f \geq 0$ su $(0, a)$;
- 2) f crescente su $(0, a)$;
- 3) f armonica concava su $(0, a)$;

allora è armonica concava su tutto il dominio $(-a, a)$.

Dimostrazione. Viste la 1) e la 3) ed essendo f dispari, il caso interessante si ha per due punti $x < 0, y > 0$ tali che $f(x) + f(y) > 0$. Quest'ultima disuguaglianza, per la 2) e poiché f è dispari, implica $z = \frac{x+y}{2} > 0$. Quindi, per la 1), si ha $f(z) \geq 0$. Ma poiché $f(x) \leq 0$ e $f(y) \geq 0$ la (1.2) è soddisfatta. ■

4. Principî di massimo.

Per studiare la convessità della superficie libera di un liquido in un tubo capillare, considerata come grafico di una funzione $v(x)$, $x \in \Omega$, Ω sezione del tubo, N. J. Korevaar [22] ha introdotto la "funzione di concavità":

$$C(v; x, y) = v(z) - \frac{v(x) + v(y)}{2}, \quad z = \frac{x + y}{2}, \quad (4.1)$$

dove $x, y \in \Omega$. Ovviamente, $v(x)$ è convessa se e solo se

$$C(v; x, y) \leq 0 \quad \text{per ogni } (x, y) \in \Omega \times \Omega.$$

Più in generale, considerata l'equazione:

$$a^{ij}(Dv)v_{ij} = f(x, v, Dv) \tag{4.2}$$

in un dominio Ω , dove i coefficienti a^{ij} sono elementi di una matrice simmetrica e definita positiva, egli ha mostrato in un secondo lavoro ([23], Theorem 1.3) che, se $f_v \geq 0$ e f è concava rispetto a (x, v) , allora la funzione di concavità non ha massimi positivi nei punti (interni) di $\Omega \times \Omega$. Successivamente questo risultato è stato ottenuto da A. Kennington [21] e B. Kawohl [19] supponendo f non negativa, strettamente crescente rispetto a v ed armonica concava rispetto a (x, v) .

In questo paragrafo se ne presenta una dimostrazione senza alcuna ipotesi sul segno di f , utilizzando una disuguaglianza ellittica soddisfatta dalla funzione $C(v; x, y)$. Si considera in particolare, a fine paragrafo, il caso $f < 0$.

Mi piace ricordare qui che il fenomeno della capillarità si manifesta quando le forze attrattive o repulsive fra un liquido ed il recipiente che lo contiene diventano confrontabili con la forza di gravità. Per questo motivo il fenomeno è osservabile sulla Terra se il recipiente ha una sezione piccola, ed è quindi “capillare”. Ma sulle astronavi

in orbita, o durante i viaggi spaziali, la piccola sezione non è più necessaria ed i fenomeni di “capillarità” si manifestano in grande scala.

Ulteriori notizie di tipo fisico sul fenomeno della capillarità, sia in presenza che in assenza di gravità, si possono trovare nei lavori di P. Concus e R. Finn sul n. 132 di Acta Mathematica [8], [9], [10]. Un taglio storico caratterizza il lavoro di Finn [11], che è corredato anche da numerosi riferimenti bibliografici.

Premettiamo il

Lemma 4.1. ([16], lemma 2.2). *Se la matrice $A = [a^{ij}]$, di dimensione n , è semidefinita positiva, allora anche la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} \sigma^2 A & \sigma\tau A \\ \sigma\tau A & \tau^2 A \end{pmatrix}$$

di dimensione $2n$, è semidefinita positiva per ogni $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$.

Dimostrazione. Se ξ è un qualunque elemento di \mathbf{R}^{2n} , posto $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$, $y = (\xi_{n+1}, \dots, \xi_{2n})^T$ e $z = \sigma x + \tau y$ si ha: $\xi^T B \xi = z^T A z \geq 0$. ■

Si può ora provare il principio di massimo per la funzione di concavità nella seguente forma:

Lemma 4.2. (Cfr. [16], Th. 2.1). *Sia $v \in C^2(\Omega)$ una soluzione in un dominio limitato e convesso Ω dell'equazione ellittica (4.2),*

con coefficienti $a^{ij}(Dv)$ localmente lipschitziani. La funzione f sia continua, localmente lipschitziana rispetto a Dv e crescente in v . Sia inoltre f armonica concava rispetto a (x, v) . Allora

$$\sup_{\Omega \times \Omega} C = \limsup_{(x,y) \rightarrow \partial(\Omega \times \Omega)} C(x, y) \quad \text{oppure} \quad \sup_{\Omega \times \Omega} C \leq 0.$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} +1, & \text{se } f(x, v(x), Dv(z)) + f(y, v(y), Dv(z)) \leq 0, \\ f(y, v(y), Dv(z)), & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$\tau(x, y) = \begin{cases} -1, & \text{se } f(x, v(x), Dv(z)) + f(y, v(y), Dv(z)) \leq 0, \\ f(x, v(x), Dv(z)), & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

osservando che $\sigma^2(x, y) + \tau^2(x, y) > 0$ per ogni x ed y . Poniamo inoltre:

$$\phi(x, y) = 2C(v; x, y) = 2v(z) - v(x) - v(y), \quad \text{con } z = \frac{x + y}{2},$$

e sia L l'operatore definito da:

$$\begin{aligned} L\phi &= \sigma^2(x, y) a^{ij}(Dv(z)) \phi_{x_i x_j} + \\ &+ 2\sigma(x, y) \tau(x, y) a^{ij}(Dv(z)) \phi_{x_i y_j} + \\ &+ \tau^2(x, y) a^{ij}(Dv(z)) \phi_{y_i y_j}, \end{aligned}$$

che è ellittico (degenere) per il lemma 4.1. Utilizzando le relazioni

$$\phi_{x_i x_j} = \frac{1}{2} v_{ij}(z) - v_{ij}(x),$$

$$\phi_{x_i y_j} = \frac{1}{2} v_{ij}(z),$$

$$\phi_{y_i y_j} = \frac{1}{2} v_{ij}(z) - v_{ij}(y),$$

si ha:

$$\begin{aligned} L\phi &= \sigma^2(x, y) \left(\frac{1}{2} a^{ij}(Dv(z)) v_{ij}(z) - a^{ij}(Dv(z)) v_{ij}(x) \right) + \\ &+ 2\sigma(x, y) \tau(x, y) \frac{1}{2} a^{ij}(Dv(z)) v_{ij}(z) + \\ &+ \tau^2(x, y) \left(\frac{1}{2} a^{ij}(Dv(z)) v_{ij}(z) - a^{ij}(Dv(z)) v_{ij}(y) \right). \end{aligned}$$

