Conseguenze del Teorema di Lagrange

1) Criterio di monotonia

Sia $f(x):[a,b]\to R$, continua in $[a,b]$, e derivabile in (a,b).

Allora:

f è crescente in $[a,b] \Leftrightarrow f'(x)\geq 0 \quad \forall x\in[a,b]$

f è decrescente in $[a,b] \Leftrightarrow f'(x)\leq 0 \quad \forall x\in[a,b]$

Conseguenze del Teorema di Lagrange, Criterio di monotonia

Dimostrazione.

Sia $f'(x)\geq 0$ e siano $x_1,x_2\in[a,b]$ con $x_2>x_1$

Per il Teorema di Lagrange $\exists x_0\in(x_1,x_2):$

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(x_0)(x_2-x_1)$$

ma $f'(x_0)\geq 0$ e $x_2-x_1>0$

$\Rightarrow f(x_2)\geq f(x_1)$

Conseguenze del Teorema di Lagrange, Criterio di monotonia

Viceversa.

Sia $f(x)$ *crescente in* $[a,b]$.

Allora $\forall x, x+h \in (a,b)$, *si ha*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

Facendo il limite per $h \to 0$ *si ha*

$$f'(x) \geq 0$$

Analoga dimostrazione per

f *è decrescente in* $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \ \forall x \in [a,b]$

Conseguenze del Teorema di Lagrange, Criterio di monotonia

Analoga dimostrazione per

f *è decrescente in* $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \ \forall x \in [a,b]$

Si ha inoltre

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ *strettamente crescente*

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ *strettamente decrescente*

Conseguenze del Teorema di Lagrange

2) Sia $f(x)\colon[a,b]\to R$*, derivabile in* (a,b).

$$f \text{ è costante} \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

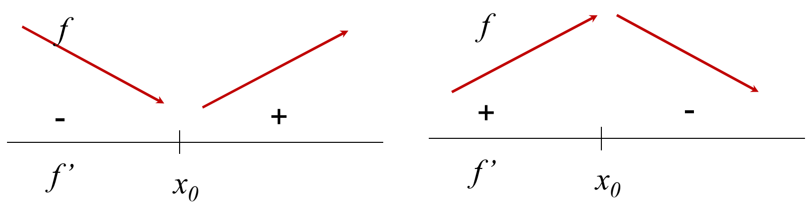
3) Sia $x_0 \in (a,b)$ *e* $f'(x_0) = 0$

Se esiste un intorno destro (sinistro), in cui $f'(x) > 0$

e un intorno sinistro (destro) in cui $f'(x) < 0$,

allora x_0 *è un punto di minimo (massimo) relativo.*

Conseguenze del Teorema di Lagrange



x_0 *minimo relativo* $\qquad$ x_0 *massimo relativo*

Esercizio

Determinare i punti di massimo o di minimo relativo per la funzione $f(x) = x^3 - 12x$

Esercizio

Determinare un intervallo in cui $f(x) = \frac{2+\cos x}{2-\cos x}$

è crescente

Teorema di Cauchy

Siano $f, g : [a,b] \to R:$

i) f e g sono continue in $[a,b]$;

ii) f e g sono derivabili in (a,b).

Allora se $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a,b), \quad \exists x_0 \in (a,b):$

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Teorema di Cauchy

Dimostrazione.

Si consideri la funzione ausiliaria

$$\varphi(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)) \right]$$

Essendo $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a,b),$

allora $g(b) \neq g(a).$

Teorema di Cauchy

Inoltre

i) $\varphi(x)$ *è continua in* $[a,b]$;

ii) $\varphi(x)$ è *derivabile in* (a,b);

iii) $\varphi(a)=\varphi(b)$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b):\ \varphi'(x_0)=0$$

cioè

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Teorema di de l'Hopital

Siano $f(x)$, $g(x)$ *derivabili in* $[a,b]-\{x_0\}$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0 \quad \textit{oppure} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$$

Se esiste il limite $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda$ *finito o infinito*

Allora $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

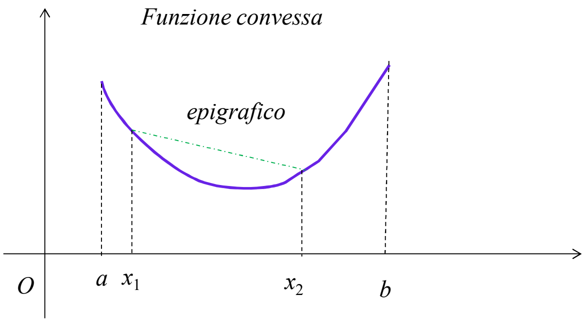
Il teorema è valido anche per $x\to x_0^+$ *o* $x\to x_0^-$,
e per $x\to\pm\infty$ *(f e g derivabili in intervalli illimitati)*

Esercizio
Calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$

Esercizio
Calcolare il limite $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\ln(1+x^2)}$

Esercizio
Calcolare il limite $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$

