Derivata di una funzione

Massimo e minimo assoluti

Definizione

Sia $f:[a,b]\to R$, *si dice che M è* *massimo assoluto* (*o* *globale*) *di f in* $[a,b]$ *e* $x_0 \in [a,b]$ *è punto di massimo se*

$$f(x_0) = M \geq f(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

In modo analogo:

Si dice che m è un *minimo assoluto* (*o* *globale*) *di f in* $[a,b]$ *e* $x_1 \in [a,b]$ *è punto di minimo se*

$$f(x_1) = m \leq f(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

Derivata di una funzione

Massimo e minimo relativi (o estremi locali)

Definizione

Sia $f:[a,b]\to R$, *si dice che* $x_0 \in [a,b]$ *è un punto di* *massimo relativo* (*o* *locale*) *per f(x) se* $\exists I(x_0,\delta)$:

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in I(x_0,\delta)$$

In modo analogo:

Si dice che $x_1 \in [a,b]$ *è un punto di* *minimo relativo* (*o* *locale*) *per* $f(x)$ se $\exists I(x_1,\delta)$:

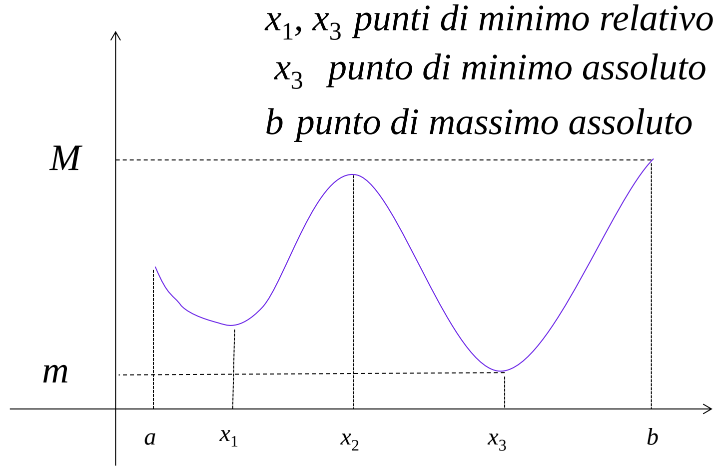
$$f(x_1) \leq f(x), \quad \forall x \in I(x_1,\delta)$$

a, b, x_2 punti di massimo relativo

x_1, x_3 punti di minimo relativo

x_3 punto di minimo assoluto

b punto di massimo assoluto



x è di max o min relativo in un <u>intorno di x</u>. (la relazione $\geq$ o $\leq$ vale solo in I

Punti Stazionari

Def. *I punti in cui $f(x)$ ha derivata nulla ($f'(x) = 0$)*

Si dicono punti stazionari o critici.

Teorema di Fermat

Sia f(x) definita in $[a,b]$ *e derivabile in* $x_0 \in (a,b)$. *Se* x_0 *è un punto di estremo locale allora*

$$f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione

Sia x_0 *un punto di massimo relativo, cioè* $\exists I(x_0, \delta)$:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h), \quad \forall h: \ |h| < \delta$$

si ha:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & se \quad 0 < h < \delta \\ \geq 0 & se \quad -\delta < h < 0 \end{cases}$$

Teorema di Fermat (Dimostrazione)

e

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \leq 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) \geq 0$$

Ma essendo f(x) derivabile in x_0:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Teorema di Fermat (Dimostrazione)

Se $x_0 = a$ *allora* $0 < h < \delta$ *e se* x_0 *è un punto di massimo relativo si ha*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \le 0$$

Mentre, nel caso di minimo relativo in $x_0 = a$:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \ge 0$$

In modo analogo: se $x_0 = b$ *è punto di massimo relativo (con* $-\delta < h < 0$ *) allora* $f'(b) \ge 0$,

se invece $x_0 = b$ *è un punto di minimo relativo, allora* $f'(b) \le 0$

Esercizio
Calcolare i punti critici per f(x) classificare i punti di non derivabilità

$$f(x) = x\sqrt[3]{x+1}$$

Esercizio
Calcolare i punti critici per f(x) classificare i punti di non derivabilità

$$f(x) = x\,|\ln x|$$

Esercizio
Calcolare la derivata di $f(x) = x^{\ln x}$

Teorema di Rolle

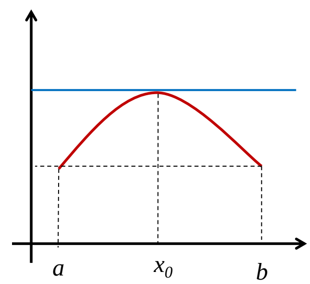
Sia $f:[a,b]\to R$.

i) f *è continua in* $[a,b]$,

ii) f *è derivabile in,*(a,b)

iii) $f(a)= f(b)$

Allora $\exists\ x_0\in(a,b):\ f'(x_0)=0$



Per il Teorema di Rolle esiste almeno un punto a tangente orizzontale

Teorema di Rolle

Dimostrazione.