Per la locale lipschitzianità dei coefficienti a^{ij} , utilizzando le relazioni

$$\phi_{x_s}(x, y) = v_s(z) - v_s(x),$$

$$\phi_{y_s}(x, y) = v_s(z) - v_s(y),$$

si può scrivere:

$$a^{ij}(Dv(z)) v_{ij}(x) = a^{ij}(Dv(x)) v_{ij}(x) + \alpha^{sij}(x, y) v_{ij}(x) \phi_{x_s}(x, y),$$

$$a^{ij}(Dv(z)) v_{ij}(y) = a^{ij}(Dv(y)) v_{ij}(y) + \beta^{sij}(x, y) v_{ij}(y) \phi_{y_s}(x, y),$$

dove α^{sij} e β^{sij} sono opportune funzioni localmente limitate. Con queste sostituzioni e con l'equazione (4.2) si trova:

$$\begin{aligned} L\phi + \sigma^2(x, y)\alpha^s\phi_{x_s} + \tau^2(x, y)\beta^s\phi_{y_s} = \\ = \frac{1}{2}[\sigma(x, y) + \tau(x, y)]^2 f(z, v(z), Dv(z)) - \\ - \sigma^2(x, y)f(x, v(x), Dv(x)) - \tau^2(x, y)f(y, v(y), Dv(y)), \end{aligned}$$

dove si è posto, per brevità, $\alpha^s = \alpha^{sij}(x, y)v_{ij}(x)$, $\beta^s = \beta^{sij}(x, y)v_{ij}(y)$, $\phi_{x_s} = \phi_{x_s}(x, y)$ e $\phi_{y_s} = \phi_{y_s}(x, y)$. Si ha inoltre:

$$f(z, v(z), Dv(z)) = f(z, \frac{v(x)+v(y)}{2}, Dv(z)) + \eta(x, y)\frac{\phi}{2},$$

dove η è data da

$$\eta(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\phi} \left[f(z, v(z), Dv(z)) - f(z, \frac{v(x)+v(y)}{2}, Dv(z)) \right] & \text{se } \phi \neq 0, \\ 0 & \text{se } \phi = 0, \end{cases}$$

ed è $\eta \geq 0$ per la monotonia di f . Per la lipschitzianità di f si ha:

$$f(x, v(x), Dv(x)) = f(x, v(x), Dv(z)) - \gamma^s(x, y)\phi_{x_s},$$

$$f(y, v(y), Dv(y)) = f(y, v(y), Dv(z)) - \delta^s(x, y)\phi_{y_s},$$

dove γ^s e δ^s sono opportune funzioni localmente limitate. Con queste sostituzioni, e per la definizione di $\sigma(x, y)$ e di $\tau(x, y)$, si trovano

due uguaglianze, valide a seconda del segno di $f(x, v(x), Dv(z)) + f(y, v(y), Dv(z))$:

$$\begin{aligned} L\phi + \sigma^2(x, y)Q^s\phi_{x_s} + \tau^2(x, y)R^s\phi_{y_s} &= \\ &= -[f(x, v(x), Dv(z)) + f(y, v(y), Dv(z))], \end{aligned}$$

se $f(x, v(x), Dv(z)) + f(y, v(y), Dv(z)) \leq 0$, e invece

$$\begin{aligned} L\phi + \sigma^2(x, y)Q^s\phi_{x_s} + \tau^2(x, y)R^s\phi_{y_s} &= \\ &= \frac{1}{4}[f(y, v(y), Dv(z)) + f(x, v(x), Dv(z))]^2\eta(x, y)\phi + \\ &+ \frac{1}{2}\left\{ [f(x, v(x), \bar{p}) + f(y, v(y), \bar{p})]^2 f(z, \frac{v(x)+v(y)}{2}, \bar{p}) - \right. \\ &\left. - 2[f(x, v(x), \bar{p}) + f(y, v(y), \bar{p})]f(x, v(x), \bar{p})f(y, v(y), \bar{p}) \right\}, \end{aligned}$$

se $f(x, v(x), Dv(z)) + f(y, v(y), Dv(z)) > 0$, dove si è posto $\bar{p} = Dv(z)$, $Q^s = \alpha^s - \gamma^s$, $R^s = \beta^s - \delta^s$. Quindi, per l'armonica concavità di f , si trova:

$$L\phi + \sigma^2(x, y)Q^s\phi_{x_s} + \tau^2(x, y)R^s\phi_{y_s} \geq b(x, y)\phi,$$

dove $b(x, y) = 0$ se $f(x, v(x), Dv(z)) + f(y, v(y), Dv(z)) \leq 0$, e si ha invece

$$b(x, y) = \frac{1}{4}[f(y, v(y), Dv(z)) + f(x, v(x), Dv(z))]^2\eta(x, y)$$

se $f(x, v(x), Dv(z)) + f(y, v(y), Dv(z)) > 0$. Essendo $b(x, y) \geq 0$, la tesi segue dal teorema 0.2: infatti, scelto un compatto $K \subset \Omega \times \Omega$, si può prendere $\nu = 2$, $h_1 = 1$, $h_2 = n + 1$, e

$$M = 1 + \max \left(\sup_K \frac{-Q^1}{a^{11}}, \sup_K \frac{-R^1}{a^{11}} \right),$$

dove $a^{11} = a^{11}(Dv(z))$, $Q^1 = Q^1(x, y)$, $R^1 = R^1(x, y)$. ■

Corollario 4.1. *Sia v soddisfacente la disuguaglianza ellittica:*

$$a^{ij}(Dv)v_{ij} \leq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (4.3)$$

con coefficienti $a^{ij}(Dv)$ localmente lipschitziani. Allora

$$\sup_{\Omega \times \Omega} C = \limsup_{(x,y) \rightarrow \partial(\Omega \times \Omega)} C(x, y) \quad \text{oppure} \quad \sup_{\Omega \times \Omega} C \leq 0.$$

Osservazione 4.1. Nel paragrafo seguente si affianca al lemma 4.2 uno studio volto a dimostrare la convessità di v , escludendo l'eventualità che $C(v; x, y)$ diventi positiva al bordo. Sicuramente non è possibile fare altrettanto per una funzione v soddisfacente la disuguaglianza $a^{ij}(Dv)v_{ij} < 0$: infatti se v è convessa e $[a^{ij}]$ è una matrice semidefinita positiva si ha $a^{ij}v_{ij} \geq 0$.

Si noti però che, affinché l'equazione $a^{ij}(Dv)v_{ij} = f(x, v, Dv)$ abbia una soluzione v convessa, non è necessario che f sia ovunque

positiva. È necessario che f sia positiva sull'insieme $\{(x, v(x), Dv(x)) \mid x \in \Omega\}$, che è a priori sconosciuto.

Per esempio l'equazione $v'' = v$, in cui la funzione $f(x, v, v') = v$ soddisfa $f \geq 0$ solo sull'insieme $(-\infty, +\infty) \times [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$, ha la soluzione generale $v(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, che è convessa ogniqualvolta $c_1, c_2 \geq 0$.

Nel caso sia noto a priori che f è strettamente negativa, il lemma 4.2 dà informazioni sul segno e sulla localizzazione dei punti di massimo per la funzione di concavità:

Osservazione 4.2. Se $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ soddisfa la disuguaglianza ellittica:

$$a^{ij}(Dv)v_{ij} < 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (4.4)$$

con coefficienti $a^{ij}(Dv)$ localmente lipschitziani, allora esiste un punto $(x_0, y_0) \in \partial(\Omega \times \Omega)$, con $C(v; x_0, y_0) > 0$, tale che $C(v; x, y) \leq C(v; x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in \Omega \times \Omega$. Infatti in questo caso C è continua al bordo, e indicato con (x_0, y_0) un punto di $\partial(\Omega \times \Omega)$ sul quale C assume il valore massimo, se fosse $C(v; x_0, y_0) \leq 0$ si avrebbe $C \leq 0$ ovunque e quindi v convessa.

Osservazione 4.3. Si noti che la condizione $(x_0, y_0) \in \partial(\Omega \times \Omega)$ significa che almeno uno dei punti x_0 e y_0 appartiene a $\partial\Omega$, e l'altro a $\bar{\Omega}$.