Funzioni convesse e concave

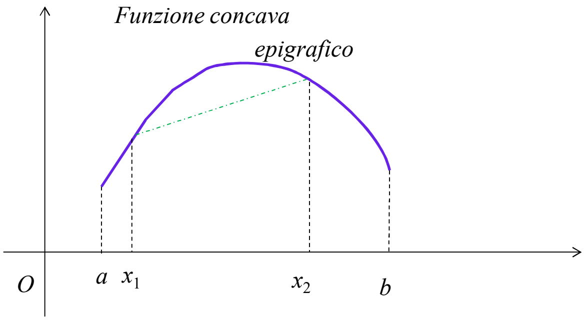


Definizione
Sia $f(x):[a,b] \to R$, *si chiama epigrafico (o sopragrafico) di* f *l'insieme*

$$epi\,f := \{(x,y) \in R^2 : x \in [a,b] \ e \ y \geq f(x)\}.$$

f *è convessa in* $[a,b]$ *se il suo epigrafico è un insieme convesso*

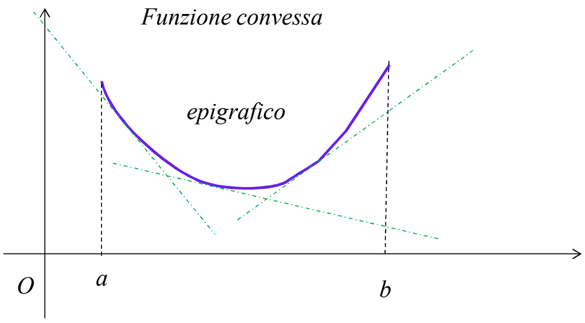
Funzioni convesse e concave



Analogamente:

f è concava in [a,b] se il suo epigrafico è un insieme concavo

Funzioni convesse e concave



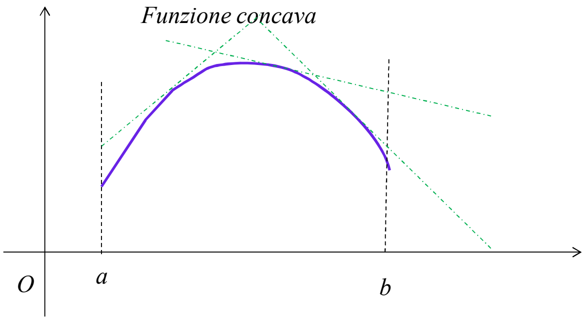
Definizione

Sia f(x) derivabile in [a,b],

f è convessa in [a,b] $\Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),\ \forall x, x_0 \in [a,b]$

Cioè $\forall x_0$ *il grafico di f sta al di sopra della retta tangente ad f(x) in* $(x_0, f(x_0))$

Funzioni convesse e concave



Definizione

Sia $f(x)$ derivabile in $[a,b]$,

f è concava in $[a,b]$ $\Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),\ \forall x, x_0 \in [a,b]$

Cioè $\forall x_0$ il grafico di f sta al di sotto della retta tangente ad $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$

Criterio di convessità

Sia f:[a,b]→R,

a) *Se f è derivabile in (a,b) allora*

$$f \text{ è convessa (concava)} \Leftrightarrow f'(x) \text{ è crescente (decrescente)}$$

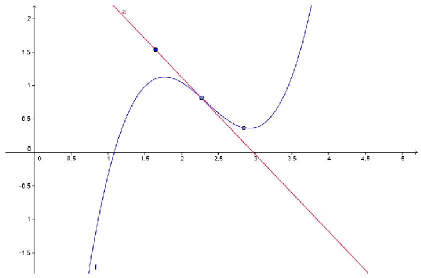
b) *Se f è derivabile due volte in (a,b)* allora

$$f \text{ è convessa (concava)} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \ (f''(x) \leq 0), \quad \forall x \in (a,b)$$

FLESSO Definizione.

Sia f:(a,b)→R e $x_0 \in (a,b)$ un punto di derivabilità per $f(x)$ oppure $f'(x_0) = \pm\infty$.

x_0 si dice di flesso se esiste un intorno destro di x_0 in cui f è convessa (concava) ed un intorno sinistro in cui f è concava (convessa).



Se x_0 è di flesso per f, ed esiste $f''(x_0)$, allora

$$f''(x_0) = 0$$

Esercizio

Calcolare i punti di estremo e i punti di flesso della funzione $f(x)=x^3 + 2x$

Studio del grafico di f(x)

1) *Dominio di f(x),*
2) *Simmetrie*
3) *intersezioni con gli assi cartesiani*
4) *Positività*
5) *Limiti agli estremi del dominio (eventuali asintoti)*
6) *Studio della derivata prima (crescenza, decrescenza, punti di estremo locale)*
7) *Studio della derivata seconda: Concavità e convessità, flessi*

Studio del grafico di f(x), Asintoti

Se esiste una retta di equazione y=mx+q:

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(mx+q)\}=0$$

Allora y=mx +q si definisce asintoto obliquo per f(x).

Si ha

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}; \qquad q=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx$$

Studio del grafico di $f(x)$, Asintoti

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = l,\quad y = l$ *si chiama asintoto orizzontale*

Se l'asintoto orizzontale non c'è (il limite sopra è infinito) allora potrebbe esserci quello obliquo.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,\quad x = x_0$ *si chiama asintoto verticale*

con x_0 *punto di accumulazione per* f

Esercizio

Si disegni il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$

Esercizio
Si disegni il grafico della funzione $f(x) = xe^x$