Per il Teorema di Weierstrass, f *ha massimo e minimo assoluti in* $[a,b]$ ($x_1,x_2\in[a,b]$):

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2).$$

Se uno dei due è interno ad $[a,b]$, *per es.* x_1 *allora per il Teorema di Fermat* $f'(x_1)=0$

Teorema di Rolle

Se invece nessuno dei due è interno ad $[a,b]$ *per es.*

$$x_1=a, \qquad x_2=b$$

Dall'ipotesi $f(a)=f(b)$ *si ottiene minimo=massimo,*

Cioè $f(x)$ *è costante* $\forall x\in[a,b]$ *e quindi*

$$f'(x)=0 \qquad \forall x\in[a,b]$$

Esercizio
Dire se la funzione $f(x)=e^{x^2-1}$ *soddisfa il teorema di Rolle nell'intervallo* $[-1,1]$ *e in caso affermativo calcolare il punto (o i punti) del Teorema.*

Sono verificate tutte le ipotesi del teorema di Rolle, infatti:
i) $f(x)=e^{x^2-1}$ è continua in tutto R e quindi anche in [-1,1]
ii) $f(x)$ è derivabile in tutto R e quindi anche in (-1,1),
iii) $f(-1)=f(1)$
Allora $\exists\, x_0\in(-1,1):\ f'(x_0)=0$
x_0 Si ricava facendo il calcolo: $f'(x_0)=0$
Cioè $2xe^{x^2-1}=0\Rightarrow x_0=0$

Esercizio
Dire se la funzione $f(x) = \ln|x|$ *soddisfa il teorema di Rolle nell'intervallo* [-*e*, *e*].

Il teorema di Rolle non è applicabile perché $f(x) = \ln|x|$ non è definita in $x = 0$ e quindi non è né continua né derivabile in $x = 0$ e perciò non soddisfa tutte le ipotesi del teorema

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

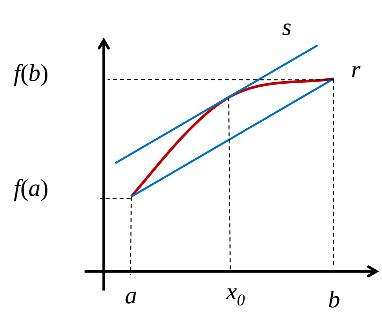
Sia $f(x):[a,b]\rightarrow R$.

i) f *è continua in* $[a,b]$,

ii) f *è derivabile in* (a,b),

Allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$s \,//\, r$

Per il Teorema di Lagrange $\exists$ *almeno un punto* $(x_0, f(x_0))$ *sul grafico di* $f(x)$ *in cui la retta tangente* ***t*** *è parallela alla retta* ***r*** *secante la curva in* $(a,f(a))$ *e* $(b,f(b))$

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Dimostrazione.

Si consideri la funzione ausiliaria

equazione di **r**

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \right]$$

Per $g(x)$ *vale il Teorema di Rolle, infatti:*

i) $g(x)$ *è continua in* $[a,b]$ *perché lo è* $f(x)$ (*l'altro pezzo è lineare*);

ii) $g(x)$ *è derivabile in* (a,b) *perché lo è* $f(x)$ (*l'altro pezzo è lineare*);

iii) $g(a)=g(b)=0$.

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

$$\Rightarrow \exists x_0 : g'(x_0) = 0$$

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Esempio

$f(x)=x^2$ *in* $[a,b]$,

per il Teorema di Lagrange $\exists x_0 \in [a,b]$:

$$\frac{b^2-a^2}{b-a}=2x_0 \Rightarrow x_0=\frac{b+a}{2}$$

Media aritmetica di a e b

Esercizio

Dire se è applicabile il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x)=\arcsin x$ *nell'intervallo* $[-1,1]$ *e in caso affermativo calcolare i punti del teorema.*

La funzione data soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Lagrange infatti:

i) f è continua in $[-1,1]$ (è il suo campo di esistenza),

ii) f è derivabile in $(-1,1)$

Allora $\exists\, x_0 \in (-1,1): f'(x_0)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}=\dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow x_0=\pm\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}$$

Esercizio

Determinare un intervallo in cui è applicabile il Teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \left| x - \frac{1}{x} \right|$$

i) La funzione data è continua nel suo campo di esistenza cioè nell'insieme: $A = \{x \in R : x \neq 0\}$

ii) f è derivabile nell'insieme $B = \{x \in R : x \neq 0, \pm 1\}$ con derivata:

$$f'(x) = \left| \frac{x^2 - 1}{x} \right| \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}$$

Perciò un intervallo in cui *f* soddisfa il teorema di Lagrange, è un qualunque intervallo [a,b] che non contiene $x = 0$ e tale che i punti $x = 1$ e $x = -1$ non siano interni ad esso (potrebbero stare agli estremi)

Per es: [1, 2] (*f* è continua in [1,2] e derivabile in (1,2), da notare che è derivabile anche in $x = 2$ ma non serve…)

Oppure [-4,-3], etc..