5. Analisi al contorno.

Un tema di ricerca con il quale molti autori si sono cimentati è quello della convessità degli insiemi di livello $\Omega_c = \{x \in \Omega \mid u(x) > c\}$ di una funzione u , positiva, soluzione di un problema differenziale del tipo

$$\begin{cases} Lu = f(x, u, Du) & \text{in } \Omega \text{ (convesso),} \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

dove L è un operatore differenziale del secondo ordine di tipo ellittico.

Una delle strategie escogitate per affrontarlo consiste nel determinare una opportuna funzione $g(t)$, $t \geq 0$, strettamente decrescente, tale che la nuova funzione $v = g(u)$ sia convessa. Infatti se v è convessa, convessi sono i suoi insiemi di livello $G_k = \{x \in \Omega \mid v(x) < k\}$, e per la monotonia di g si ha $\Omega_c = G_{g(c)}$: dunque gli Ω_c sono convessi.

Questa strategia è efficace nel problema di Saint-Venant:

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

per il quale si dimostra che la funzione $v = -\sqrt{u}$ è convessa (in questo caso dunque $g(t) = -\sqrt{t}$).

La convessità di una funzione $v = g(u)$ può essere provata in due tempi: prima mostrando che la funzione di concavità $C(v; x, y)$ non ha massimi positivi nei punti interni, e poi mostrando che $C(v; x, y)$ non diventa positiva al bordo.

Il principio di massimo espresso dal teorema 4.1 del paragrafo precedente è stato stabilito per affrontare la prima parte di questo programma. I due lemmi seguenti, invece, sono volti ad escludere l'eventualità che $C(g(u); x, y)$ diventi positiva al bordo, ed estendono analoghi risultati di Kennington [21] e di Kawohl [19].

Lemma 5.1. (Cfr. [16], lemma 3.1). *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio limitato e convesso, con frontiera regolare $\partial\Omega$. Sia u una funzione di classe $C^1(\overline{\Omega})$, tale che $u > 0$ in Ω , $u = 0$ su $\partial\Omega$ e $u_n < 0$ su $\partial\Omega$, dove n è la normale esterna a $\partial\Omega$. Sia g una funzione di classe $C^1(\mathbf{R}^+)$ soddisfacente le condizioni:*

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} g(u) = \sup_{u \in \mathbf{R}^+} g(u) \in \mathbf{R} \quad (5.3)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} g'(u) = -\infty \quad (5.4)$$

Se $C(g(u); x, y)$ non ha massimi positivi in $\Omega \times \Omega$, allora non è positiva su $\partial(\Omega \times \Omega)$.

Dimostrazione. Sotto le ipotesi fatte, la funzione $C(g(u); x, y)$ è continua su $\overline{\Omega \times \Omega}$, quindi assume il valore massimo in un certo punto

$(x_0, y_0) \in \overline{\Omega \times \Omega}$. Se il valore massimo è minore o uguale a zero, la tesi segue. Se invece è positivo, osserviamo innanzitutto che, per le ipotesi, deve essere $(x_0, y_0) \in \partial(\Omega \times \Omega)$. Osserviamo inoltre che, se (x, y) è un generico punto di $\partial(\Omega \times \Omega)$, con x ed y appartenenti entrambi a $\partial\Omega$, per la (4.1) risulta:

$$C(g(u); x, y) = g(u(\frac{x+y}{2})) - \sup_{u \in \mathbf{R}^+} g(u) \leq 0.$$

Resta quindi da considerare il caso $x_0 \in \partial\Omega$ e $y_0 \in \Omega$ (o viceversa). Arriveremo a una contraddizione provando che, se $x \in \partial\Omega$ e $y \in \Omega$, allora $C_\nu(g(u); x, y) = -\infty$, dove $\nu = (n^1, \dots, n^N, 0, \dots, 0)$ è la normale esterna in (x, y) al bordo di $\Omega \times \Omega$, $n = (n^1, \dots, n^N)$ è la normale esterna in x a $\partial\Omega$. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow x} C_\nu(g(u); \xi, y) = \\ & = \lim_{\xi \rightarrow x} \left(\frac{1}{2} g'(u(\frac{\xi+y}{2})) u_n(\frac{\xi+y}{2}) - \frac{1}{2} g'(u(\xi)) u_n(\xi) \right). \end{aligned}$$

Per la convessità di Ω si ha $\frac{\xi+y}{2} \in \Omega$, quindi la quantità $\frac{1}{2} g'(u(\frac{\xi+y}{2}))$ è finita, mentre il termine $-\frac{1}{2} g'(u(\xi)) u_n(\xi)$, vista la (5.4) e l'ipotesi $u_n|_{\partial\Omega} < 0$, tende a $-\infty$. La tesi segue. ■

Lemma 5.2. *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio limitato, con frontiera regolare $\partial\Omega$ avente curvatura gaussiana positiva. Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u > 0$*

in Ω , $u = 0$ su $\partial\Omega$ e $u_n < 0$ su $\partial\Omega$. Sia $g: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione regolare soddisfacente le condizioni:

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} g(u) = \sup_{u \in \mathbf{R}^+} g(u) = +\infty, \quad (5.5)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} g'(u) = -\infty, \quad (5.6)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} g''(u) = +\infty, \quad (5.7)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{g'(u)}{g''(u)} = 0. \quad (5.8)$$

Allora esiste un $\delta > 0$ tale che $C(g(u); x, y) \leq 0$ per ogni x ed y tali che $\text{dist}((x, y), \partial(\Omega \times \Omega)) < \delta$.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esista una successione $\{(x_j, y_j)\}$ di punti di $\Omega \times \Omega$, tendente a un $(x_0, y_0) \in \partial(\Omega \times \Omega)$ e tale che $C(g(u); x_j, y_j) > 0$ per ogni j . Per la definizione di C (4.1) si ha quindi

$$g(u(z_j)) - \frac{g(u(x_j)) + g(u(y_j))}{2} > 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

dove ovviamente si è posto $z_j = \frac{x_j + y_j}{2}$. Si noti che $z_j \rightarrow \frac{x_0 + y_0}{2}$.

Se $x_0 \neq y_0$, allora $\frac{x_0 + y_0}{2} \in \Omega$: quindi la quantità $g(u(z_j))$ tende

ad un limite finito. E poiché almeno una delle successioni $\{x_j\}, \{y_j\}$ tende a $\partial\Omega$, la quantità $g(u(x_j)) + g(u(y_j))$ nella (5.9) tende a $+\infty$ e la disuguaglianza è contraddetta.

Se invece $x_0 = y_0$, moltiplichiamo la (5.9) per 2 e riscriviamola nella forma

$$g(u(z_j)) - g(u(x_j)) + g(u(z_j)) - g(u(y_j)) > 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Per il teorema del valor medio si ha:

$$g'(u(\xi_j)) u_{\nu_j}(\xi_j) \|x_j - y_j\| - g'(u(\eta_j)) u_{\nu_j}(\eta_j) \|x_j - y_j\| > 0,$$

per $j = 1, 2, \dots$, dove ξ_j è un opportuno punto fra x_j e z_j , η_j sta fra z_j e y_j , e ν_j è il versore $\nu_j = \frac{y_j - x_j}{\|y_j - x_j\|}$ (si ha $x_j \neq y_j$ per la (5.9)).

