ESERCITAZIONE N. 3: CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI
ANALISI MATEMATICA 1 - A.A. 2023/2024

FRANCESCO CANNAS AGHEDU

(1) Sia $f(x)$ la funzione definita nell'intervallo $(0;2)$ da
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$
Dire se $f(x)$ è continua in $(0;2)$ e tracciare il suo grafico.

(2) Sia $f(x)$ la funzione definita in $\mathbb{R}$ da
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4 & \text{se } x < -2 \\ x^2 - 1 & \text{se } -2 \leq x < 2 \\ 3 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$
Dire se $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$ e tracciare il suo grafico.

(3) Sia $f(x)$ la funzione definita in $\mathbb{R}$ da
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$
Stabilire se $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$.

(4) Determina i valori del parametro a in modo che le seguenti funzioni siano continue in $\mathbb{R}$:
$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ e^{x-1} - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} 2a - \cos x & \text{se } x < \pi \\ 2\sin x + a & \text{se } x \geq \pi \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{a \sin x}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 2a + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

(5) Determina i valori dei parametri a e b in modo che la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$ da
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases},$$
sia continua in $\mathbb{R}$.

(6) Spiega perché, per le funzioni rappresentate in Figura 1, non vale il Teorema di Weirstrass negli intervalli indicati.

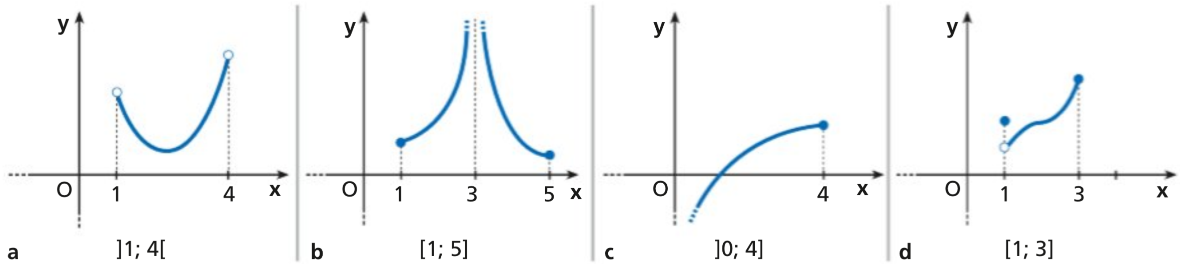

FIGURA 1.

(7) Stabilisci se vale il Teorema di Weirstrass nell'intervallo $[-1; 3]$ per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

(8) Considera i grafici in Figura 2.

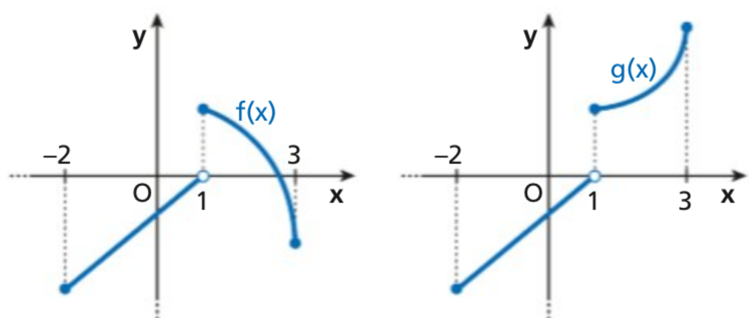

FIGURA 2.

(a) Entrambe le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ non soddisfano le ipotesi del Teorema dei valori intermedi nell'intervallo $[-2; 3]$. Perché?
(b) Per una delle due funzioni, $f(x)$ o $g(x)$, vale comunque la tesi del teorema. Indica quale e giustifica la risposta.

(9) Stabilisci se vale il Teorema di esistenza degli zeri per la funzione $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 - 1}$ nell'intervallo $[-1/2; 1/2]$.

(10) Una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $(1; 3)$. Inoltre si sa che $f(1) = -2$ e $f(3) = 2$. Mostra con un esempio grafico che l'equazione $f(x) = 0$ può non avere soluzioni in $(1; 3)$. Questo contraddice il Teorema di esistenza degli zeri?

(11) Trova e classifica i punti di singolarità della seguente funzione in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x - 4} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

(12) Per ciascun grafico in Figura 3 classifica la discontinuità nel punto x_0.

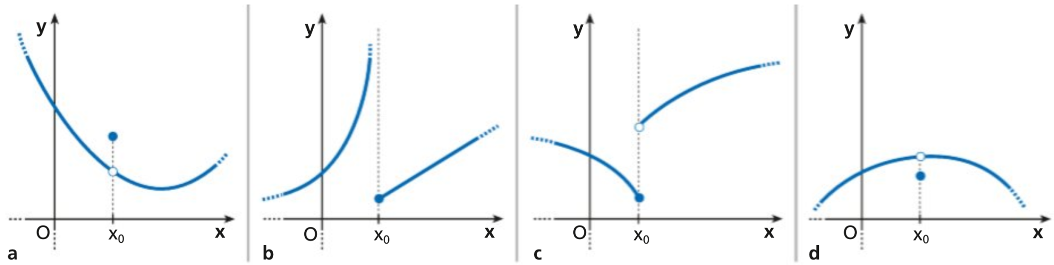

FIGURA 3.

(13) Trova e classifica i punti di discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{|x^2-9|} & \text{se } x \neq -3 \wedge x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = -3 \vee x = 3 \end{cases}$$

nel suo dominio.

(14) Trova e classifica i punti di singolarità della funzione $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ in $\mathbb{R}$.

(15) Trova e classifica i punti di singolarità della funzione $f(x) = \dfrac{1+\sin x}{x+1}$ in $\mathbb{R}$.

(16) Trova e classifica i punti di discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|} & \text{se } x \neq -1 \\ 0 & \text{se } x = -1, \end{cases}$$

nel suo dominio.

(17) Trova e classifica i punti di discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

nel suo dominio.

(18) Trova e classifica i punti di discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\ln(1+x^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

nel suo dominio.

(19) Trova e classifica i punti di discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x+|x|}{x^2}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

nel suo dominio.

Riferimenti bibliografici

[1] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.verde 4A**. Zanichelli (2022)
[2] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.verde 4B**. Zanichelli (2022)
[3] Conti M., Ferrario D. L., Terracini S., Verzini G. **Analisi matematica. Dal calcolo all'analisi, Vol 1**. Apogeo (2006)
[4] Dodero N., Baroncini P., Manfredi R. **Lineamenti di Matematica B**. Ghisetti e Corvi editori (1999)
[5] Marcellini P., Sbordone C. **Elementi di Analisi Matematica 1**. Liguori Editore (2016)
[6] Marcellini P., Sbordone C. **Esercitazioni di Matematica. Primo volume, parte prima.** Liguori Editore (1987)
[7] Marcellini P., Sbordone C. **Esercitazioni di Matematica. Secondo volume, parte prima.** Liguori Editore (1989)

Ingegneria dell'Energia Elettrica per lo Sviluppo Sostenibile, Università degli Studi di Cagliari
Email address: `francesco.cannasa@unica.it`