Applicando ancora il teorema del valor medio si trova:

$$- \left(g''(u(\zeta_j)) u_{\nu_j}^2(\zeta_j) + g'(u(\zeta_j)) u_{\nu_j \nu_j}(\zeta_j) \right) \|x_j - y_j\| \|\eta_j - \xi_j\| > 0,$$

per $j = 1, 2, \dots$, dove ζ_j è un opportuno punto fra ξ_j e η_j , disuguaglianza che, vista la (5.7), implica (per grandi j) la seguente:

$$u_{\nu_j}^2(\zeta_j) + \frac{g'(u(\zeta_j))}{g''(u(\zeta_j))} u_{\nu_j \nu_j}(\zeta_j) < 0. \quad (5.10)$$

Chiaramente $\lim_{j \rightarrow \infty} \zeta_j = x_0$. La successione dei versori $\{\nu_j\}$ ha una sottosuccessione convergente: supponiamo, per semplicità, che la stessa $\{\nu_j\}$ sia convergente, ed indichiamo con ν il versore limite.

Per ipotesi, Ω è strettamente convesso e su $\partial\Omega$ si ha $u = 0$ e $u_n < 0$, quindi nel caso che ν sia tangente si ha $u_{\nu\nu}(x_0) < 0$. Essendo (per piccoli u) $g''(u) > 0$ e $g'(u) < 0$, la (5.10) è contraddetta per j sufficientemente grande.

Nel caso invece che ν non sia tangente a $\partial\Omega$, si ha $u_\nu^2(x_0) > 0$ e, vista la condizione (5.8), la (5.10) è nuovamente contraddetta per $j \rightarrow +\infty$. ■

Un risultato analogo è stato provato, con una tecnica simile, in [16], lemma 3.2, sotto le ipotesi (5.6), (5.8) e le ulteriori condizioni

$$g'(u) < 0, \quad g''(u) > 0. \tag{5.11}$$

Anche se la (5.7) non è ivi assunta esplicitamente, essa è una immediata conseguenza delle altre ipotesi. Nella presente trattazione si sono lasciate cadere le condizioni (5.11) perché esse si possono ottenere, per piccoli u , dalla (5.6) e dalla (5.7), e ciò è sufficiente per la dimostrazione.

6. Le “grandi soluzioni”.

Alcuni autori stanno esplorando la possibilità di un approccio diretto per lo studio della convessità delle soluzioni v della (4.2) in un dominio limitato e convesso Ω , con la condizione

$$\lim_{x \rightarrow \partial\Omega} v(x) = +\infty, \tag{6.1}$$

denominate “grandi soluzioni”. Avendo in mente il principio di massimo stabilito col lemma 4.2, si tratta di trovare condizioni sulla v che implicino che la funzione di concavità $C(v; x, y)$ non è positiva vicino a $\partial(\Omega \times \Omega)$. Poniamo $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Un risultato in tal senso è il seguente:

Lemma 6.1. *Sia $v \in C^2(\Omega)$ una soluzione dell'equazione ellittica (4.2) in un dominio limitato e convesso Ω , con la condizione (6.1). I coefficienti $a^{ij}(Dv)$ siano localmente lipschitziani, e la funzione f sia continua, localmente lipschitziana rispetto a Dv e crescente in v . Sia inoltre f armonica concava rispetto a (x, v) . Supponiamo che esista una funzione convessa e decrescente $w: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ tale che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(v(x) - w(\delta(x)) \right) = l(x_0) \in \mathbf{R} \quad (6.2)$$

per ogni $x_0 \in \partial\Omega$. Allora v è convessa in Ω .

La dimostrazione del lemma 6.1 utilizza, oltre al citato principio di massimo, la seguente proprietà della già definita funzione distanza $\delta(x)$:

Proposizione 6.1. *Se $\Omega \subsetneq \mathbf{R}^n$ è convesso, allora la funzione $\delta(x)$ è concava.*

Dimostrazione. Siano x_1 e x_2 due punti di Ω . Gli insiemi $S_1 = \{x \mid \|x - x_1\| < \delta(x_1)\}$ e $S_2 = \{x \mid \|x - x_2\| < \delta(x_2)\}$ sono contenuti

in Ω . Per la convessità di Ω , anche il loro involucro convesso S è contenuto in Ω , quindi

$$\delta\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \text{dist}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \partial S\right) = \frac{\delta(x_1) + \delta(x_2)}{2}.$$

Per l'arbitrarietà di x_1 e x_2 la tesi è provata. ■

Dimostrazione del lemma 6.1. Mostriamo che $C(v; x, y)$ non è positiva vicino a $\partial(\Omega \times \Omega)$. Supponiamo, per assurdo, che esista una successione $\{(x_j, y_j)\}$ di punti di $\Omega \times \Omega$, tendente ad un $(x_0, y_0) \in \partial(\Omega \times \Omega)$ e tale che $C(v; x_j, y_j) \geq \epsilon > 0$ per ogni j . Il caso $x_0 \neq y_0$ si esclude con le stesse considerazioni svolte nella dimostrazione del lemma 5.2. Consideriamo quindi il caso $x_0 = y_0$. Essendo w convessa e decrescente, per la proposizione 6.1 si ha che $w(\delta(x))$ è convessa in Ω , quindi $C(w \circ \delta; x, y) \leq 0$ in $\Omega \times \Omega$. D'altra parte l'ipotesi (6.2) implica

$$\lim_{x, y \rightarrow x_0} \left(C(v; x, y) - C(w \circ \delta; x, y) \right) = 0,$$

quindi

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} \left(C(v; x_j, y_j) \right) \leq 0.$$

Per il lemma 4.2 la tesi è provata. ■

L'esistenza delle grandi soluzioni è stata studiata in [20], [31] e [1]. In quest'ultimo lavoro, inoltre, C. Bandle e M. Marcus studiano

l'unicità ed il comportamento asintotico di tali soluzioni. Il problema di trovare soddisfacenti condizioni che garantiscano l'esistenza di una funzione w avente le proprietà richieste dal lemma 6.1 è affrontato in [26] e [2]. In [2] si considera, in particolare, l'equazione:

$$\operatorname{div}(g(\|Dv\|)Dv) = f(v) \quad \text{in } \Omega, \quad (6.3)$$

con la condizione al contorno (6.1) e le ipotesi:

$$f \in C^1[t_0, +\infty), \quad f(t_0) = 0, \quad f'(t) > 0 \quad \text{per ogni } t > t_0, \quad (6.4)$$

$$g \in C^1[0, +\infty), \quad g(t) > 0, \quad G(t) = (g(t)t)' \geq c > 0 \quad \text{per ogni } t \geq 0. \quad (6.5)$$

Quest'ultima implica che la (6.3) è strettamente ellittica. Posto

$$F_\lambda(t) = \int_\lambda^t f(s)ds, \quad H(t) = \int_0^t sG(s)ds,$$

$$\psi_\lambda(t) = \int_t^{+\infty} \frac{1}{H^{-1}(F_\lambda(s))} ds, \quad \bar{\psi}_\lambda(t) = \int_t^{+\infty} \frac{1}{H^{-1}(F_\lambda(s)/n)} ds,$$

si prova il seguente risultato:

Teorema 6.1. (Cfr. [2], Th. 2.4). *Sia $v \in C^2(\Omega)$ una soluzione del problema (6.3), dove Ω è un dominio limitato e convesso avente la*

proprietà della sfera interna. Assumiamo le condizioni (6.1), (6.4) e (6.5), e supponiamo inoltre

$$\bar{\psi}_\lambda(t) < +\infty \text{ per ogni } t > \lambda \geq t_0 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \psi_{t_0}(t) = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f'(t)}{g\left(H^{-1}(F_{t_0}(t))\right)H^{-1}(F_{t_0}(t))} = +\infty,$$

$f(t)$ è convessa per $t \geq t_1 \geq t_0$,

$g \in C^2(t_1, +\infty)$ ed $\exists \beta \geq 1$ t.c. $G(t) \leq \beta G(s)$ per ogni $s > t \geq t_1$.

Allora la (6.2) vale per $l \equiv 0$ e $w(t) = \psi_{t_0}^{-1}(t)$.

Capitolo 3.

UNA STIMA DEL GRADIENTE

1. Risultati precedenti.

Sia Ω un dominio non contrattile di \mathbf{R}^n , $n \geq 2$, limitato internamente da una frontiera regolare Γ_1 ed esternamente da una frontiera regolare Γ_0 . Posto $q = \|Du\|$, sia $\psi(q^2)$ una funzione di classe C^1 . In un lavoro di L. E. Payne e G. A. Philippin del 1989 [33] si trovano alcuni risultati riguardanti il seguente problema:

$$(\psi(q^2)u_i)_i = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma_0} = 0, \quad u|_{\Gamma_1} = 1, \quad (1.2)$$

nell'ipotesi che la (1.1) sia un'equazione ellittica. Se ψ è una funzione positiva, la condizione

$$\psi(q^2) + 2q^2\psi'(q^2) > 0 \quad (1.3)$$

implica che la (1.1) è ellittica rispetto alla soluzione u . In particolare si studia il problema della capacità conforme, dato dalle (1.1)–(1.2) quando $\psi(q^2) = q^{n-2}$. In questo caso, posto

$$q_0 = \max_{\Gamma_0} q \quad \text{e} \quad q_1 = \max_{\Gamma_1} q, \quad (1.4)$$

si prova la disuguaglianza

$$q(x) \leq q_1^{u(x)} q_0^{1-u(x)}, \quad x \in \Omega. \quad (1.5)$$

Nel 1990 G. Porru e F. Ragnedda [35] hanno considerato l'equazione (1.1), per $\psi > 0$, riscritta nella forma

$$\left(e^{H(q^2)} u_i \right)_i = 0, \quad (1.6)$$

ovvero

$$\Delta u + 2h(q^2) u_i u_j u_{ij} = 0, \quad (1.7)$$

dove $h = \frac{dH}{dq^2}$ è una funzione regolare di q^2 , con la condizione di ellitticità

$$T(q^2) = 1 + 2q^2 h(q^2) > 0 \quad (1.8)$$

equivalente alla (1.3). In particolare essi provano il seguente risultato:

Teorema 1.1. ([35], Th. 3.1). *Sia u una soluzione classica del problema (1.6)–(1.2) e sia*

$$1 + 2q^2 \frac{T'}{T} - \frac{T}{n-1} \leq \gamma \quad (1.9)$$

per un opportuno numero reale γ . La funzione T è data dalla (1.8), e $T' = \frac{dT}{dq^2}$. Se q_0, q_1 sono come nella (1.4) allora si ha, in Ω :

$$q(x) \leq q_1^{u(x)} q_0^{1-u(x)} \quad \text{se } \gamma = 0, \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} q^\gamma(x) \leq q_1^\gamma u(x) + q_0^\gamma [1 - u(x)] & \text{se } \gamma > 0, \\ q^\gamma(x) \geq q_1^\gamma u(x) + q_0^\gamma [1 - u(x)] & \text{se } \gamma < 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Si noti che nel problema della capacità conforme risulta $1 + 2q^2 \frac{T'}{T} - \frac{T}{n-1} = 0$ e quindi si ritrova la (1.5).

In questo capitolo si estende il teorema 1.1 ad equazioni più generali della (1.6), aventi la forma

$$\left(e^{H(\rho^2)} u_i \right)_i = 0, \quad (1.12)$$

dove $\rho^2 = \alpha^i u_i u_i$ e $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ è una n -upla di numeri reali positivi. Ovviamente si riottiene la (1.6) quando tutti gli α^i sono uguali ad 1. I risultati principali dei paragrafi 2 e 3 riprendono un lavoro dell'autore del 1989 [14]. Il metodo usato consiste, come in [35], nel trovare funzioni $f(t)$ tali che $\phi(x) = q(x)f[u(x)]$ soddisfi il principio di massimo.

Si noti che, con la trasformazione lineare

$$x_i = \sqrt{\alpha^i} y_i,$$

la (1.12) diventa:

$$\left(\frac{1}{\alpha^i} e^{H(q^2)} u_{y_i} \right)_{y_i} = 0$$

dove $u_{y_i} = \frac{\partial u}{\partial y_i}$ e $q^2 = u_{y_i} u_{y_i}$, e quindi non si riottiene la (1.6).

Preferisco considerare la (1.12) riscritta come segue:

$$\Delta u + h(\rho^2)(\alpha^i + \alpha^j) u_i u_j u_{ij} = 0 \quad (1.13)$$

dove $h = \frac{dH}{d\rho^2}$. Evidentemente l'equazione (1.13) è del tipo:

$$a^{ij}(Du) u_{ij} = 0,$$

con coefficienti $a^{ij}(Du)$ dati da

$$a^{ij}(Du) = \delta^{ij} + h(\rho^2)(\alpha^i + \alpha^j) u_i u_j, \quad (1.14)$$

dove δ^{ij} è il delta di Kronecker. Supporremo h tale che la seguente matrice:

$$[\delta^{ij} + h(\alpha^i \xi_i^2)(\alpha^i + \alpha^j) \xi_i \xi_j]$$

sia definita positiva per ogni $\xi \in \mathbf{R}^n$, e che:

$$T(\rho^2) = 1 + 2\rho^2 h(\rho^2) > 0. \quad (1.15)$$

2. Un principio di massimo.

Lemma 2.1. ([14], lemma 2.1). *Sia $[a^{ij}]$ una matrice $n \times n$ reale e definita positiva, sia u una funzione $C^2(\Omega)$. Poniamo:*

$$\theta = \left[a^{ij} \left(\delta^{ij} - \frac{u_i u_j}{q^2} \right) \right]^{-1}$$

$$R = \frac{1}{2} (a^{ij} + a^{ji}) q_i u_j.$$

Allora, per ogni $x \in \Omega$, si ha:

$$a^{ij} u_{ki} u_{kj} \geq a^{ij} q_i q_j - 2 \frac{\theta R}{q} a^{ij} u_{ij} + \frac{\theta R^2}{q^2}. \quad (2.1)$$

Sussiste uguaglianza nella (2.1) se e solo se x è tale che:

$$\forall k \forall i \quad u_{ki} - \frac{u_k q_i}{q} + \frac{\theta R}{q} \left(\delta^{ki} - \frac{u_k u_i}{q^2} \right) = 0.$$

Dimostrazione. Poiché $[a^{ij}]$ è definita positiva, si ha $a^{ij} V^{ki} V^{kj} \geq 0$ per ogni matrice reale $[V^{ki}]$. Sussiste uguaglianza se e solo se $[V^{ki}]$ è la matrice nulla. Per $k, i = 1, \dots, n$ sia V^{ki} definito come segue:

$$V^{ki} = u_{ki} - \frac{u_k q_i}{q} + \frac{\theta R}{q} \left(\delta^{ki} - \frac{u_k u_i}{q^2} \right).$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
a^{ij}V^{ki}V^{kj} &= a^{ij}u_{ki}u_{kj} - \frac{1}{q}a^{ij}u_{ki}u_kq_j - \frac{1}{q}a^{ij}u_{kj}u_kq_i + \\
&+ \frac{\theta R}{q}a^{ij}u_{ki} \left(\delta^{kj} - \frac{u_ku_j}{q^2} \right) + \frac{\theta R}{q}a^{ij}u_{kj} \left(\delta^{ki} - \frac{u_ku_i}{q^2} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{q^2}a^{ij}u_kq_iu_kq_j - \\
&- \frac{\theta R}{q^2}a^{ij}u_kq_i \left(\delta^{kj} - \frac{u_ku_j}{q^2} \right) - \frac{\theta R}{q^2}a^{ij}u_kq_j \left(\delta^{ki} - \frac{u_ku_i}{q^2} \right) + \\
&+ \frac{\theta^2 R^2}{q^2}a^{ij} \left(\delta^{ki}\delta^{kj} - \frac{1}{q^2}\delta^{ki}u_ku_j - \frac{1}{q^2}\delta^{kj}u_ku_i + \frac{1}{q^4}u_ku_iu_ku_j \right).
\end{aligned}$$

Poiché $u_ku_k = q^2$ e $u_{ki}u_k = q_iq$ ($i = 1, \dots, n$), si ottiene:

$$\begin{aligned}
a^{ij}V^{ki}V^{kj} &= a^{ij}u_{ki}u_{kj} - a^{ij}q_iq_j + 2\frac{\theta R}{q}a^{ij}u_{ij} - \\
&- \frac{\theta R}{q^2}a^{ij}(u_jq_i + u_iq_j) + \frac{\theta^2 R^2}{q^2}a^{ij} \left(\delta^{ij} - \frac{u_iu_j}{q^2} \right).
\end{aligned}$$

Per la definizione di θ e R si ottiene:

$$a^{ij}V^{ki}V^{kj} = a^{ij}u_{ki}u_{kj} - a^{ij}q_iq_j + 2\frac{\theta R}{q}a^{ij}u_{ij} - \frac{\theta R^2}{q^2},$$

da cui segue il lemma. ■

Osservazione 2.1. Il lemma 2.1 resta valido anche se le componenti a^{ij} sono funzioni di x , a patto che la matrice $[a^{ij}]$ sia definita positiva per ogni $x \in \Omega$.

Corollario 2.1. ([14], Corollary). *Se u è una soluzione della (1.12) e la matrice $[a^{ij}]$ è data dalla (1.14), allora si ha, per ogni $x \in \Omega$:*

$$a^{ij}u_{ki}u_{kj} \geq a^{ij}q_iq_j + \frac{R^2}{(n-1)q^2}. \quad (2.2)$$

Dimostrazione. Si trova $\theta = \frac{1}{(n-1)}$, quindi il corollario segue dal lemma 2.1. ■

Teorema 2.1. ([14], Th. 2.1). *Sia u una soluzione classica di (1.12) e sia $[a^{ij}]$ come nella (1.14), dove h rende $[a^{ij}]$ definita positiva e soddisfa la (1.15). Se $f(t)$ è una funzione reale di classe C^2 e si pone:*

$$\phi(x) = q(x)f[u(x)] \quad (2.3)$$

allora si ha:

$$a^{ij}\phi_{ij} + W^j\phi_j \geq q^3T \left[f'' - \frac{(f')^2}{f} \left(2 + 2\rho^2 \frac{T'}{T} - \frac{T}{n-1} \right) \right] \quad (2.4)$$

dove $\phi_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$, T è data dalla (1.15), $T' = \frac{dT}{d\rho^2}$, $f' = \frac{df}{dt}$, e le W^j ($j = 1, \dots, n$) sono opportune funzioni, regolari dove q è maggiore di zero.

Dimostrazione. Poiché $a^{ij} = a^{ji}$ si ottiene:

$$a^{ij}\phi_{ij} = qa^{ij}f_{ij} + 2a^{ij}f_iq_j + fa^{ij}q_{ij}. \quad (2.5)$$

Calcoliamo tutti i termini al secondo membro della (2.5).

a) Derivando $f[u(x)]$ si ha $f_i = f'u_i$ e $f_{ij} = f''u_iu_j + f'u_{ij}$. Poiché $a^{ij}u_{ij} = 0$ e $a^{ij}u_iu_j = q^2T$ si trova:

$$a^{ij}f_{ij} = f''q^2T. \quad (2.6)$$

b) Per la (2.3) si ha $\phi_j = qf'u_j + q_jf$, quindi:

$$q_j = \frac{\phi_j}{f} - \frac{qu_jf'}{f}. \quad (2.7)$$

Di conseguenza si trova:

$$a^{ij}f_iq_j + W^{1j}\phi_j = -q^3T\frac{(f')^2}{f}, \quad (2.8)$$

dove $W^{1j} = -\frac{a^{ij}u_if'}{f}$.

c) Per le identità:

$$q_iq_j + qq_{ij} = \frac{1}{2}(q^2)_{ij} = u_{kij}u_k + u_{ki}u_{kj}$$

si ha:

$$a^{ij}q_{ij} = q^{-1}a^{ij}u_{kij}u_k + q^{-1}a^{ij}u_{kji}u_k - q^{-1}a^{ij}q_iq_j. \quad (2.9)$$

Siccome $a^{ij}u_{ij} = 0$, usando l'uguaglianza $\alpha^i u_{ij} u_i = \rho_j \rho$, si ottiene:

$$\begin{aligned} a^{ij}u_{ijk}u_k &= -\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_k}u_{ij}u_k = \\ &= -2h'\rho\rho_k(\alpha^i + \alpha^j)u_iu_ju_{ij}u_k - h(\alpha^i + \alpha^j)(u_{ik}u_j + u_iu_{jk})u_{ij}u_k = \\ &= -4h'\rho^2(\rho_i u_i)^2 - 2hq^2\alpha^i q_i q_i - 2hq\rho q_i \rho_i, \end{aligned}$$

dove $h' = \frac{dh}{d\rho^2}$. Usando l'ultima uguaglianza, e la (2.2), si ottiene:

$$a^{ij}q_{ij} \geq -4h'q^{-1}\rho^2(\rho_i u_i)^2 - 2hq\alpha^i q_i q_i - 2h\rho q_i \rho_i + \frac{R^2}{(n-1)q^3}. \quad (2.10)$$

Stabiliamo le seguenti uguaglianze al fine di esprimere tutti i termini che compaiono nella (2.10). Per la

$$\rho\rho_i u_i = \alpha^j u_{ji} u_j u_i = q\alpha^j q_j u_j \quad (2.11)$$

e la (2.7) si ottiene:

$$\rho\rho_i u_i = W^{2j}\phi_j - q^2\rho^2\frac{f'}{f} \quad (2.12)$$

per opportune funzioni W^{21}, \dots, W^{2n} ; si ha inoltre:

$$\rho q_i \rho_i = W^{3j} \phi_j + q^3 \rho^2 \frac{(f')^2}{f^2} \quad (2.13)$$

per opportune funzioni W^{31}, \dots, W^{3n} ;

$$q \alpha^i q_i q_i = W^{4j} \phi_j + q^3 \rho^2 \frac{(f')^2}{f^2} \quad (2.14)$$

per opportune funzioni W^{41}, \dots, W^{4n} ;

$$q \rho_i u_i - \rho q_i u_i = W^{5j} \phi_j \quad (2.15)$$

per opportune W^{51}, \dots, W^{5n} . Infine, diamo un'utile espressione di R . Poiché si ha:

$$a^{ij} u_i = u_j (1 + h \rho^2 + h q^2 \alpha^j) = a^{jk} u_k,$$

si ottiene:

$$R = \frac{1}{2} (a^{ij} + a^{ji}) q_i u_j = q_i u_i (T + q^2 h \alpha^i - \rho^2 h).$$

Quest'ultima e la (2.11) danno:

$$R = q_i u_i T + h \rho (q \rho_i u_i - \rho q_i u_i). \quad (2.16)$$

Sostituendo le (2.12), ..., (2.16) nella (2.10) si ottiene:

$$\begin{aligned}
& a^{ij}q_{ij} + W^{6j}\phi_j \geq \\
& \geq -4h'q^3\rho^4\frac{(f')^2}{f^2} - 4hq^3\rho^2\frac{(f')^2}{f^2} + q^3T^2\frac{(f')^2}{(n-1)f^2} = \\
& = q^3\frac{(f')^2}{f^2}\left(-2\rho^2(2h'\rho^2 + 2h) + \frac{T^2}{n-1}\right) = \\
& = q^3T\frac{(f')^2}{f^2}\left(-2\rho^2\frac{T'}{T} + \frac{T}{n-1}\right). \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Infine, sostituendo le (2.6), (2.8) e (2.17) nella (2.5) si ha:

$$\begin{aligned}
& a^{ij}\phi_{ij} + W^j\phi_j \geq \\
& \geq q^3T\left[f'' - 2\frac{(f')^2}{f} + \frac{(f')^2}{f}\left(-2\rho^2\frac{T'}{T} + \frac{T}{n-1}\right)\right] = \\
& = q^3T\left[f'' - \frac{(f')^2}{f}\left(2 + 2\rho^2\frac{T'}{T} - \frac{T}{n-1}\right)\right],
\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ■

3. Un'applicazione.

Sia Ω un dominio non contrattile di \mathbf{R}^n , limitato esternamente da una frontiera regolare Γ_0 , ed internamente da una frontiera interna regolare Γ_1 . Sia u una soluzione classica di:

$$\begin{cases} \Delta u + h(\rho^2)(\alpha^i + \alpha^j)u_i u_j u_{ij} = 0 \\ u|_{\Gamma_0} = 0, \quad u|_{\Gamma_1} = 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

dove $\rho^2 = \alpha^j u_j u_j$, $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ sono costanti positive, h è una funzione regolare tale che $T(\rho^2) = 1 + 2\rho^2 h(\rho^2) > 0$ e la (3.1) è ellittica. Siano $q = \|Du\| = (u_j u_j)^{\frac{1}{2}}$, $q_0 = \max_{x \in \Gamma_0} q(x)$, $q_1 = \max_{x \in \Gamma_1} q(x)$. Definiamo una funzione $g: \mathbf{R} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ ponendo:

$$g(\gamma, x) = \begin{cases} \left\{ q_1^\gamma u(x) + q_0^\gamma [1 - u(x)] \right\}^{\frac{1}{\gamma}}, & \gamma \neq 0, \\ q_1^{u(x)} q_0^{1-u(x)}, & \gamma = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Tale funzione è positiva, continua in x e in γ e crescente in γ (v. paragrafo 4). Poiché si ha:

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} g(\gamma, x) = \max(q_0, q_1), \quad (3.3.a)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} g(\gamma, x) = \min(q_0, q_1), \quad (3.3.b)$$

estendiamo la definizione di g per continuità:

$$g(+\infty, x) = \max(q_0, q_1), \quad (3.4.a)$$

$$g(-\infty, x) = \min(q_0, q_1). \quad (3.4.b)$$

Teorema 3.1. (Cfr. [14], Th. 3.1). *Se u è una soluzione classica di (3.1), posto*

$$\gamma = \sup_{\rho^2 \geq 0} \left(1 + 2\rho^2 \frac{T'}{T} - \frac{T}{n-1} \right), \quad (3.5)$$

dove $T' = \frac{dT}{d\rho^2}$, si ha, per ogni $x \in \Omega$:

$$q(x) \leq g(\gamma, x). \quad (3.6)$$

Dimostrazione. Se $\gamma = +\infty$, per la (3.4.a) la formula (3.6) diventa:

$$q(x) \leq \max(q_0, q_1), \quad (3.7)$$

che è il principio di massimo per q e può essere provato scegliendo identicamente uguale ad 1 la funzione arbitraria f del teorema 2.1.

Se $\gamma < +\infty$, particolarizziamo f ponendo:

$$f(t) = \begin{cases} \left\{ \left[\left(\frac{q_1}{q_0} \right)^\gamma - 1 \right] t + 1 \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} & \text{se } \gamma \neq 0, \\ \left(\frac{q_0}{q_1} \right)^t & \text{se } \gamma = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Un semplice calcolo mostra che la funzione f così definita è continua rispetto al parametro γ anche per $\gamma = 0$. Con questa scelta di f il secondo membro della (2.4) è non negativo e quindi la funzione ϕ del teorema 2.1 soddisfa il principio di massimo (teorema 0.1 ed osservazione 0.4), quindi:

$$\max_{\Omega} \phi \leq \max_{\partial\Omega} \phi.$$

Per la definizione di ϕ (2.3) si trova $\max_{\partial\Omega} \phi = q_0$, e quindi la (3.6). ■

4. Appendice.

La maggiorazione (3.6) vale per qualunque valore di γ soddisfacente la relazione

$$1 + 2\rho^2 \frac{T'}{T} - \frac{T}{n-1} \leq \gamma \quad (4.1)$$

(cfr. [35], Th. 3.1 e [14], Th. 3.1).

In quanto segue si mostra che la funzione g definita con la (3.2), e che compare nella (3.6), è crescente in γ , e quindi con un più grande valore di γ si ottiene una maggiorazione meno stretta nella (3.6). Il valore ottimale di γ è dunque dato dalla (3.5).

Siano dunque q_0, q_1, u , numeri reali positivi con $u < 1$. Sia $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione positiva, definita come segue:

$$g(t) = \begin{cases} [q_1^t u + q_0^t (1-u)]^{\frac{1}{t}}, & t \neq 0, \\ q_1^u q_0^{1-u}, & t = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Lemma 4.1. *La funzione g definita dalla (4.2) è derivabile per ogni $t \in \mathbf{R}$, e per $t = 0$ la derivata $g'(0)$ è data da:*

$$g'(0) = \frac{1}{2} q_1^u q_0^{1-u} u(1-u) (\log q_0 - \log q_1)^2.$$

Dimostrazione. La derivabilità di g per $t \neq 0$ è evidente, ed un semplice calcolo mostra che g è almeno continua in $t = 0$.

Ora calcoleremo $g'(0)$ come $\lim_{t \rightarrow 0} g'(t)$. Sia $r = \frac{q_0}{q_1}$ e scriviamo g nella forma:

$$g(t) = \begin{cases} q_1 [u + r^t(1-u)]^{\frac{1}{t}} & \text{se } t \neq 0, \\ q_1^u q_0^{1-u} & \text{se } t = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Derivando la funzione composta si trova:

$$g'(t) = g(t) \left(\frac{(1-u)r^t \log r}{t[u + r^t(1-u)]} - \frac{1}{t^2} \log[u + r^t(1-u)] \right). \quad (4.4)$$

Quando t tende a zero, $g(t)$ tende a $g(0)$, perciò restringiamo la nostra attenzione al termine tra parentesi nella (4.4), che è meglio scrivere come un'unica frazione:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-u)r^t \log r}{t[u + r^t(1-u)]} - \frac{1}{t^2} \log[u + r^t(1-u)] = \\ & = \frac{t(1-u)r^t \log r - [u + r^t(1-u)] \log[u + r^t(1-u)]}{t^2[u + r^t(1-u)]}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Poiché $[u + r^t(1 - u)] \rightarrow 1$, applichiamo la regola di de l'Hôpital ed otteniamo:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(1-u)r^t \log r - [u + r^t(1-u)] \log[u + r^t(1-u)]}{t^2} = \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}(1-u)r^t \log^2 r - \frac{1}{2}(1-u)r^t \log r \frac{\log[u + r^t(1-u)]}{t} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ancora con la regola di de l'Hôpital si trova:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log[u + r^t(1-u)]}{t} = (1-u) \log r. \quad (4.7)$$

Sostituendo la (4.7) nella (4.6) e richiamando la (4.5) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{(1-u)r^t \log r}{t[u + r^t(1-u)]} - \frac{1}{t^2} \log[u + r^t(1-u)] \right) = \\ & = \frac{1}{2}u(1-u) \log^2 r. \end{aligned} \quad (4.8)$$

La precedente uguaglianza, la (4.3) e la (4.4) danno la tesi. ■

Lemma 4.2. *Se $q_0 = q_1$ allora g è costante ed assume identicamente il valore $g(t) \equiv q_0 = q_1$. Se $q_0 \neq q_1$ allora $g'(t)$ è positiva per ogni $t \in \mathbf{R}$.*

Dimostrazione. La prima parte del lemma segue dalla definizione di g (4.2). Per provare la seconda parte osserviamo anzitutto che,

se $q_0 \neq q_1$, il lemma 4.1 mostra che $g'(0) > 0$. Per $t \neq 0$, vista la positività di g , le relazioni (4.4) e (4.5) implicano che il segno di $g'(t)$ è lo stesso della seguente funzione:

$$\tilde{g}(t) = t(1-u)r^t \log r - [u + r^t(1-u)] \log[u + r^t(1-u)]. \quad (4.9)$$

Lo studio del segno di $\tilde{g}(t)$ risulta più comodo mediante il cambio di variabile:

$$y(t) = u + r^t(1-u), \quad (4.10)$$

che trasforma il dominio $\mathbf{R} - \{0\}$ nel dominio $D = (u, 1) \cup (1, +\infty)$ e porge:

$$\tilde{g}(y) = (y-u) \log \frac{y-u}{1-u} - y \log y. \quad (4.11)$$

Un semplice studio di funzione prova che $\tilde{g}(y)$ è positiva su D , quindi $g(t)$ è positiva su $\mathbf{R} - \{0\}$. La dimostrazione è conclusa. ■

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. BANDLE, M. MARCUS, *'Large' solutions of semilinear elliptic equations: existence, uniqueness and asymptotic behaviour*, in corso di stampa su J. Anal. Math.
- [2] C. BANDLE, G. PORRU, *Asymptotic behaviour and convexity of large solutions to nonlinear equations*, manoscritto.
- [3] H. BERESTYCKI, L. NIRENBERG, *Monotonicity, symmetry and antisymmetry of solutions of semilinear elliptic equations*, J. Geom. Phys. **5** (1988), 237-275.
- [4] S. BERNSTEIN, *Sur la nature analitique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Math. Ann. **59** (1904), 20-76.
- [5] H. J. BRASCAMP, E. H. LIEB, *On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log-concave functions, and with an application to the diffusion equation*, J. Funct. Anal. **22** (1976), 366-389.
- [6] L. A. CAFFARELLI, A. FRIEDMAN, *Convexity of solutions of semilinear equations*, Duke Math. J. **52** (1985), 431-456.
- [7] L. A. CAFFARELLI, J. SPRUCK, *Convexity properties of solutions to some classical variational problems*, Comm. Partial Differential Equations **7** (1982), 1337-1379.
- [8] P. CONCUS, R. FINN, *On capillary free surfaces in the absence of gravity*, Acta Math. **132** (1974), 177-198.

- [9] P. CONCUS, R. FINN, *On capillary free surfaces in a gravitational field*, Acta Math. **132** (1974), 207-223.
- [10] R. FINN, *A note on the capillary problem*, Acta Math. **132** (1974), 199-205.
- [11] R. FINN, *Capillary surfaces: a partly historical survey*, Sympos. Math. **30** (1989), 45-71.
- [12] B. GIDAS, W.-M. NI, L. NIRENBERG, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Commun. Math. Phys. **68** (1979), 209-243.
- [13] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag (1983).
- [14] A. GRECO, *A maximum principle for some second order elliptic semilinear equations*, Rend. Sem. Fac. Sci. Cagliari **59**(2) (1989), 147-154.
- [15] A. GRECO, *Monotonicity of solutions to a certain class of elliptic equations*, manoscritto.
- [16] A. GRECO, G. PORRU, *Convexity of solutions to some elliptic partial differential equations*, SIAM J. Math. Anal. **24**(4) (1993), 833-839.
- [17] E. HOPF, *A remark on linear elliptic differential equations of the second order*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 791-793.
- [18] E. HOPF, *Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Berlin Sber. Preuss. Akad. Wiss. **19** (1927), 147-152.

- [19] B. KAWOHL, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Lecture Notes in Math. 1150, Springer-Verlag (1985).
- [20] J. B. KELLER, *On solutions of $\Delta u = f(u)$* , Commun. Pure Appl. Math. **10** (1957), 503-510.
- [21] A. KENNINGTON, *An improved convexity maximum principle and some applications*, Thesis, Adelaide, Feb. 1984.
- [22] N. J. KOREVAAR, *Capillary surface convexity above convex domains*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), 73-82.
- [23] N. J. KOREVAAR, *Convex solutions to nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), 603-614.
- [24] N. J. KOREVAAR, *Convexity of level sets for solutions to elliptic ring problems*, Comm. Partial Differential Equations **15**(4) (1990), 541-556.
- [25] N. J. KOREVAAR, J. LEWIS, *Convex solutions to certain elliptic partial differential equations have constant rank Hessians*, Arch. Rat. Mech. Anal. **97** (1987), 19-32.
- [26] A. C. LAZER, P. J. MC KENNA, *Asymptotic behaviour of solutions of boundary blow up problems*, manoscritto.
- [27] L. LICHTENSTEIN, *Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Unendliche Folgen positiver Lösungen*, Rend. Circ. Mat. Palermo **33** (1912), 201-211.
- [28] L. LICHTENSTEIN, *Neue Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Math. Z. **20** (1924), 194-212.

- [29] P. L. LIONS, *Two geometrical properties of solutions of semi-linear problems*, Appl. Anal. **12** (1981), 267-272.
- [30] M. LONGINETTI, *Some isoperimetric inequalities for the level curves of capacity and Green's functions on convex plane domains*, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), 337-389.
- [31] R. OSSERMAN, *On the inequality $\Delta u \geq f(u)$* , Pacific J. Math. **7** (1957), 1641-1647.
- [32] L. E. PAYNE, G. A. PHILIPPIN, *On some maximum principles involving harmonic functions and their derivatives*, SIAM J. Math. Anal. **10** (1979), 96-104.
- [33] L. E. PAYNE, G. A. PHILIPPIN, *On the conformal capacity problem*, Sympos. Math. **30** (1989), 119-136.
- [34] E. PICARD, *Traité d'Analyse II*, 2^e ed., Parigi (1905).
- [35] G. PORRU, F. RAGNEDDA, *Convexity properties for solutions of some second order elliptic semilinear equations*, Appl. Anal. **37** (1990), 1-18.
- [36] M. H. PROTTER, H. F. WEINBERGER, *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1967).

Impaginata il giorno 13-10-1995.